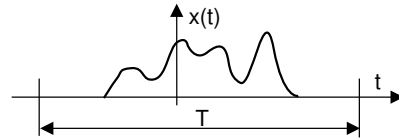


3 Trasformata di Fourier

Abbiamo già osservato al §?? che lo sviluppo in serie di Fourier può essere applicato ad un segnale limitato nel tempo, e che l'uso della formula di ricostruzione rende periodico il segnale originario. Se però facciamo tendere ad infinito il periodo "fittizio" T su cui sono calcolati i coefficienti X_n , le armoniche della serie di Fourier tendono ad infittirsi, fino ad arrivare ad una distanza infinitesima; allo stesso tempo, la periodizzazione del segnale ricostruito tende via via a scomparire.



3.1 Definizione

La trasformata di Fourier serve a rappresentare quei segnali per i quali non sussiste una struttura periodica, ed è un operatore funzionale che, applicato ad un segnale definito nel dominio del tempo, ne individua un altro nel dominio della variabile *continua* frequenza (a differenza della serie *discreta* di Fourier, idonea al caso in cui siano presenti *solo armoniche* della fondamentale). L'operazione di trasformazione è spesso indicata con la simbologia $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, ed il segnale trasformato si indica con la stessa variabile di quello nel tempo, resa maiuscola. La sua definizione formale dal punto di vista analitico è:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

la cui esistenza è garantita per segnali $x(t)$ impulsivi (ovvero per i quali $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, cioè assolutamente sommabili). Un segnale impulsivo è anche di energia, mentre non è sempre vero il viceversa. Spesso però, $X(f)$ esiste anche per segnali di energia; vedremo inoltre che può essere definita (grazie ad operazioni di passaggio al limite) anche per segnali di potenza periodici.

L'antitrasformata di Fourier $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ è l'operatore analitico che svolge l'associazione inversa a $\mathcal{F}\{\}$, e che consente di ottenere, a partire da un segnale definito nel dominio della frequenza, quel segnale nel dominio del tempo la cui trasformata è il primo segnale. L'operazione di antitrasformazione è definita come

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

e vale ovunque $x(t)$ sia continuo, mentre nelle discontinuità di prima specie fornisce il valor medio di $x(t)$. Il risultato della trasformata $X(f) = M(f) \exp^{j\varphi(f)}$ è anche detto *spettro di ampiezza complessa*, mentre $M(f)$ ed $\varphi(f)$ sono detti spettri di *modulo* e *fase*.

La formula di ricostruzione, se messa a confronto con la serie di Fourier, può essere pensata come una somma integrale di *infinite* componenti $X(f) df e^{j2\pi ft}$ di ampiezza (complessa) infinitesima, evidenziando come ora siano presenti *tutte* le frequenze e non solo le armoniche. Una seconda analogia con la serie di Fourier deriva dal considerare

3 Trasformata di Fourier

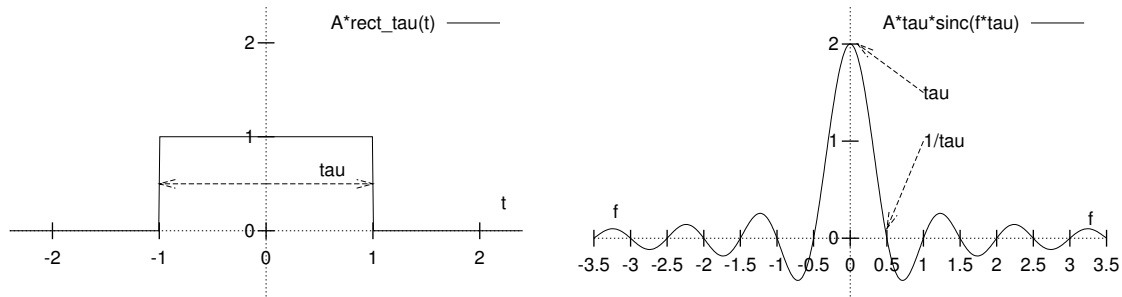


Figura 3.1: \mathcal{F} -trasformata di un rettangolo di base $\tau = 2$ ed ampiezza $A = 1$

un segnale $x(t)$ di durata limitata T , e calcolare $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ per $f = \frac{n}{T} = nF$. In tal caso, è facile verificare¹ che risulta

$$X(f = nF) = T \cdot X_n \quad (3.1)$$

con X_n pari all' n -esimo coefficiente di Fourier calcolato per $x(t)$ su quello stesso periodo.

Prima di procedere con le proprietà e le caratteristiche di questa trasformata, svolgiamo un semplice esercizio.

Trasformata di un rettangolo Disponendo del segnale $x(t) = A \text{rect}_\tau(t)$, se ne vuol calcolare lo spettro di ampiezza $X(f)$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \text{rect}_\tau(t) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = A \left. \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\ &= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}}{2j} = A\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = A\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \end{aligned}$$

Questo risultato, graficato in fig 3.1, ricorda quello già incontrato a pag. ?? per la serie di Fourier dell'onda quadra. Il noto andamento $\frac{\sin x}{x}$ rappresenta ora la distribuzione *continua* in frequenza dello spettro di ampiezza, ed il primo zero della curva si trova presso $f = \frac{1}{\tau}$, in modo del tutto simile al treno di impulsi rettangolari di base τ . Notiamo esplicitamente inoltre che, *umentando* la durata del *rect*, lo spettro si *restringe*, addensandosi nella regione delle frequenze più basse; mentre al contrario, qualora il *rect* sia più breve, $X(f)$ si estende a regioni di frequenza più elevata.

3.2 Densità di energia

Similmente al caso dei segnali periodici, viene ora stabilita una relazione tra l'energia di un segnale, e la *distribuzione* della stessa nel dominio della frequenza. In base alle considerazioni geometriche esposte in § ??, definiamo come prodotto scalare tra i segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$ (detto anche *energia incrociata*) il valore

$$\mathcal{E}_{xy} = (\bar{x}, \bar{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

¹ $X(nF) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi nFt} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi nFt} dt = T \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi nFt} dt = T \cdot X_n$