

7.5.6 Dipendenza di Pe da Eb/No

Sviluppiamo ora la (7.3) in modo da esprimere l'argomento di $\text{erfc}\{\}$ in funzione di una grandezza (E_b/N_0) che riassume in sé i valori dei parametri intrinseci del collegamento (potenza ricevuta $\mathcal{P}_R$, densità di rumore N_0 , frequenza binaria f_b). Infatti la grandezza $SNR = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_N}$ generalmente indicativa della qualità del segnale ricevuto, in questo caso dipenderebbe, oltre che dai parametri suddetti, anche da altre grandezze indicative invece delle specifiche scelte relative ai parametri di trasmissione, come γ e L , ed il cui contributo vorremmo invece mantenere separato. Infatti, la potenza di rumore $\mathcal{P}_N = N_0 B_N$, da cui SNR dipende, a sua volta è funzione dalla banda del filtro di ricezione, che come abbiamo visto è posta pari alla massima frequenza presente in $r(t)$, e quindi (prendendo in considerazione un codice di linea $g(t)$ a coseno rialzato, vedi § 5.2.2.2) pari a

$$B_N = \frac{f_s}{2} (1 + \gamma) = \frac{f_b}{2 \log_2 L} (1 + \gamma)$$

dipendendo quindi anch'essa da L e γ , oltre che dalla f_b . Pertanto, al variare di L e γ , varia anche SNR .

7.5.6.1 Contributo di Eb/No all'SNR

Allo scopo quindi di mantenere separati tra loro i diversi elementi che determinano la probabilità di errore, e di porre nella giusta evidenza i parametri di sistema f_b ed N_0 , esprimiamo le potenze $\mathcal{P}_N$ e $\mathcal{P}_R$ in funzione di $T_b = 1/f_b$:

$$\mathcal{P}_N = N_0 B_N = \frac{N_0 (1 + \gamma)}{T_b 2 \log_2 L} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_R = \frac{E_b}{T_b} \quad (7.1)$$

in modo da ottenere

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_N} = \frac{E_b}{T_b} \frac{T_b 2 \log_2 L}{N_0 (1 + \gamma)} = \frac{E_b 2 \log_2 L}{N_0 (1 + \gamma)} \quad (7.2)$$

La grandezza E_b rappresenta l'energia per bit¹ e la sua definizione

$$E_b = \mathcal{P}_R T_b = \frac{\mathcal{P}_R}{f_b}$$

mostra come essa riassume in sé i parametri di sistema *potenza di segnale e velocità binaria*, mentre invece non dipende dai *parametri di trasmissione* L e γ . Anche N_0 , inoltre, costituisce un parametro di sistema, rappresentando una grandezza su cui non è possibile intervenire.

7.5.6.2 La componente di segnale

Prima di ottenere una espressione per P_α in funzione di E_b/N_0 , occorre esprimere $\mathcal{P}_R$ in funzione dei parametri di trasmissione L e γ , nonché della dinamica Δ . Si può dimostrare che sotto le ipotesi in cui:

1. si adotti un impulso di Nyquist a coseno rialzato con roll-off γ ;

¹si rifletta sulla circostanza che la potenza è una energia per unità di tempo.

2. i simboli $a[k]$ siano statisticamente indipendenti ed a valori a_i equiprobabili;
3. tali valori siano distribuiti uniformemente su L livelli, con dinamica $a_L - a_1 = \Delta$;

al § ?? si ottiene²

$$\mathcal{P}_R = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1} \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \quad (7.3)$$

Se in particolare risulta $L = 2$ e $\gamma = 0$ (come nel caso di trasmissione binaria a banda minima) allora si ha $\mathcal{P}_R = \frac{\Delta^2}{4}$. Ma per essere utilizzata nel prosieguo, la (7.3) deve prima essere invertita, in modo da esprimere Δ in funzione di $\mathcal{P}_R$:

$$\Delta = \sqrt{12 \frac{L-1}{L+1} \frac{\mathcal{P}_R}{(1-\gamma/4)}} \quad (7.4)$$

7.5.6.3 Espressione della P_e per simbolo

Non resta ora che inserire la (7.4) nella espressione di P_α , ricordare che $\sigma_N^2 = \mathcal{P}_N$, e tenere conto della (7.2), in modo da ottenere³

$$P_e = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2 - 1)(1 + \gamma)(1 - \frac{\gamma}{4})}} \right\} \quad (7.5)$$

che è graficata alla Fig 7.1, come funzione di $\frac{E_b}{N_0} \Big|_{dB}$, per tre condizioni operative. In particolare, notiamo che per $L = 2$ e $\gamma = 0$ si ottiene:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$$

Le scelte progettuali (γ e L) diverse da $L = 2$ e $\gamma = 0$ determinano immancabilmente un peggioramento della P_e , ma vengono intraprese per soddisfare esigenze di risparmio di banda (aumentando L)⁴, e per ridurre i termini di interferenza intersimbolica (aumentando γ).

²Anche se il risultato sarà dimostrato al § ??, merita comunque un commento: osserviamo che $\mathcal{P}_R$ diminuisce all'aumentare di γ (si stringe infatti l'impulso nel tempo); inoltre $\mathcal{P}_R$ diminuisce al crescere di L , in quanto nel caso di più di 2 livelli, la forma d'onda assume valori molto vari all'interno della dinamica di segnale, mentre con $L = 2$ ha valori molto più "estremi".

³Per chiarezza sviluppiamo i passaggi, piuttosto banali anche se non ovvi:

$$\begin{aligned} P_e &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) P_\alpha = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma_N(L-1)} \right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{12 \frac{L-1}{L+1} \frac{\mathcal{P}_R}{(1-\gamma/4)}} \frac{1}{2\sqrt{2}\mathcal{P}_N(L-1)} \right\} = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ 2\sqrt{3 \frac{L-1}{L+1} \frac{1}{(1-\gamma/4)}} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_N}} \frac{1}{(L-1)} \right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{L-1}{L+1} \frac{1}{(L-1)^2} \frac{1}{(1-\gamma/4)} SNR} \right\} = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{L^2-1} \frac{1}{(1-\gamma/4)} \frac{E_b}{N_0} \frac{2 \log_2 L}{1+\gamma}} \right\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2-1)(1+\gamma)(1-\frac{\gamma}{4})}} \right\} \end{aligned}$$

⁴Aumentando L , l'argomento di (7.5) diminuisce, in quanto $(L^2 - 1)$ cresce più velocemente di $\log_2 L$.

Due domande riassuntive:

1. Perché P_e peggiora se aumento i livelli? Risposta ⁽⁵⁾.
2. Perché P_e peggiora se aumento γ ? Risposta ⁽⁶⁾.

Compromesso banda - potenza La circostanza che, a parità di f_b , la riduzione della banda occupata ottenibile aumentando L possa essere compensata (in modo da ottenere ancora la stessa P_e) solamente a seguito di un aumento di E_b , ovvero un aumento della potenza trasmessa, è un aspetto di un risultato generale della teoria dell'Informazione. Claude Shannon ha infatti dimostrato che è *possibile trasmettere senza errori* (ricorrendo a tecniche di codifica di canale oltremodo sofisticate) purchè la velocità di trasmissione f_b non ecceda la *Capacità di Canale*, definita come $C = W \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{P}_R}{N_0 W} \right)$, in cui W è la banda del canale, $\mathcal{P}_R$ la potenza ricevuta, e $N_0 W$ la potenza del rumore. Un secondo canale, con W *minore*, dispone di una minore Capacità, in quanto $\log_2(\cdot)$ cresce più lentamente di quanto non decresca W ; pertanto, per mantenere la stessa Capacità, è necessario trasmettere con una maggiore potenza di segnale $\mathcal{P}_R$. E' questo il motivo per cui, nel caso in cui vi siano limitazioni di potenza ma non di banda, come ad esempio nelle *comunicazioni satellitari*, conviene occupare la maggior banda possibile, mantenendo $L = 2$, in modo da risparmiare potenza.

Compromesso velocità - distorsione Abbiamo appena fatto notare come, riducendo la banda occupata dal segnale dati, occorra aumentare la potenza ricevuta per mantenere la stessa P_e . Viceversa, osserviamo anche che l'*aumento* della velocità binaria (e quindi dell'occupazione di banda) dovuta all'adozione di strategie per il controllo di errore (vedi § 5.3), consente di *ridurre* la probabilità di errore stessa, e dunque migliorare la *fedeltà* del flusso binario, anche a parità di potenza ricevuta. Per contro, volendo mantenere immutata la qualità, e dunque la P_e , l'*aumento* dell'occupazione di banda prodotta dal controllo di errore, consente di *ridurre* la potenza di segnale!

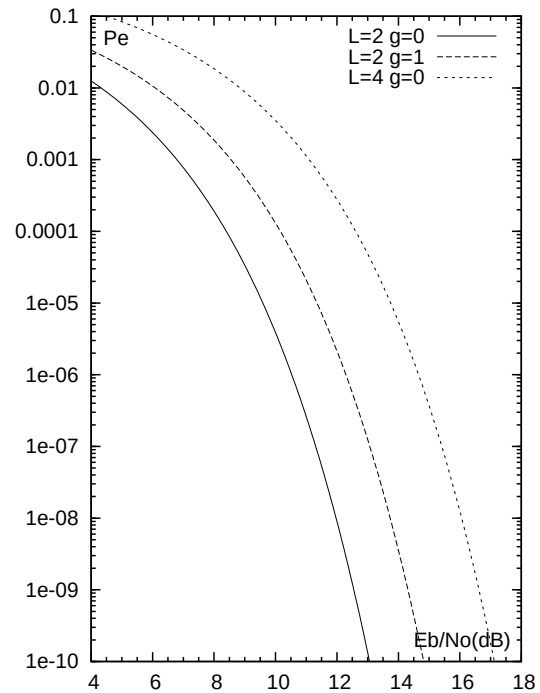


Figura 7.1: Andamento di P_e vs. E_b/N_0

⁵Perché a parità di $\mathcal{P}_R$ gli intervalli di decisione sono più ravvicinati, e le "code" della gaussiana sottendono un'area maggiore.

⁶Perché occorre aumentare la banda del filtro di ricezione e dunque far entrare più rumore. D'altra parte questo peggioramento è compensato dalla riduzione dell'ISI.

Esercizio Un sistema di trasmissione basato sul campionamento e sulla trasmissione numerica è rappresentato in figura 7.2. Il canale riportato all'estremità destra è considerato ideale entro una banda

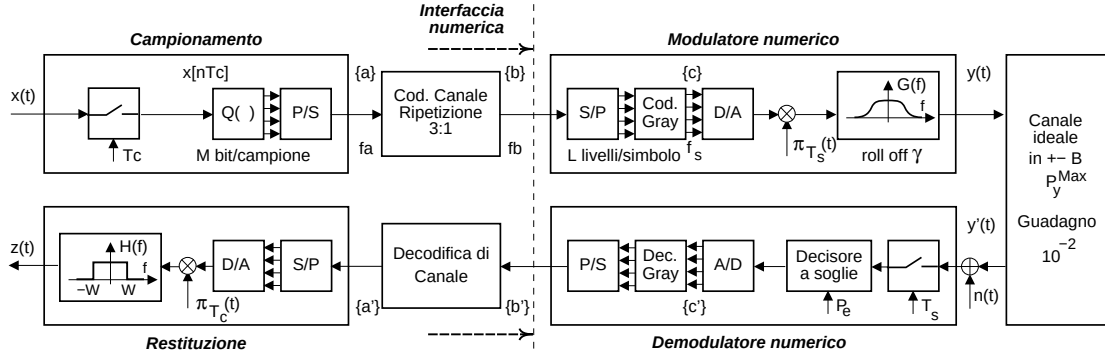


Figura 7.2: Sistema di trasmissione a cui si riferisce l'esercizio

$\pm B = \pm 31.5$ KHz, purchè la potenza al suo ingresso non superi il valore $\mathcal{P}_y^{Max} = 1$ Volt²; in tal caso la potenza in uscita risulta $\mathcal{P}_{y'} = 0.01 \cdot \mathcal{P}_y$. Al segnale ricevuto è sovrapposto un rumore additivo gaussiano bianco stazionario ergodico a media nulla, con spettro di densità di potenza $\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2} = 4.61 \cdot 10^{-14}$ Volt²/Hz, e limitato nella banda $\pm B$.

- 1) Se $G(f)$ è a coseno rialzato con $\gamma = .5$, determinare la massima frequenza di simbolo $f_s = \frac{1}{T_s}$.
- 2) Desiderando una $P_e = P_e^c$ per la sequenza $\{c'\}$ pari a $P_e = 10^{-4}$, determinare il massimo numero di livelli/simbolo L .
- 3) Indicare la frequenza binaria f_b per la sequenza $\{b'\}$.
- 4) Valutare P_e^b per la sequenza $\{b'\}$ e mostrare che il numero di errori per unità di tempo in $\{b'\}$ è lo stesso che in $\{c'\}$.
- 5) Mostrare che, adottando una codifica di canale a ripetizione 3 : 1, la probabilità di errore P_e^a per la sequenza $\{a'\}$ risulta pari a circa $P_e^a \simeq 3 (P_e^b)^2$.
- 6) Indicare la frequenza binaria f_a per le sequenze $\{a\}$ ed $\{a'\}$.

Supponiamo ora che $P_e^a = 0$, e si desideri un $SNR = \mathcal{P}_x / \mathcal{P}_{z-x} = 10000$. Nel caso in cui $x(t)$ sia un processo con densità di probabilità $p(x)$ uniforme, ed indicando con W la banda di $x(t)$;

- 7) Determinare il minimo numero di bit/campione M .
- 8) Determinare la massima banda W .
- 9) Se la banda è ridotta a $W' = \frac{1}{2}W$, determinare il nuovo valore di SNR ottenibile.

Soluzione

- 1) La banda B occupata dal segnale y vale $B = \frac{f_s}{2} (1 + \gamma)$, e quindi deve risultare $f_s = \frac{2B}{1+\gamma} = \frac{2 \cdot 31.5 \cdot 10^3}{1.5} = 42 \cdot 10^3 = 42.000$ baud (*baud = simboli/secondo*).
- 2) Osserviamo che in questo caso la (7.5) non può essere applicata direttamente, in quanto non essendo ancora nota la f_b , non è possibile calcolare il valore di $E_b = \frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_b}$. Notiamo però che essendo $f_b = f_s \cdot \log_2 L$, indicando con y l'argomento dell'*erfc* $\{\cdot\}$, questo può essere riscritto come

$$y = \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 L}{(L^2 - 1)(1 + \gamma)(1 - \frac{\gamma}{4})}} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot \log_2 L} \frac{1}{N_0} \frac{3 \cdot \log_2 L}{(L^2 - 1) 1.31}} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot N_0} \cdot \frac{2.29}{L^2 - 1}}$$

avendo tenuto conto che se $\gamma = 0.5$, allora $(1 + \gamma) \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right) \simeq 1.31$. Inoltre, se $L \gg 1$ (come verificheremo), la (7.5) può essere approssimata come $P_e \simeq \text{erfc}\{y\}$, e dunque per $P_e = 10^{-4}$ la figura di pag. 137 ci permette di individuare il valore di $y \simeq 2.7$, e pertanto

$$\frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot N_0} \cdot \frac{2.29}{L^2 - 1} = y^2 = (2.7)^2 = 7.29$$

e, conoscendo i valori di f_s , $\mathcal{P}_{y'}$ e N_0 , scriviamo

$$L^2 = 1 + \frac{\mathcal{P}_{y'}}{f_s \cdot N_0} \cdot \frac{2.29}{7.29} = 1 + \frac{10^{-2}}{42 \cdot 10^{-3} \cdot 4.61 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.31 = 1 + 5.16 \cdot 10^6 \cdot 0.31 \simeq 1.6 \cdot 10^6$$

e quindi $L = \sqrt{1.6 \cdot 10^6} = 1265$ che, essendo un valore massimo, limitiamo a $L = 1024$ livelli

- 3) Dato che ad ogni simbolo di $\{c\}$ ad L livelli, con frequenza di emissione pari a f_s , corrisponde ad un gruppo di $N_b = \log_2 L = 10$ bit della sequenza $\{b\}$, la frequenza f_b è di 10 volte f_s , e quindi $f_b = 10 \cdot f_s = 10 \cdot 42 \cdot 10^3 = 420$ Kbps.
- 4) Grazie all'adozione del codice di Gray, in caso di errore tra livelli contigui per i simboli di $\{c'\}$, nella sequenza $\{b'\}$ solo uno (tra N_b) dei bit associati ad un simbolo è errato; il bit errato è uno qualsiasi del gruppo di N_b , e pertanto la probabilità che un bit specifico sia errato (quando è errato il simbolo di $\{c'\}$) è $\frac{1}{N_b}$. Pertanto $P_e^b = P_e^{b/c} P_e^c = \frac{1}{N_b} P_e^c$, in cui $P_e^{b/c}$ è la probabilità condizionata che un generico bit di $\{b'\}$ sia sbagliato quando è sbagliato il simbolo di $\{c'\}$ da cui ha origine.
 - Il numero di bit (della sequenza $\{b'\}$) errati per unità di tempo è dato da $P_e^b \cdot f_b$; sostituendo: $P_e^b \cdot f_b = \frac{P_e^c}{N_b} \cdot f_b = P_e^c \cdot \frac{f_b}{N_b} = P_e^c \cdot f_s$, ovvero è numericamente pari ai simboli errati (nella sequenza $\{c'\}$) per unità di tempo;
 - risulta dunque infine:
 - $P_e^b = \frac{P_e^c}{N_b} = \frac{10^{-4}}{10} = 10^{-5}$;
 - $P_e^b \cdot f_b = P_e^c \cdot f_s = 10^{-5} \cdot 420 \cdot 10^3 = 10^{-4} \cdot 42 \cdot 10^3 = 4.2 \frac{\text{errori}}{\text{secondo}}$
- 5) Ogni bit di $\{a'\}$ è sbagliato solo se sono sbagliati 2 o più bit in un gruppo di 3; come mostrato al capitolo seguente, la probabilità di 2 bit errati su 3 è calcolabile dalla distribuzione di Bernoulli, e vale $\binom{3}{2} p_e^2 (1 - p_e) = 3 p_e^2 (1 - p_e)$, a cui va sommata la probabilità di 3 bit errati, pari a p_e^3 . Pertanto $p_e^a = 3 p_e^2 (1 - p_e) + p_e^3 = 3 p_e^2 - 3 p_e^3 + p_e^3 \simeq 3 p_e^2$ in cui ovviamente $p_e = P_e^b$, e l'approssimazione è legittima in quanto se $p_e = 10^{-5}$ allora $p_e^2 = 10^{-10}$ e $p_e^3 = 10^{-15}$, trascurabili rispetto a p_e . Lo stesso risultato si ottiene osservando che 2 bit errati su 3 hanno probabilità $p_e^2 (1 - p_e)$, e questi possono essere scelti in tre modi diversi (1° e 2° , 1° e 3° , 2° e 3°). In definitiva, risulta $P_e^a \simeq 3 (P_e^b)^2 = 3 \cdot 10^{-10}$.
- 6) Dato che ad ogni 3 bit di $\{b'\}$ corrisponde un solo bit di $\{a'\}$, si ottiene $f_a = \frac{f_b}{3} = \frac{420 \cdot 10^3}{3} = 140$ Kbps, a cui corrisponde $P_e^a \cdot f_a = 3 \cdot 10^{-10} \cdot 140 \cdot 10^3 = 4.2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{errori}}{\text{secondo}}$.
- 7) Sappiamo che per un processo uniforme l' SNR_q di quantizzazione risulta approssimativamente $SNR_q = (L - 1)^2$, in cui L è il numero di livelli del quantizzatore, a cui corrisponde l'utilizzo di $M = \log_2 L$ bit/campione. Risulta pertanto $L = 1 + \sqrt{SNR_q} = 1 + \sqrt{10^4} = 101$ livelli. Per ottenere un numero intero di bit/campione ed un SNR_q migliore od uguale a quello desiderato, determiniamo l'intero superiore: $M = \lceil \log_2 L \rceil = 7$ bit/campione (equivalente a 128 livelli).
- 8) Come sappiamo, la frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$ non può essere inferiore a $2W$; inoltre, la frequenza binaria f_a risulta pari al prodotto dei bit/campione per i campioni a secondo: $f_a = f_c \cdot M$; pertanto $f_c = \frac{f_a}{M} = \frac{140 \cdot 10^3}{7} = 20$ KHz e dunque la W massima risulta $W_{Max} = \frac{f_c}{2} = 10$ KHz.
- 9) Nel caso in cui $W' = \frac{1}{2}W$, allora si può dimezzare anche la frequenza di campionamento $f'_c = \frac{f_c}{2} = 10$ KHz, e pertanto utilizzare un $M' = 2M$ per ottenere la stessa f_a . Pertanto il nuovo SNR_q risulta $SNR'_q = (L' - 1)^2 = (2^M - 1)^2 = (2^7 - 1)^2 \simeq 2.68 \cdot 10^8$, ovvero $SNR'_q \text{ (dB)} = 84.3$ dB.