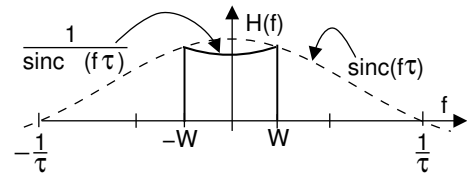


In tal caso (τ è noto) il filtro di ricostruzione può essere realizzato in modo da avere un andamento *inverso* a quello del $\frac{\sin x}{x}$, e tale che $H(f) \cdot \tau \text{sinc}(f\tau) = \text{costante}$. Infatti, questo accorgimento prende il nome di $\frac{\sin x}{x}$ *correction*.



All'appendice ?? è illustrato un metodo di MULTIPLAZIONE di più segnali campionati in una unica trasmissione.

La sezione seguente, pur esibendo alcuni aspetti analitici legati a quelli introdotti per il campionamento, ne è del tutto indipendente.

4.2 Trasformata discreta di Fourier

L'analisi in frequenza di un segnale, discussa al § ??, può essere condotta mediante programmi di elaborazione su computer⁴, utilizzando i campioni $x_m = x(mT_c)$ estratti dallo stesso, prelevati ad intervalli fissi T_c .

Disponendo di una sequenza di N valori $x_m, m = 0, 1, \dots, N - 1$, si definisce DISCRETE FOURIER TRANSFORM (**DFT**) la nuova sequenza

$$X_n = \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \quad (4.2)$$

univocamente definita per $n = 0, 1, \dots, N - 1$, e che costituisce una approssimazione⁵ della sequenza di campioni della trasformata $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, calcolata per $f = \frac{n}{NT_c}$, e divisa per T_c :

$$X_n \simeq \frac{1}{T_c} X \left(f = \frac{n}{NT_c} \right) \quad (4.3)$$

⁴I chip progettati appositamente per svolgere calcoli di elaborazione numerica del segnale sono detti DSP (*Digital Signal Processor*).

⁵Una prima fonte di approssimazione deriva dall'operazione di finestatura legata all'uso di un numero finito di campioni, operando quindi su $x_w(t) = x(t)w(t_c)$ anziché su $x(t)$. Per analizzare le altre fonti di approssimazione, iniziamo a scrivere l'espressione di $X_w(f) = \mathcal{F}\{x_w(t)\}$ per $f = \frac{n}{NT_c}$:

$$X_w \left(f = \frac{n}{NT_c} \right) = \int_0^{(N-1)T_c} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{NT_c} t} dt \simeq \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \int_0^{(N-1)T_c} \text{sinc} \left(\frac{t - mT_c}{T_c} \right) e^{-j2\pi \frac{n}{NT_c} t} dt$$

in cui la seconda eguaglianza utilizza l'interpolazione $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \cdot \text{sinc} \left(\frac{t - mT_c}{T_c} \right)$ fornita dal teorema del campionamento, ed introduce una seconda fonte di approssimazione legata all'intervallo *finito* di variazione per m (infatti, benchè l'integrale abbia estensione limitata, i valori di $x(t)$ che cadono entro tale estensione, dovrebbero dipendere da *tutti* i suoi campioni). L'ultimo integrale è a sua volta una approssimazione (a causa degli estremi di integrazione limitati, e peggiore per i sinc centrati in prossimità dei confini della finestra) della trasformata (calcolata in $f = \frac{n}{NT_c}$) di $\text{sinc} \left(\frac{t - mT_c}{T_c} \right)$, pari quest'ultima a $T_c \text{rect}_{\frac{1}{T_c}}(f) e^{-j2\pi f m T_c}$, che quando valutata per $f = \frac{n}{NT_c}$, fornisce il risultato

$$X_w \left(f = \frac{n}{NT_c} \right) = T_c \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

per valori $|n| \leq \frac{N}{2}$, a causa della estensione limitata (in frequenza) di $\text{rect}_{\frac{1}{T_c}}(f)$. E' però facile verificare che $X_w \left(\frac{n}{NT_c} \right)$ è periodica in n con periodo N , cosicchè i valori assunti per $n = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots$ sono uguali a quelli per $n = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots$

4 Campionamento ed elaborazione numerica

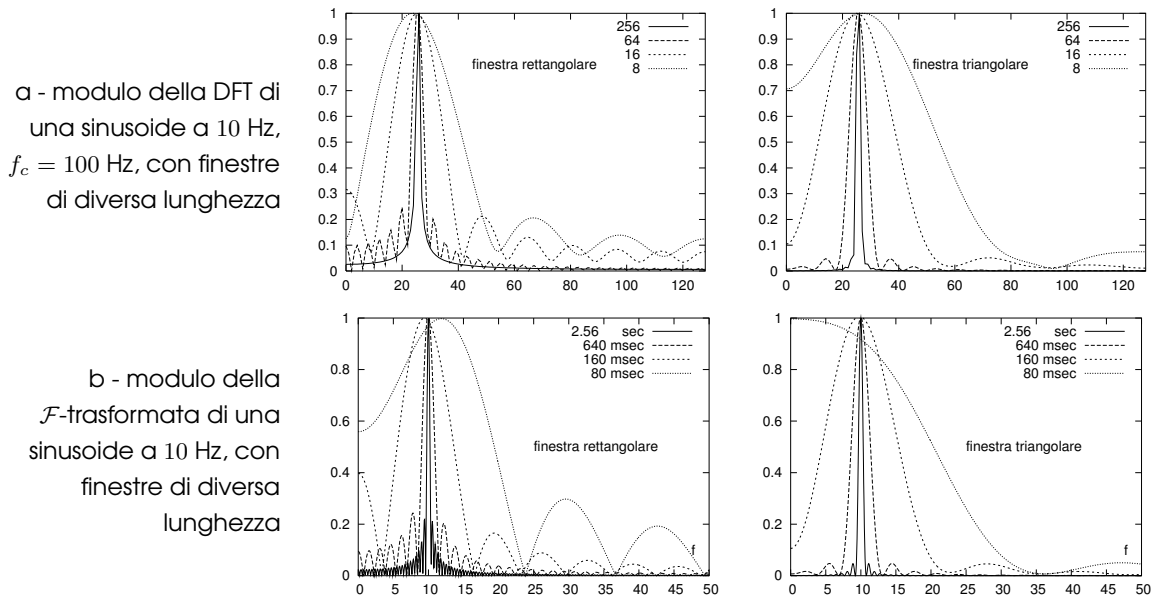


Figura 4.3: Confronto tra DFT ed \mathcal{F} -trasformata con uguale estensione temporale

Notiamo subito che la (4.2) è valida per qualsiasi n , ed ha un andamento periodico con periodo N , a cui corrisponde una frequenza $f = \frac{1}{T_c}$, in accordo con la separazione tra le repliche spettrali prevista dal teorema del campionamento; per questo motivo, qualora il segnale originario $x(t)$ contenga componenti a frequenze maggiori di $\frac{1}{2T_c}$, gli X_n con indici prossimi ad $\frac{N}{2}$ presentano errore di aliasing⁶.

Allo scopo di concretizzare le differenze tra la trasformata di Fourier ed i valori forniti dalla DFT, in fig. 4.3-a sono riportati i valori $|X_n|$ per la DFT di una sinusoide, adottando due diverse finestre di analisi, prelevando alla medesima frequenza di campionamento (100 Hz) un numero variabile di campioni (mostrato in figura), e ponendo i rimanenti a zero, per calcolare in tutti i casi la medesima DFT a 256 punti⁷.

Il risultato è quindi confrontato (4.3-b) con quello ottenibile per via analitica calcolando la \mathcal{F} -trasformata dello stesso segnale, adottando le medesime finestre temporali, di durata uguale al primo caso. Le curve relative al caso di 8 campioni (ed 8 msec) si ottengono a partire da meno di un periodo di segnale, e mostrano la presenza di un forte componente continua. Aumentando la durata della finestra, l'approssimazione di calcolare una $\mathcal{F}\{\}$ mediante la DFT migliora, anche se persiste un ridotto potere di risoluzione spettrale.

⁶Come osservato al § 4.1.1, lo spettro $X^\bullet(f)$ di un segnale campionato a frequenza f_c è costituito dalle repliche del segnale originario, distanziate di multipli di f_c : $X^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_c)$, e coincide con $X(f)$ per $-f_c/2 < f < f_c/2$, se $X(f)$ è limitata in banda tra $\pm W$ ed $f_c \geq 2W$. Al contrario, se $f_c < 2W$, allora le repliche $X(f - nf_c)$ si sovrappongono, e la (4.3) si riscrive come $X_n \simeq \frac{1}{T_c} X^\bullet(f = \frac{n}{NT_c})$.

⁷Il metodo esposto di porre a zero i campioni fino al raggiungimento di una potenza di due, in modo da utilizzare per il calcolo una FFT, è detto ZERO PADDING. Il calcolo della DFT su di un numero di punti pari ai campioni di segnale disponibili, non avrebbe dato luogo all'effetto finestra, ma avrebbe fornito in tutti i casi andamenti simili a quello osservabile per 256 punti. Infine, notiamo che nelle figure sono mostrati solo i primi 128 valori, essendo i rimanenti speculari.

Il passaggio dai campioni x_m alla sequenza X_n è invertibile⁸, ricorrendo alla INVERSE DISCRETE FOURIER TRASFORM (IDFT)

$$x_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi \frac{n}{N} m} \quad (4.4)$$

che per m esterno a $[0, N - 1]$ continua a valere, ed assume valori periodici, coerentemente a quanto accade per lo sviluppo in serie di Fourier. Infatti il legame tra DFT e serie di Fourier è molto stretto, in quanto i valori X_n rappresentano una approssimazione⁹ dei rispettivi coefficienti della serie di Fourier $X_n^{SF} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt$, calcolati a partire dal segmento $x_T(t)$ estratto da $x(t)$, e moltiplicati per N :

$$X_n \simeq N \cdot X_n^{SF} \quad (4.5)$$

Per approfondire i risvolti di questo risultato, affrontiamo la sezione successiva.

4.2.1 Relazione tra DFT e trasformata z

Così come per i segnali analogici sussiste una relazione (vedi pag. ??) tra la trasformata di FOURIER e quella di LAPLACE, così nel contesto delle sequenze, esistono legami tra DFT e *trasformata zeta*, definita come

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (4.6)$$

che, nel caso in cui la serie converga per $|z| = 1$, permette di definire la *trasformata di Fourier per sequenze* $X(e^{j\omega})$, ottenuta calcolando $X(z)$ sul cerchio unitario $z = e^{j\omega}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

che, se la sequenza $x(n)$ è ottenuta per campionamento, con periodo $T \leq \frac{1}{2W}$, di un segnale $x(t)$ limitato in banda tra $\pm W$, coincide (per $-\pi \leq \omega < \pi$) con la trasformata $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ calcolata in $-\frac{1}{2T} \leq f < \frac{1}{2T}$.

Al di fuori di tale intervallo, $X(e^{j\omega})$ è periodica in ω con periodo 2π , analogamente a ciò che risulta per la trasformata di Fourier $X^\bullet(f)$ di un segnale campionato; in particolare, se $x(m)$ è ottenuta campionando con periodo $T > \frac{1}{2W}$, allora $X(e^{j\omega})$ corrisponde proprio ad $X^\bullet(f)|_{f=\omega \frac{\pi}{W}}$, affetta da aliasing.

⁸Sostituendo la (4.2) nella (4.4), otteniamo

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \right) e^{j2\pi \frac{m}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m-k}{N} n}$$

ma, dato che $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m-k}{N} n} = \begin{cases} N & \text{se } k = m + lN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ con l intero, allora nella sommatoria esterna sopravvive solo il termine x_m , essendo x costituito solo da N valori.

⁹La relazione (4.5) si dimostra combinando le relazioni (??) e (4.3): $X_n \simeq \frac{1}{T_c} X\left(\frac{n}{NT_c}\right) = \frac{1}{T_c} X\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T_c} T X_n^{SF} = N X_n^{SF}$

4 Campionamento ed elaborazione numerica

Se la $X(z)$, ottenuta per una sequenza $x(n)$ aperiodica, è campionata in N punti equispaziati e disposti sul cerchio unitario, ossia per $z = e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$, con $k = 0, 1, \dots, N-1$, si ottiene una sequenza periodica¹⁰

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi\frac{k}{N}n} = X(z) \Big|_{z=e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}} = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi\frac{k}{N}} \quad (4.7)$$

a cui è possibile applicare la (4.4) per ottenere una nuova sequenza di valori nel tempo, periodica di periodo N , espressa come

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j2\pi\frac{k}{N}n} \quad (4.8)$$

I valori $\tilde{x}(n)$ dipendono da quelli $x(n) = x(t) \Big|_{t=nT}$ del segnale originario $x(t)$, campionato agli istanti $t = nT$, mediante la relazione¹¹

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN)$$

e quindi i primi N valori di $\tilde{x}(n)$ coincidono con i campioni di $x(t)$ solo se quest'ultimo ha durata limitata, con estensione minore di NT , ossia se N è sufficientemente elevato in modo che NT copra tutta la durata di $x(t)$, e la (4.6) si riconduca alla somma di un numero finito di termini. D'altra parte, se $x(t)$ ha durata maggiore di NT , ovvero $X(z)$ è stata campionata su di un numero di campioni troppo ristretto, allora l'applicazione della IDFT (4.8) ad $\tilde{X}(k)$ provoca il fenomeno di *aliasing temporale*.

4.2.2 Filtraggio numerico via DFT

La definizione di DFT illustrata al § 4.2 ben si presta a calcolare il risultato relativo ad un integrale di convoluzione, a patto di seguire alcune accortezze.

Convoluzione discreta Dati due segnali $x(t)$ e $h(t)$ limitati in banda tra $-W$ e W , anche il risultato della convoluzione $y(t) = x(t) \star h(t)$ è limitata in banda, ed i suoi campioni $h(n) = h(nT_c)$ (con $T_c > \frac{1}{2W}$) possono essere calcolati¹² a partire da quelli di $x(t)$ e $h(t)$ come $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m)$

¹⁰Indichiamo qui ed al prossimo §, una sequenza periodica mediante la tilde $\tilde{}$.

¹¹Infatti, sostituendo la (4.7) in (4.8), otteniamo

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j2\pi\frac{k}{N}m} e^{j2\pi\frac{k}{N}n}$$

che, scambiando l'ordine delle sommatorie, riscriviamo come $\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{k(m-n)}{N}m} \right)$. Dato che $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\frac{m-n}{N}k} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n + rN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$,

con r intero, si ottiene il risultato mostrato.

¹²Il risultato può essere ottenuto esprimendo l'integrale $x(t) \star h(t)$ nei termini dei campioni di $x(t)$ e $h(t)$, e sfruttando la proprietà di ortogonalità (vedi § 4.1.2) di $\text{sinc}(\cdot)$.

Convoluzione circolare Date due sequenze $x(n)$ ed $h(n)$ di durata finita N , il prodotto $Y(k) = X(k)H(k)$ delle rispettive DFT $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{n}{N}k}$ ed $H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi \frac{n}{N}k}$ possiede antitrasformata $\tilde{y}(n) = \mathcal{DFT}^{-1}\{Y(k)\}$ periodica in n di periodo N , e pari a

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m) \tilde{h}(n-m) \quad (4.9)$$

in cui $\tilde{x}(n)$ e $\tilde{h}(n)$ sono le sequenze periodiche di periodo N ottenute replicando infinitamente le sequenze originali $x(n)$ ed $h(n)$ ⁽¹³⁾. La convoluzione (4.9) è detta *circolare* perché è possibile immaginare le sequenze $x(n)$ ed $h(n)$ *incollate* su due cilindri concentrici, e la somma svolta sui prodotti degli elementi coincidenti. Ad ogni valore di n , corrisponde una diversa rotazione relativa (con angolo multiplo di $2\pi/N$) dei cilindri, ed il campione di $h(\cdot)$ che era allineato ad $x(N-1)$ rientra dall'altro lato, per corrispondere con $x(0)$.

Convoluzione fra sequenze limitate Sappiamo che la convoluzione produce un risultato di durata pari alla somma delle durate degli operandi; per l'esattezza, nel caso di due sequenze $x(n)$ ed $h(n)$ di durata N ed M , il risultato della convoluzione discreta $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$ ha estensione $N+M-1$. Pertanto, perché la (4.9) produca lo stesso effetto di una convoluzione discreta, occorre costruire delle sequenze $x'(n)$ e $h'(n)$ di lunghezza almeno pari ad $N+M-1$, ottenute a partire dai valori di $x(n)$ ed $h(n)$, a cui si aggiungono $M-1$ ed $N-1$ valori nulli, rispettivamente. In tal modo, il prodotto $X'(k)H'(k)$ tra le DFT ad $N+M-1$ punti di queste due nuove sequenze, può essere antitrasformato, per fornire il risultato corretto.

Convoluzione di segnali via DFT Due segnali $x(t)$ e $h(t)$ limitati in banda non possono, a rigore, essere limitati nel tempo; viceversa, una finestra di segnale non può, a rigore, essere rappresentata dai suoi campioni. Infatti, l'effetto della convoluzione in frequenza tra la trasformata della finestra (nominalmente illimitata in banda) e lo spettro del segnale, produce una dispersione frequenziale di quest'ultimo.

Ciononostante, disponendo di un numero di campioni sufficientemente elevato, si può assumere che la trasformata della finestra si attenui, fino a rendersi trascurabile, oltre ad una certa frequenza. Inoltre, l'adozione di una frequenza di campionamento più elevata, provoca un allontanamento delle repliche spettrali del segnale campionato. In queste due ipotesi, è lecito ritenere l'elaborazione condotta sui campioni di segnale equivalente a quella da svolgere sul segnale originario.

¹³Infatti, ad $x(n)$ ed $h(n)$ corrispondono le DFT periodiche $\tilde{X}(k)$ ed $\tilde{H}(k)$, che hanno per antitrasformata $\tilde{x}(n)$ ed $\tilde{h}(n)$. Il prodotto $\tilde{X}(k)\tilde{H}(k)$, espresso in termini di $\tilde{x}(n)$ ed $\tilde{h}(n)$, risulta pari a $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}(k)\tilde{H}(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{h}(r) e^{-j2\pi \frac{m+r}{N}k}$, ed applicando a questo la (4.4), otteniamo:

$$\tilde{y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}(k) e^{j2\pi \frac{n}{N}k} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{h}(r) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n-m-r}{N}k} \right)$$

Dato che $\sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{n-m-r}{N}k} = \begin{cases} N & \text{se } r = (n-m) + lN \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, con l intero, risulta allora $\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(m)\tilde{h}(n-m)$, come anticipato.

4 Campionamento ed elaborazione numerica

Consideriamo ora il caso di operare su campioni prelevati alla frequenza opportuna, e di voler determinare la risposta di un filtro caratterizzato dalla propria $h(n)$ di durata finita M , ad un ingresso $x(n)$ di durata indefinita. Per applicare i risultati fin qui descritti, occorre suddividere la sequenza $x(n)$ in segmenti $x_q(n)$ di lunghezza L

$$x_q(n) = \begin{cases} x(n) & \text{per } qL \leq n \leq (q+1)L \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

in modo che $x(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q(n)$, ed operare una successione di convoluzioni discrete $y_q(n) = x_q(n) \star h(n)$, in modo da ottenere $y(n) = x(n) \star h(n) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} x_q(n) \star h(n)$ per la linearità della convoluzione.

Osserviamo ora che ognuno dei termini $y_q(n)$ risulta di estensione $N = M + L - 1$ punti, e può essere calcolato mediante una DFT inversa ad N punti del prodotto $X'_q(k) H'(k)$ tra le DFT ad N punti delle versioni *allungate con zero* (ZERO PADDED) di $x_q(n)$ ed $h(n)$.

Infine, notiamo che l'estensione $N = M + L - 1$ dei termini $y_q(n)$ è maggiore di quella dei segmenti originali $x_q(n)$, di lunghezza L : pertanto la sequenza $y(n)$ si ottiene sommando ai primi $M - 1$ valori di ognuna delle $y_q(n)$, gli ultimi $M - 1$ valori risultanti dalle operazioni precedenti. Per questo motivo, il metodo prende il nome di OVERLAP AND ADD.

4.2.3 Riassumendo

la DFT (4.2) e la IDFT (4.4) costituiscono una coppia di relazioni invertibili che permettono di passare da una sequenza complessa di lunghezza N ad un'altra di pari lunghezza. Ma:

- calcolando la DFT su di una finestra di campioni x_m di un segnale $x(t)$ limitato in una banda $W < 1/2T_c$, si ottengono delle stime X_n dei campioni della sua trasformata di Fourier $X(f)$ per $f = \frac{n}{NT_c}$, ossia $X\left(\frac{n}{NT_c}\right) \simeq T_c \cdot X_n$ con $n = 0, 1, \dots, N - 1$
- calcolando la IDFT degli X_n si ri-ottengono i campioni di $x(t)$ di partenza
- sia gli X_n che gli x_m sono in realtà sequenze periodiche di periodo N
- i calcoli indicati dalle (4.2) e (4.4) sono effettuati mediante un diverso algoritmo, chiamato *Fast Fourier Transform* o FFT, che ha il vantaggio di richiedere una complessità $O(N \log_2 N)$ ridotta rispetto a quella della DFT, che è $O(N^2)$
- la FFT deve essere calcolata su di un numero di campioni N_{FFT} che sia una potenza di due, ossia deve essere $N_{FFT} = 2^M > N$. La finestra di analisi viene quindi estesa ponendo a zero gli $N_{FFT} - N$ valori finali

Se la sommatoria (4.2) venisse applicata, anzichè ad un numero finito N di campioni x_m , ad un loro numero infinito, allora

- si otterrebbe una sequenza periodica $\tilde{X}(k)$ di periodo N , corrispondente al campionamento dello spettro periodico $X^\bullet(f)$

- l'applicazione della IDFT a $\tilde{X}(k)$ produrrebbe una sequenza periodica $\tilde{x}(m)$ di valori uguali agli x_m solo se questi ultimi erano in numero limitato, inferiore ad N
- segmentando un segnale $x(t)$ in sotto-intervalli disgiunti, si può eseguire la convoluzione tra $x(t)$ ed una $h(t)$ di durata finita, operando esclusivamente nel dominio digitale, e sommando tra loro le IDFT dei prodotti tra la DFT dei campioni di $h(t)$ e le DFT dei segmenti di $x(t)$

L'interpretazione dei valori che risultano dalla applicazione della DFT su dei campioni di segnale, come stima della trasformata di Fourier del segnale, deve tenere conto oltre che delle fonti di approssimazioni evidenziate nella nota 5, anche dei corretti valori da assegnare alla scala delle frequenze e delle ampiezze, ossia:

4.2.3.1 Le frequenze della DFT

Occorre tener presente il valore della frequenza di campionamento, e se il segnale di partenza $x(t)$ è reale, della periodicità degli X_n . Infatti i valori X_n per $n = 0, 1, \dots, N - 1$ corrispondono ai campioni di $X^\bullet(f)$ per $f = \frac{n}{NT_c}$, ma se $x(t)$ è reale, $X^\bullet(f)$ oltre ad essere periodico presenta simmetria coniugata, e dunque per valori $f > W = \frac{1}{2T_c}$, $X^\bullet(f)$ assume valori *speculari* a quelli risultanti per $f < W = \frac{1}{2T_c}$. Per fissare le idee, procediamo con un esempio: se $N = 512$ (come nel caso di una FFT), i primi 256 valori (da 0 a 255, ossia per $n = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$) sono da mettere in corrispondenza con quelli di $X(f)$ con $f = 0, \frac{1}{NT_c}, \frac{2}{NT_c}, \dots, \frac{N/2-1}{NT_c}$; mentre i restanti 256 valori (da 256 a 511, ossia per $n = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1$, e corrispondenti a $f = \frac{1}{2T_c}, \frac{N/2+1}{NT_c}, \dots, \frac{N-1}{NT_c}$) esibiscono un comportamento speculare a quello dei precedenti, essendo relativi a frequenze maggiori di quella *di Nyquist*.

4.2.3.2 Le ampiezze della DFT

Come espresso dalla (4.5), i valori X_n rappresentano una approssimazione dei coefficienti della serie di Fourier calcolati sulla finestra temporale da cui provengono i campioni di segnale, e moltiplicati per il numero di campioni utilizzati nel calcolo: $X_n \simeq N \cdot X_n^{SF}$. Pertanto, i valori ottenuti dalla DFT devono essere normalizzati, dividendoli per N .