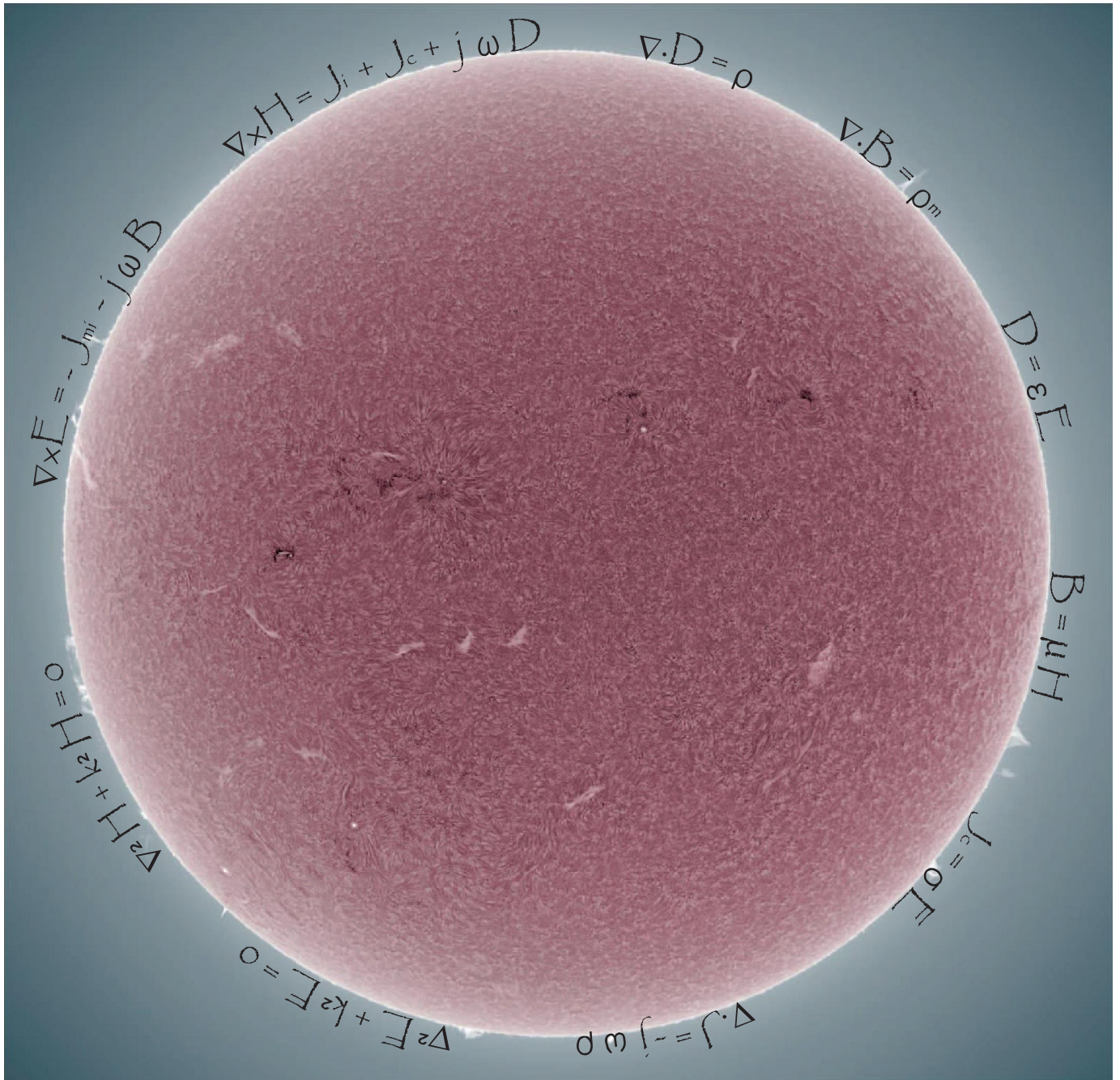


Fabrizio Frezza

Complementi di Campi Elettromagnetici



Elaborazione grafica della copertina a cura di Carlo Santini; si ringrazia Alan Friedman per l'immagine del Sole ivi riportata: © Alan Friedman/avertedimagination.com

Immagine della Carta di Smith in ultima pagina: By Wdwd (Own work)
CC-BY-SA-3.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0>), via Wikimedia Commons

Finito di stampare nel novembre 2013
Azeta Centrostampa
Roma, via della Polveriera 13 a

ISBN: 978-88-906495-1-6

Si ringraziano per la collaborazione i Colleghi: Alessandro Galli, Frank Silvio Marzano e Giuseppe Schettini. Si ringrazia inoltre Maurizio Fascetti per l'assistenza tecnica.

Siamo lieti che l'autore abbia gentilmente concesso
di offrire in download questo eccellente materiale presso
teoriadeisignali.it
dove è possibile trovare altre risorse su argomenti correlati

INDICE

Algebra e analisi vettoriale	pag. 5
Operatore nabla. Identità vettoriali	" 7
Coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche	" 12
Coefficienti metrici	" 17
Trasformazioni di coordinate: versori, componenti, prodotti	" 21
Operatori differenziali in coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche	" 32
Equazione di Poisson	" 41
Teorema di Helmholtz	" 50
Applicazione del teorema di Poynting ad un cavo coassiale in continua	" 54
Vettori complessi	" 61
Polarizzazione dei vettori	" 65
Scomposizione di una polarizzazione generica	" 70

L'ellisse di polarizzazione	" 73
Costanti secondarie dei mezzi. Costanti di fase e di attenuazione per onde piane uniformi. Perdite dei mezzi. Relazioni di Kramers-Kronig	" 76
Onde piane uniformi	" 85
Onde piane TE, TM e TEM	" 91
Vettore di Poynting per onde piane	" 93
Vettore di Poynting per incidenza normale di onde piane uniformi	" 96
Carta di Smith per le ammettenze	" 107
Adattamento con uno stub	" 111
Adattamento con doppio stub	" 114
Rapporto di onda stazionaria	" 117
BIBLIOGRAFIA	" 122

Algebra e analisi vettoriale

Algebra vettoriale

Il prodotto scalare è, come è noto, commutativo:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$$

Il prodotto vettoriale invece è anticommutativo:

$$\underline{A} \times \underline{B} = - \underline{B} \times \underline{A}$$

e non è associativo, per cui in generale:

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) \neq (\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C}$$

Si noti però che se $\underline{A} = \underline{C}$ si ha:

$$\underline{C} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{C} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{C} \times \underline{B} \times \underline{C}$$

In particolare se \underline{C} è un versore \underline{v}_0 si ha:

$$\underline{v}_0 \times \underline{B} \times \underline{v}_0 = \underline{B}_\perp$$

ove \underline{B}_\perp è la componente (vettoriale) di \underline{B} ortogonale a \underline{v}_0 .

La componente (vettoriale) parallela a \underline{v}_0 sarà $\underline{B}_\parallel = (\underline{B} \cdot \underline{v}_0)\underline{v}_0$. Si può quindi scrivere, per un qualsiasi vettore \underline{B} ed un qualsiasi versore \underline{v}_0 :

$$\underline{B} = \underline{v}_0 \times \underline{B} \times \underline{v}_0 + (\underline{B} \cdot \underline{v}_0) \underline{v}_0$$

Si ricordi infine che dalla $\underline{A} = \underline{B} \times \underline{C}$ segue sempre:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{A} \cdot \underline{C} = 0$$

anche per vettori complessi.

Permutazioni cicliche del prodotto misto:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{A}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B})$$

Scambio punto-croce:

$$\underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{A} \times \underline{B}) \cdot \underline{C}$$

Doppio prodotto vettoriale:

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})\underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B})\underline{C}$$

Si ha infine:

$$(\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}) \cdot (\underline{\mathbf{C}} \times \underline{\mathbf{D}}) = (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{D}}) - (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}}) (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}})$$

Infatti il primo membro si può vedere come un prodotto misto, nel quale si può scambiare il punto con la croce. Per cui:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} \cdot (\underline{\mathbf{C}} \times \underline{\mathbf{D}}) &= \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}} \times (\underline{\mathbf{C}} \times \underline{\mathbf{D}}) = \underline{\mathbf{A}} \cdot [(\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{D}})\underline{\mathbf{C}} - (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{D}}] = \\ &= (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{D}}) - (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}}) (\underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{C}}) \end{aligned}$$

ove si è applicata la regola del doppio prodotto vettoriale.

Analisi vettoriale

La formula per la derivata di un prodotto di funzioni di una variabile:

$$\frac{d}{dt} (fg) = \frac{df}{dt} g + f \frac{dg}{dt}$$

si estende anche al prodotto di una funzione scalare per una vettoriale:

$$\frac{d}{dt} (\varphi \underline{\mathbf{A}}) = \frac{d\varphi}{dt} \underline{\mathbf{A}} + \varphi \frac{d\underline{\mathbf{A}}}{dt}$$

al prodotto scalare:

$$\frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{B}}) = \frac{d\underline{\mathbf{A}}}{dt} \cdot \underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{A}} \cdot \frac{d\underline{\mathbf{B}}}{dt}$$

e al prodotto vettoriale:

$$\frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}}) = \frac{d\underline{\mathbf{A}}}{dt} \times \underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{A}} \times \frac{d\underline{\mathbf{B}}}{dt}$$

Attenzione al fatto che qui è importante l'ordine dei fattori.

Si definisce poi il differenziale totale di un vettore $\underline{\mathbf{A}}(q_1, q_2, q_3)$ in perfetta analogia:

$$d\underline{\mathbf{A}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \underline{\mathbf{A}}}{\partial q_3} dq_3$$

Operatore nabla. Identità vettoriali

Nabla è un operatore lineare, per cui:

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$$

$$\nabla \cdot (\underline{A} + \underline{B}) = \nabla \cdot \underline{A} + \nabla \cdot \underline{B}$$

$$\nabla \times (\underline{A} + \underline{B}) = \nabla \times \underline{A} + \nabla \times \underline{B}$$

Si considerano ora alcune identità vettoriali di uso frequente.

$$1) \quad \nabla(\varphi\psi) = \varphi \nabla\psi + \psi \nabla\varphi$$

del tutto analoga alla regola di derivazione di un prodotto.

La dimostrazione si può fare per semplicità passando attraverso le coordinate cartesiane, con la definizione:

$$\nabla = \underline{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \underline{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \underline{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

ma il risultato che si raggiunge è valido in generale.

$$2) \quad \nabla \cdot (\varphi \underline{A}) = \nabla\varphi \cdot \underline{A} + \varphi \nabla \cdot \underline{A}$$

Per ricavarla, si può pensare di applicare simbolicamente la regola di derivazione di un prodotto. Si ha:

$$\nabla \cdot (\varphi \underline{A}) = \nabla_{\varphi} \cdot (\varphi \underline{A}) + \nabla_{\underline{A}} \cdot (\varphi \underline{A})$$

ove ∇_{φ} opera solo su φ e $\nabla_{\underline{A}}$ solo su \underline{A} .

D'altra parte, per un generico vettore \underline{C} si ha:

$$\underline{C} \cdot (\varphi \underline{A}) = \underline{C} \varphi \cdot \underline{A} = \varphi \underline{C} \cdot \underline{A}$$

Sostituendo ora al vettore \underline{C} l'operatore ∇ e ricordando che il ∇ deve avere a destra la quantità su cui opera si ha:

$$\nabla_{\varphi} \cdot (\varphi \underline{A}) = \nabla \varphi \cdot \underline{A}$$

$$\nabla_{\underline{A}} \cdot (\varphi \underline{A}) = \varphi \nabla \cdot \underline{A}$$

Ne segue allora:

$$\nabla \cdot (\varphi \underline{A}) = \nabla\varphi \cdot \underline{A} + \varphi \nabla \cdot \underline{A}$$

$$3) \quad \nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{B}$$

anche qui si può porre:

$$\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \nabla_{\underline{A}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) + \nabla_{\underline{B}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B})$$

ove il $\nabla_{\underline{A}}$ opera solo sul vettore \underline{A} e il $\nabla_{\underline{B}}$ solo sul vettore \underline{B} .

Per un generico vettore \underline{C} si ha peraltro:

$$\underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \underline{C} \times \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{B} \times \underline{C} = - \underline{A} \cdot \underline{C} \times \underline{B}$$

Sostituendo l'operatore nabla si ha per confronto:

$$\nabla_{\underline{A}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A}$$

$$\nabla_{\underline{B}} \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{B}$$

Per cui:

$$\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \cdot (\nabla \times \underline{B})$$

$$4) \quad \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A}$$

Ricordando la formula:

$$\underline{C} \times (\underline{C} \times \underline{A}) = \underline{C}(\underline{C} \cdot \underline{A}) - (\underline{C} \cdot \underline{C})\underline{A}$$

sostituendo il ∇ si ottiene:

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A}$$

Attenzione alla differenza fra l'operatore di Laplace che opera su una funzione scalare, definito come la divergenza del gradiente, e l'operatore di Laplace su una funzione vettoriale, definito appunto dalla:

$$\nabla^2 \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$$

Il primo ($\nabla^2 \varphi$) è uno scalare, il secondo ($\nabla^2 \underline{A}$) un vettore, e soltanto in coordinate cartesiane è vero che il laplaciano vettoriale ha come componenti i laplaciani scalari delle componenti. Ossia:

$$\nabla^2 \underline{A} = \underline{x}_0 \nabla^2 A_x + \underline{y}_0 \nabla^2 A_y + \underline{z}_0 \nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial z^2}$$

$$5) \quad \nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad \text{rot grad } \varphi = 0$$

Simbolicamente si tratta del prodotto vettoriale tra due vettori paralleli, che è nullo: $\underline{C} \times \underline{C} \varphi = 0$. Peraltro si può dimostrare passando attraverso le coordinate cartesiane (per semplicità, ma il risultato che si ottiene ha valore in generale). Si ha:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{x}_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \right) + \underline{y}_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \right) + \underline{z}_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

tenendo conto del teorema di Schwarz di inversione dell'ordine di derivazione.

$$6) \quad \nabla \cdot \nabla \times \underline{A} = 0 \quad \text{div rot } \underline{A} = 0$$

Simbolicamente il prodotto vettore $\nabla \times \underline{A}$ è ortogonale ad entrambi i fattori, per cui il prodotto scalare è nullo:

$$\underline{C} \cdot \underline{C} \times \underline{A} = 0$$

In coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla \times \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{x}_0 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \underline{y}_0 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \underline{z}_0 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Per cui:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \times \underline{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = 0\end{aligned}$$

sempre per il teorema di Schwarz.

$$7) \quad \nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi$$

E' un caso particolare della 2), ossia di $\nabla \cdot (\varphi \underline{A})$, con $\underline{A} = \nabla \psi$. Si ha pertanto:

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla \cdot \nabla \psi = \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \nabla^2 \psi$$

Attenzione al fatto che le identità vettoriali sono valide solo per funzioni continue, e con derivate parziali (esistenti e) continue fino all'ordine utilizzato.

Si ricordi in proposito (Analisi I) che, **diversamente dal caso di funzioni di una variabile, per funzioni di più variabili l'esistenza in un punto di tutte le derivate parziali non implica la continuità della funzione nel punto stesso. Per implicarlo tali derivate devono essere continue. Inoltre il teorema di Schwarz vale solo se le derivate scambiate sono continue.**

Ad esempio, con riferimento all'identità $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, si consideri la seguente funzione:

$$\varphi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \quad (\text{punti dell'asse } z) \end{cases}$$

Tale funzione è continua $\forall (x, y, z)$.

Inoltre le derivate parziali prime $\varphi_x(x, y)$, $\varphi_y(x, y)$ e $\varphi_z = 0$ sono continue $\forall (x, y, z)$.

Si ha:

$$\nabla \times \nabla \varphi = \begin{vmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \varphi_x & \varphi_y & 0 \end{vmatrix} = \underline{z}_0 (\varphi_{yx} - \varphi_{xy}) \quad .$$

Le derivate parziali seconde $\varphi_{xy}(x,y)$ e $\varphi_{yx}(x,y)$ sono continue $\forall (x,y) \neq (0,0)$, ma non sono continue sull'asse z . Per cui il teorema di Schwarz sull'asse z non vale, e infatti sull'asse z si ha: $\varphi_{xy} = -1$ e $\varphi_{yx} = 1 \neq \varphi_{xy}$, per cui sull'asse z $\nabla \times \nabla \varphi = \underline{z}_0 2 \neq 0$.

Coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche

Nella risoluzione di particolari problemi l'uso delle coordinate cartesiane non è sempre il più conveniente, ed in generale è opportuno scegliere il sistema di coordinate in modo che esso si adatti bene alle caratteristiche geometriche della struttura in studio. Per esempio, se si tratta di un parallelepipedo si adopererà un sistema cartesiano, se si considera un cilindro circolare si useranno coordinate cilindriche, se si considera una sfera si useranno coordinate sferiche.

Generalmente le equazioni differenziali sono più facili da risolvere in coordinate cartesiane, ma le condizioni al contorno sono più semplici da esprimere nel sistema che meglio si adatta alla struttura geometrica.

Ad esempio una superficie cilindrica o sferica ha equazioni molto semplici in coordinate cilindriche o sferiche, mentre in coordinate cartesiane le espressioni sono relativamente complicate.

Più in generale si possono definire le cosiddette coordinate curvilinee ortogonali. Un sistema di coordinate curvilinee è definito, con riferimento ad un sistema cartesiano, da tre funzioni del tipo:

$$q_1 = q_1(x, y, z)$$

$$q_2 = q_2(x, y, z)$$

$$q_3 = q_3(x, y, z)$$

Le funzioni stabiliscano (sotto opportune condizioni, vedi Analisi II) una corrispondenza biunivoca, per cui ad ogni terna (x, y, z) corrisponda una ed una sola terna (q_1, q_2, q_3) e viceversa.

Si definiscono poi le cosiddette superfici coordinate, rappresentate dalle equazioni:

$$q_1(x, y, z) = c_1$$

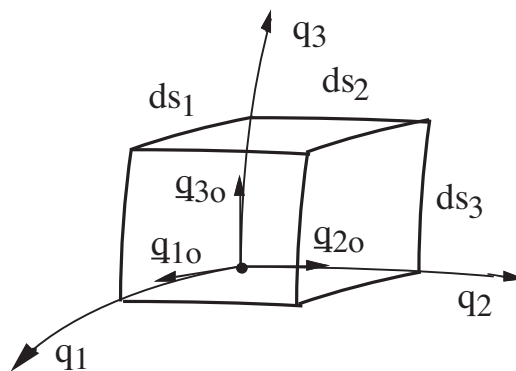
$$q_2(x, y, z) = c_2$$

$$q_3(x, y, z) = c_3$$

equazioni che rappresentano delle superfici generiche che si intersecano nel punto di coordinate curvilinee (c_1, c_2, c_3) . Su una superficie coordinata variano solo due coordinate.

Si definiscono le cosiddette linee coordinate, date dall'intersezione di due superfici coordinate. Lungo tali linee varia solo una coordinata.

Sono infine definiti i versori fondamentali \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} e \underline{q}_{30} che sono nel punto generico P tangenti alle tre linee coordinate passanti per P.



$$\underline{q}_{10} = \underline{q}_{10}(P) = \underline{q}_{10}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\underline{q}_{20} = \underline{q}_{20}(P) = \underline{q}_{20}(q_1, q_2, q_3)$$

$$\underline{q}_{30} = \underline{q}_{30}(P) = \underline{q}_{30}(q_1, q_2, q_3)$$

I versori dunque sono in generale delle funzioni di punto, cioè da punto a punto la loro direzione e il loro verso variano. Questo a differenza

Valgono inoltre le formule inverse:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Le superfici coordinate sono dei cilindri a sezione circolare aventi per asse l'asse z ($\rho = \text{cost}$), dei semipiani per l'asse z ($\varphi = \text{cost}$) e dei piani ortogonali all'asse z ($z = \text{cost}$).

Infine si considerano le coordinate sferiche (o polari nello spazio) r, θ (detta elevazione o colatitudine) e φ , con:

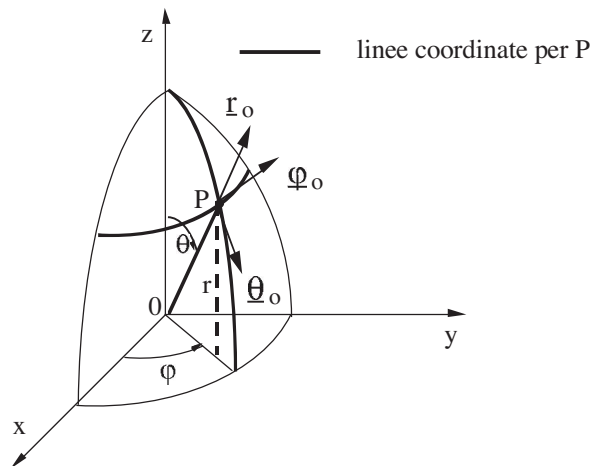
$$q_1 = r; \quad q_2 = \theta; \quad q_3 = \varphi$$

ove si ha:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad ; \quad \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad ; \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$0 \leq r < +\infty \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

(come in coordinate cilindriche)



Valgono poi le formule inverse (si noti che $\rho = r \sin\theta$):

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Le superfici coordinate sono delle sfere con centro nell' origine ($r=\text{cost}$), dei coni aventi per asse l'asse z ($\theta=\text{cost}$) e dei semipiani per l'asse z ($\varphi=\text{cost}$).

Attenzione infine al fatto che nell'origine i versori $\underline{\rho}_0$ e $\underline{\varphi}_0$, in coordinate cilindriche, e i versori \underline{r}_0 , $\underline{\theta}_0$ e $\underline{\varphi}_0$ in coordinate sferiche non sono definiti. Per cui in questi sistemi non ha senso pensare i vettori applicati nell'origine.

Coefficienti metrici

In un sistema di coordinate ortogonale generico, se si incrementa la coordinata q_1 di un dq_1 , senza cambiare le altre due, il punto P si sposterà lungo la corrispondente linea coordinata di un arco la cui lunghezza ds_1 in generale non sarà uguale a dq_1 (come avviene in coordinate cartesiane), ma sarà ad esso proporzionale. Si potrà porre (cfr. figura a pag. 13):

$$ds_1 = h_1 dq_1$$

$$ds_2 = h_2 dq_2$$

$$ds_3 = h_3 dq_3$$

$$h_i = \frac{\partial s_i}{\partial q_i} \quad i=1,2,3$$

Ad esempio in coordinate cilindriche, se ci si sposta di un $d\varphi$ lungo una circonferenza ortogonale all'asse z e con centro sull'asse (linea coordinata lungo la quale varia solo φ), l'arco che si percorre è lungo $ds_2 = \rho d\varphi$, e $h_2 = \rho$. In coordinate sferiche lo stesso arco è $ds_3 = r \sin\theta d\varphi$, e $h_3 = r \sin\theta$.

I coefficienti h_1, h_2, h_3 , detti coefficienti metrici, saranno in generale funzione di q_1, q_2, q_3 .

Per lo spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ si ha:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_{10} ds_1 + \mathbf{a}_{20} ds_2 + \mathbf{a}_{30} ds_3 = \mathbf{a}_{10} h_1 dq_1 + \mathbf{a}_{20} h_2 dq_2 + \mathbf{a}_{30} h_3 dq_3$$

Per cui, ricordando anche l'espressione del differenziale totale:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3$$

si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = h_1 \mathbf{a}_{10} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = h_2 \mathbf{a}_{20} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = h_3 \mathbf{a}_{30}$$

ossia:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_i} = h_i \underline{q}_{i0} \quad i=1,2,3$$

Dunque esprimendo il vettore posizione \underline{r} in coordinate cartesiane:

$$h_i \underline{q}_{i0} = x_0 \frac{\partial x}{\partial q_i} + y_0 \frac{\partial y}{\partial q_i} + z_0 \frac{\partial z}{\partial q_i} \quad i=1,2,3$$

Allora il modulo h_i del vettore $h_i \underline{q}_{i0}$ sarà dato dalla:

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = \frac{\partial s_i}{\partial q_i} \quad i=1,2,3$$

Questo risultato coincide con le formule per l'ascissa curvilinea (Analisi I).

In coordinate cartesiane si ha banalmente:

$$h_1=1 \quad h_2=1 \quad h_3=1.$$

In coordinate cilindriche si ha invece:

$$h_1=1 \quad h_2=\rho \quad h_3=1.$$

Infatti applicando la formula precedente:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-\rho \sin \varphi)^2 + (\rho \cos \varphi)^2} = \rho$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1$$

In coordinate sferiche:

$$h_1=1 \quad h_2=r \quad h_3=r \sin \theta.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{(\sin \theta \cos \varphi)^2 + (\sin \theta \sin \varphi)^2 + \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(r \cos \theta \cos \varphi)^2 + (r \cos \theta \sin \varphi)^2 + (-r \sin \theta)^2} = \\
&= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r \\
h_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \sin \theta \cos \varphi)^2} = \\
&= r \sin \theta
\end{aligned}$$

L'elemento di volume dV in coordinate ortogonali generiche sarà:

$$dV = ds_1 ds_2 ds_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$$

Una tale espressione va adoperata quando si risolve un integrale di volume in un sistema di coordinate generico, $\int_V f(q_1, q_2, q_3) dV$.

In coordinate cartesiane banalmente si avrà $dV = dx dy dz$.

In coordinate cilindriche: $dV = \rho d\rho d\varphi dz$.

In coordinate sferiche: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$.

Per quanto riguarda gli elementi di area dS , nel calcolo degli integrali di superficie, si ricordi che in coordinate polari nel piano si ha $dS = \rho d\rho d\varphi = h_1 h_2 dq_1 dq_2$.

Invece in coordinate sferiche si ha, su una sfera centrata nell'origine:

$$dS = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = h_2 h_3 dq_2 dq_3.$$

Si ricordi inoltre (dal corso di Analisi II) che l'elemento di volume dV poteva scriversi in termini del cosiddetto (determinante) jacobiano della trasformazione, definito dalla:

$$J(q_1, q_2, q_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

Si aveva infatti:

$$dV = |J(q_1, q_2, q_3)| dq_1 dq_2 dq_3$$

Dal confronto fra le due espressioni del dV risulta:

$$|J(q_1, q_2, q_3)| = h_1 h_2 h_3$$

D'altra parte, ricordando l'espressione del prodotto misto come determinante (in coordinate cartesiane):

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \times \underline{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

ne segue che:

$$J(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_3} = h_1 h_2 h_3 \underline{q}_{10} \cdot \underline{q}_{20} \times \underline{q}_{30}$$

Lo scalare $\underline{q}_{10} \cdot \underline{q}_{20} \times \underline{q}_{30}$ vale +1 se la terna è destra (come si è supposto), -1 se la terna è sinistra. Nel nostro caso si ha dunque:

$$J(q_1, q_2, q_3) = h_1 h_2 h_3$$

(la verifica può essere fatta in coordinate cilindriche o sferiche).

Si noti infine che l'esprimere l'elemento di volume dV per mezzo di un prodotto misto è in accordo col significato geometrico di tale prodotto (il modulo del prodotto misto è pari al volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori).

Trasformazioni di coordinate: versori, componenti, prodotti

Consideriamo ora le formule che esprimono i versori generici \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , \underline{q}_{30} in termini dei versori cartesiani \underline{x}_0 , \underline{y}_0 e \underline{z}_0 . Dalla relazione:

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1} = h_1 \underline{q}_{10}$$

segue che:

$$\underline{q}_{10} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_1}$$

per cui si ha:

$$\underline{q}_{10} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \underline{x}_0 + \frac{\partial y}{\partial q_1} \underline{y}_0 + \frac{\partial z}{\partial q_1} \underline{z}_0 \right)$$

e analogamente:

$$\underline{q}_{20} = \frac{1}{h_2} \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} \underline{x}_0 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \underline{y}_0 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \underline{z}_0 \right)$$

$$\underline{q}_{30} = \frac{1}{h_3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_3} \underline{x}_0 + \frac{\partial y}{\partial q_3} \underline{y}_0 + \frac{\partial z}{\partial q_3} \underline{z}_0 \right)$$

Le trasformazioni viste possono essere scritte simbolicamente in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

E' importante notare che in un sistema ortogonale la matrice di trasformazione [A] gode della proprietà che la sua inversa [A]⁻¹ coincide con la sua trasposta [A]^T. Del resto si noti che le righe di [A] (che sono le colonne di [A]^T) non sono altro, vista la formula precedente, che le componenti cartesiane dei versori \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , \underline{q}_{30} . Pertanto se si esegue il prodotto [A] [A]^T righe per colonne, si eseguono in realtà tutti i possibili

prodotti scalari fra i versori \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , \underline{q}_{30} mutuamente ortogonali. Quindi la matrice risultante avrà tutti gli elementi nulli, tranne quelli della diagonale principale che saranno pari a 1. Si tratta pertanto della matrice unitaria [I].

Espressioni particolari si possono ottenere per i versori $\underline{\rho}_0$, $\underline{\varphi}_0$, \underline{z}_0 in coordinate cilindriche, e per \underline{r}_0 , $\underline{\theta}_0$, $\underline{\varphi}_0$ in coordinate sferiche, sostituendo le espressioni opportune per le coordinate e per i coefficienti metrici.

In coordinate cilindriche, eseguendo i calcoli:

$$\begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = [A_c] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\underline{\rho}_0 = \cos \varphi \underline{x}_0 + \sin \varphi \underline{y}_0$$

$$\underline{\varphi}_0 = -\sin \varphi \underline{x}_0 + \cos \varphi \underline{y}_0$$

$$\underline{z}_0 = \underline{z}_0$$

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = [A_s] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

(la terza riga doveva essere uguale alla seconda delle coordinate cilindriche).

Ossia:

$$\underline{r}_0 = \sin \theta \cos \varphi \underline{x}_0 + \sin \theta \sin \varphi \underline{y}_0 + \cos \theta \underline{z}_0$$

$$\underline{\theta}_0 = \cos \theta \cos \varphi \underline{x}_0 + \cos \theta \sin \varphi \underline{y}_0 - \sin \theta \underline{z}_0$$

$$\underline{\varphi}_0 = -\sin \varphi \underline{x}_0 + \cos \varphi \underline{y}_0$$

Per ottenere le trasformazioni inverse, ossia per esprimere i versori cartesiani \underline{x}_0 , \underline{y}_0 , \underline{z}_0 in termini dei versori generici \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , \underline{q}_{30} è necessario invertire la matrice vista. Come già visto, però, per tale matrice l'inversa

coincide con la trasposta (proprietà di unitarietà, caratteristica delle matrici che in uno spazio vettoriale trasformano una base ortonormale, cioè costituita da versori mutuamente ortogonali, in un'altra ortonormale). Si ha dunque, trasponendo:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = [A]^T \begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \underline{x}_0 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} \underline{q}_{10} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} \underline{q}_{20} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \underline{q}_{30} \\ \underline{y}_0 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} \underline{q}_{10} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} \underline{q}_{20} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \underline{q}_{30} \\ \underline{z}_0 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \underline{q}_{10} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \underline{q}_{20} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \underline{q}_{30} \end{aligned}$$

Particolarizzando alle coordinate cilindriche si ha:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = [A_c]^T \begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x}_0 = \cos \varphi \underline{\rho}_0 - \sin \varphi \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{y}_0 = \sin \varphi \underline{\rho}_0 + \cos \varphi \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{z}_0 = \underline{z}_0$$

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix} = [A_s]^T \begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix}$$

ossia:

$$\underline{x}_0 = \sin \theta \cos \varphi \underline{r}_0 + \cos \theta \cos \varphi \underline{\theta}_0 - \sin \varphi \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{y}_0 = \sin \theta \sin \varphi \underline{r}_0 + \cos \theta \sin \varphi \underline{\theta}_0 + \cos \varphi \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{z}_0 = \cos \theta \underline{r}_0 - \sin \theta \underline{\theta}_0$$

Per completezza si può considerare la trasformazione che permette di passare dai versori in coordinate cilindriche a quelli in coordinate sferiche.

Si può ad esempio passare attraverso le coordinate cartesiane. Si ha infatti:

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = [\underline{A}_s] [\underline{A}_c]^T \begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

(questa terza riga era evidente).

Trasponendo si ha la trasformazione inversa:

$$\begin{pmatrix} \underline{\rho}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{r}_0 \\ \underline{\theta}_0 \\ \underline{\varphi}_0 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni dei versori possono essere utilizzate per vedere come cambiano le componenti di un generico vettore \underline{A} , nel passaggio da un sistema di coordinate ad un altro. Essendo, come già visto, i versori delle funzioni di punto, tale vettore dovrà essere pensato sempre applicato in un ben preciso punto P. Del resto i vettori che si considerano in questo

corso sono in generale campi vettoriali funzioni di punto, e quindi è ben naturale applicarli nel punto cui si riferiscono.

In un sistema cartesiano si ha:

$$\underline{A} = A_x \underline{x}_0 + A_y \underline{y}_0 + A_z \underline{z}_0$$

mentre in un generico sistema curvilineo si scriverà:

$$\underline{A} = A_1 \underline{q}_{10} + A_2 \underline{q}_{20} + A_3 \underline{q}_{30}$$

Con simbolismo matriciale si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} [A]^T \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ q_{30} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dal confronto segue:

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} [A]^T$$

Per passare ai vettori colonna si devono trasporre i due membri, ricordando che se $[B] = [C] [D]$, ne segue $[B]^T = [D]^T [C]^T$. Per cui:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Si noti che la trasformazione coincide con quella usata per i versori.

In particolare in coordinate cilindriche si ha:

$$\underline{A} = A_\rho \underline{\rho}_0 + A_\phi \underline{\phi}_0 + A_z \underline{z}_0$$

ove:

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = [A_c] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

In coordinate sferiche si ha:

$$\underline{A} = A_r \underline{r}_0 + A_\theta \underline{\theta}_0 + A_\varphi \underline{\varphi}_0$$

ove:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = [A_s] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

(la terza riga doveva essere uguale alla seconda in coordinate cilindriche).

In modo analogo si può passare dalle componenti in coordinate cilindriche a quelle in coordinate sferiche.

Le varie trasformazioni inverse si ottengono trasponendo le matrici.

Si noti dagli esempi visti che in un sistema di coordinate curvilinee generico le componenti di uno stesso vettore dipendono dal punto di applicazione, mentre in coordinate cartesiane esse sono delle costanti.

Come esempio si consideri il vettore posizione \underline{r} , che in coordinate cartesiane ha l'espressione:

$$\underline{r} = x \underline{x}_0 + y \underline{y}_0 + z \underline{z}_0$$

In coordinate curvilinee generiche sarà:

$$\underline{r} = r_1 \underline{q}_{10} + r_2 \underline{q}_{20} + r_3 \underline{q}_{30}$$

ove però \underline{r} è pensato applicato nel punto P cui si riferisce, e non nell'origine, dove i versori non sono in generale definiti.

Si ha:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In particolare in coordinate cilindriche:

$$\begin{pmatrix} r_\rho \\ r_\varphi \\ r_z \end{pmatrix} = [A_c] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi \\ -\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \sin \varphi \cos \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

per cui $\underline{r} = \rho \underline{\rho}_0 + z \underline{z}_0$, come doveva essere.

In coordinate sferiche:

$$\begin{pmatrix} r_r \\ r_\theta \\ r_\varphi \end{pmatrix} = [A_s] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r \cos^2 \theta \\ r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi - r \sin \theta \cos \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} r \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta \\ r \sin \theta \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per cui $\underline{r} = r \underline{r}_0$ come doveva essere.

Si elencano ora **i sistemi di coordinate curvilinee ortogonali nei quali l'equazione di Helmholtz è risolvibile per separazione di variabili:**

- 1) coordinate cartesiane ortogonali;
- 2) coordinate cilindriche circolari;
- 3) coordinate cilindriche ellittiche;
- 4) coordinate cilindriche paraboliche;
- 5) coordinate paraboliche di rotazione;
- 6) coordinate paraboloidali;
- 7) coordinate sferiche;
- 8) coordinate sferoidali prolate;

- 9) coordinate sferoidali oblate;
- 10) coordinate coniche;
- 11) coordinate ellissoidali.

Quest'ultimo caso comprende come sottocasi tutti i precedenti.

In un sistema di coordinate curvilinee ortogonali generico il prodotto scalare si esegue nello stesso modo che in coordinate cartesiane (somma di prodotti di componenti omonime), e si ottiene sempre lo stesso risultato, come deve essere per coerenza. Considerando infatti i vettori:

$$\underline{A} = A_1\underline{q}_{10} + A_2\underline{q}_{20} + A_3\underline{q}_{30}$$

$$\underline{B} = B_1\underline{q}_{10} + B_2\underline{q}_{20} + B_3\underline{q}_{30}$$

si ha:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_1\underline{q}_{10} + A_2\underline{q}_{20} + A_3\underline{q}_{30}) \cdot (B_1\underline{q}_{10} + B_2\underline{q}_{20} + B_3\underline{q}_{30}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

per la proprietà distributiva del prodotto scalare, e la mutua ortogonalità fra i versori. In termini matriciali:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = (A_1 A_2 A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

In particolare si ha in coordinate cilindriche:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$$

e in coordinate sferiche:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$$

Ricordando ora la matrice di trasformazione delle componenti, tale che:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

e ricordando la regola di trasposizione del prodotto fra due matrici, per cui:

$$(A_1 A_2 A_3) = (A_x A_y A_z) [A]^T$$

si ha infine per il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} (A_1 A_2 A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} &= (A_x A_y A_z) [A]^T [A] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = (A_x A_y A_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

essendo $[A]^T = [A]^{-1}$, per cui il prodotto $[A]^T [A]$ dà la matrice unitaria. Si è dunque ottenuto lo stesso valore del prodotto scalare in coordinate cartesiane, come doveva essere.

Del resto al prodotto scalare è legata la definizione stessa di modulo di un vettore. Si ha infatti, se \underline{A} è un vettore reale (cioè le cui componenti sono numeri reali):

$$|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Attenzione al fatto che tale definizione non si estende automaticamente al caso dei vettori complessi.

Per quanto riguarda il prodotto vettoriale, si eseguirà anch'esso allo stesso modo, ossia:

$$\begin{aligned} \underline{A} \times \underline{B} &= (A_1 \underline{q}_{10} + A_2 \underline{q}_{20} + A_3 \underline{q}_{30}) \times (B_1 \underline{q}_{10} + B_2 \underline{q}_{20} + B_3 \underline{q}_{30}) = \\ &= \begin{vmatrix} \underline{q}_{10} & \underline{q}_{20} & \underline{q}_{30} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

poiché \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , \underline{q}_{30} sono una terna destra di versori ortogonali.

In particolare si ha in coordinate cilindriche:

$$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \rho_0 & \varphi_0 & z_0 \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix}$$

e in coordinate sferiche:

$$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} r_0 & \theta_0 & \varphi_0 \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix}$$

Per verificare l'invarianza del risultato ottenuto, si ricordi la proprietà che **una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso valore del determinante**, per cui si ha:

$$\underline{\mathbf{A}} \times \underline{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \underline{q}_{10} & A_1 & B_1 \\ \underline{q}_{20} & A_2 & B_2 \\ \underline{q}_{30} & A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

Osservando ora le colonne di tale matrice e ricordando le formule di trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

ne segue che per l'intera matrice si ha:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{10} & A_1 & B_1 \\ \underline{q}_{20} & A_2 & B_2 \\ \underline{q}_{30} & A_3 & B_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 & A_x & B_x \\ \underline{y}_0 & A_y & B_y \\ \underline{z}_0 & A_z & B_z \end{pmatrix}$$

Passando ai determinanti, ricordando che **il determinante di un prodotto è pari al prodotto dei determinanti**, si ha:

$$\begin{vmatrix} \underline{q}_{10} & A_1 & B_1 \\ \underline{q}_{20} & A_2 & B_2 \\ \underline{q}_{30} & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = \det[A] \begin{vmatrix} \underline{x}_0 & A_x & B_x \\ \underline{y}_0 & A_y & B_y \\ \underline{z}_0 & A_z & B_z \end{vmatrix} = \det[A] \begin{vmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Per quanto riguarda il determinante di $[A]$, si osservi che dalla proprietà $[A]^T = [A]^{-1}$ segue che $\det[A]^T = \det[A]^{-1}$, ove però $\det[A]^T = \det[A]$, mentre $\det[A]^{-1} = 1/\det[A]$, essendo il determinante dell'inversa pari all'inverso del determinante. Risulta quindi che deve essere:

$$\det[A] = 1/\det[A], \text{ da cui } \{\det[A]\}^2 = 1, \det[A] = \pm 1.$$

Ricordando però la relazione di trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix}$$

si ha che le righe di $[A]$ non sono altro che le componenti cartesiane di \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , e \underline{q}_{30} rispettivamente. Pertanto il determinante di $[A]$ non è altro che il prodotto misto $\underline{q}_{10} \cdot \underline{q}_{20} \times \underline{q}_{30}$. Se allora la terna \underline{q}_{10} , \underline{q}_{20} , \underline{q}_{30} è destra (come si è ipotizzato) si ha $\det[A] = +1$, e segue l'invarianza della regola del prodotto vettoriale.

Dalle considerazioni precedenti segue infine anche la validità generale della regola del prodotto misto:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \times \underline{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

Operatori differenziali in coordinate curvilinee, cilindriche, sferiche

Si tratta ora di vedere quali sono le espressioni che i vari operatori differenziali introdotti assumono in coordinate curvilinee generalizzate, ed in particolare in coordinate cilindriche e sferiche. Si vedrà che tali espressioni sono abbastanza diverse da quelle per le coordinate cartesiane.

Un'espressione generale per l'operatore ∇ , che può essere usata per formare i vari prodotti, e quindi i vari operatori, è la seguente:

$$\begin{aligned}\nabla[] &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1} q_{10} [] \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2} q_{20} [] \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_3} q_{30} [] \right) \right] = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 q_{10} []) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 q_{20} []) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 q_{30} []) \right]\end{aligned}$$

Si presti attenzione alla regolarità nella distribuzione dei pedici.

Ricordando poi le espressioni particolari delle coordinate e dei coefficienti metrici si ottengono le formule per il caso cilindrico o sferico (o ovviamente cartesiano).

Un'espressione alternativa è la:

$$\nabla[] = \frac{q_{10}}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} [] + \frac{q_{20}}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} [] + \frac{q_{30}}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} []$$

equivalente alla precedente.

Nell'uso di queste formule occorre tener presente che, in coordinate curvilinee generalizzate, anche i versori devono essere derivati. Nel seguito si userà quella delle due espressioni che semplifica maggiormente i calcoli.

Applicando le formule precedenti è possibile ricavare le espressioni del gradiente, della divergenza, del rotore e del laplaciano in coordinate curvilinee generalizzate. Si ha nell'ordine:

$$\nabla f = \frac{q_{10}}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} + \frac{q_{20}}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} + \frac{q_{30}}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3}$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 q_{10} & h_2 q_{20} & h_3 q_{30} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{q_{10}}{h_2 h_3} & \frac{q_{20}}{h_3 h_1} & \frac{q_{30}}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{q_{10}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right] + \\ &+ \frac{q_{20}}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right] + \frac{q_{30}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right] \end{aligned}$$

Dunque la componente generica del rotore di un vettore dipende in generale dalle altre due componenti del vettore, ma non dipende dalla componente omonima.

Si ha infine per l'operatore di Laplace:

$$\begin{aligned} \nabla^2 [] &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_1^2} \frac{\partial}{\partial q_1} [] \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_2^2} \frac{\partial}{\partial q_2} [] \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_3^2} \frac{\partial}{\partial q_3} [] \right) \right] = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} [] \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} [] \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} [] \right) \right] \end{aligned}$$

La formula precedente è utilizzabile sia per il laplaciano applicato a uno scalare ($\nabla^2 f$), sia per quello applicato a un vettore ($\nabla^2 \underline{A}$). In questo ultimo caso si tenga però presente che i versori non sono in generale delle costanti e quindi vanno derivati.

Si riportano ora le formule per le coordinate cilindriche ($h_1=1$, $h_2=\rho$, $h_3=1$):

$$\nabla f = \rho_0 \frac{\partial f}{\partial \rho} + \varphi_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \underline{A} = \begin{vmatrix} \frac{\rho_0}{\rho} & \varphi_0 & \frac{z_0}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{\rho_0}{\rho} \left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_\varphi) \right] + \varphi_0 \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + \frac{z_0}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] =$$

$$= \rho_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right] + \varphi_0 \left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right] + z_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Espressione analoga per $\nabla^2 \underline{A}$, con \underline{A} in luogo di f . Mediante alcune manipolazioni si può anche ottenere l'espressione:

$$\nabla^2 \underline{A} = \rho_0 \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \varphi_0 \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) + z_0 (\nabla^2 A_z)$$

Si noti come le componenti del laplaciano di un vettore non coincidano in generale con i laplaciani delle componenti, come avviene in coordinate cartesiane, per cui bisogna prestare attenzione quando si proietta un'equazione in cui compaia $\nabla^2 \underline{A}$ (ad esempio l'equazione di Helmholtz) in coordinate generiche.

Passando al caso sferico ($h_1=1, h_2=r, h_3=r \sin\theta$) si ha:

$$\nabla f = \underline{r}_0 \frac{\partial f}{\partial r} + \underline{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \underline{\varphi}_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{A} &= \begin{vmatrix} \underline{r}_0 & \underline{\theta}_0 & \underline{\varphi}_0 \\ r^2 \sin\theta & r \sin\theta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \\
&= \frac{\underline{r}_0}{r^2 \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right] + \frac{\underline{\theta}_0}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta A_\varphi) \right] + \frac{\underline{\varphi}_0}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] = \\
&= \frac{\underline{r}_0}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\theta \right] + \frac{\underline{\theta}_0}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \frac{\underline{\varphi}_0}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \\
\nabla^2 f &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

Espressione analoga per \underline{A} , con \underline{A} in luogo di f . Oppure, con alcune manipolazioni, si ottiene l'espressione:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \underline{A} &= \underline{r}_0 \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2A_\theta}{r^2 \tan\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\
&+ \underline{\theta}_0 \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin\theta \tan\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \\
&+ \underline{\varphi}_0 \left(\nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{(r \sin\theta)^2} + \frac{2}{r^2 \sin\theta \tan\theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right)
\end{aligned}$$

Come si è detto, i versori in coordinate cartesiane sono delle costanti, per cui:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \underline{x}_0 &= \nabla \cdot \underline{y}_0 = \nabla \cdot \underline{z}_0 = 0 \\
\nabla \times \underline{x}_0 &= \nabla \times \underline{y}_0 = \nabla \times \underline{z}_0 = 0 \\
\nabla^2 \underline{x}_0 &= \nabla^2 \underline{y}_0 = \nabla^2 \underline{z}_0 = 0
\end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\nabla x = \underline{x}_0 \quad \nabla y = \underline{y}_0 \quad \nabla z = \underline{z}_0$$

Con queste formule si può verificare la relazione di trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{y}_0 \\ \underline{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix} = [A]^T \begin{pmatrix} \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{20} \\ \underline{q}_{30} \end{pmatrix}$$

Infatti per ottenere \underline{x}_0 , \underline{y}_0 e \underline{z}_0 non si fa altro che sfruttare le espressioni di ∇x , ∇y , e ∇z in coordinate generiche.

Si ha inoltre:

$$\nabla^2 x = \nabla^2 y = \nabla^2 z = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\nabla \times \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{x}_0 & \underline{y}_0 & \underline{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \underline{x}_0 \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \underline{y}_0 \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \underline{z}_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0$$

Queste due formule si potevano vedere in coordinate sferiche, per cui ad esempio:

$$\nabla \cdot \underline{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{1}{r^2} 3r^2 = 3$$

In coordinate sferiche si vede anche la $\nabla \times \underline{r}_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla r &= \underline{x}_0 \frac{\partial r}{\partial x} + \underline{y}_0 \frac{\partial r}{\partial y} + \underline{z}_0 \frac{\partial r}{\partial z} = \underline{x}_0 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \underline{y}_0 \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \underline{z}_0 \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \\ &= \frac{\underline{x}_0 x + \underline{y}_0 y + \underline{z}_0 z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{r}_0 \end{aligned}$$

(più semplicemente si poteva vedere in coordinate sferiche).

Ragionando in coordinate sferiche si possono poi dimostrare altre relazioni:

$$\nabla^2 r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{1}{r^2} 2r = \frac{2}{r}$$

oppure anche:

$$\nabla^2 r = \nabla \cdot \nabla r = \nabla \cdot \underline{r}_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{2}{r}$$

Si ha poi:

$$\nabla^2 \underline{r} = \underline{r}_0 \left(\nabla^2 r - \frac{2r}{r^2} \right) = \underline{r}_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{2}{r} \right) = 0$$

mentre invece:

$$\nabla^2 \underline{r}_0 = \underline{r}_0 \left(-\frac{2}{r^2} \right) \neq 0$$

Inoltre:

$$\nabla r^n = \underline{r}_0 \frac{\partial (r^n)}{\partial r} = n r^{n-1} \underline{r}_0 = n r^{n-1} \nabla r$$

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \underline{r}_0 \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} = -\underline{r}_0 \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r^2} \nabla r$$

Queste ultime due formule sono dei casi particolari di una proprietà più generale del **gradiente di funzioni composte:**

$$\nabla \{ f [\xi(q_1, q_2, q_3)] \} = \frac{df}{d\xi} \nabla \xi$$

(per esempio, per mezzi non omogenei: $\nabla(\ln \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon$.)

Una proprietà analoga vale per la divergenza:

$$\nabla \cdot \left\{ \underline{A} [\xi(q_1, q_2, q_3)] \right\} = \frac{d\underline{A}}{d\xi} \cdot \nabla \xi$$

Si ha invece per il rotore:

$$\nabla \times \left\{ \underline{A} [\xi (q_1, q_2, q_3)] \right\} = \nabla \xi \times \frac{d\underline{A}}{d\xi}$$

(in questo caso è importante l'ordine dei fattori).

Tali proprietà sono facilmente dimostrabili in coordinate cartesiane. **Si**

ha poi (coordinate sferiche):

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r^2} r^2 \right) = 0 \quad (\text{per } r \neq 0)$$

Quest'ultima formula si può scrivere in modo più completo facendo uso della **funzione (o meglio distribuzione) di Dirac tridimensionale (in coordinate cartesiane):**

$\delta(\underline{r}) = \delta(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$, detta anche impulso matematico. Tale funzione gode delle proprietà:

$$\delta(\underline{r}) = 0 \quad \text{per } \underline{r} \neq 0;$$

$$\int_V \delta(\underline{r}) dV = \begin{cases} 1 & \text{se l'origine appartiene a } V \\ 0 & \text{se l'origine non appartiene a } V \end{cases}$$

Introducendo poi un altro vettore posizione \underline{r}' si ha:

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

con:

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') = 0 \quad \text{per } \underline{r} \neq \underline{r}'$$

$$\int_V \delta(\underline{r} - \underline{r}') dV = \begin{cases} 1 & \text{se } \underline{r}' \in V \\ 0 & \text{se } \underline{r}' \notin V \end{cases}$$

Vale inoltre la proprietà, considerata una generica funzione $f(\underline{r})$:

$$\int_V f(\underline{r}) \delta(\underline{r} - \underline{r}') dV = \begin{cases} f(\underline{r}') & \text{se } \underline{r}' \text{ appartiene a } V \\ 0 & \text{se } \underline{r}' \text{ non appartiene a } V \end{cases}$$

La relazione cercata è:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\underline{r})$$

Si può verificare infatti che, preso un volume sferico V centrato nell'origine e di raggio a , si ha:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = -4\pi$$

Infatti:

$$\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = \int_V \nabla \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dV = \text{(applicando il teorema della divergenza)}$$

$$= \oint_S \underline{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS = \text{(derivata secondo una direzione)}$$

$$= \oint_S \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS \text{ (coincidendo la direzione normale con quella radiale) =}$$

$$= \oint_S -\frac{1}{r^2} dS = -\frac{1}{a^2} \oint_S dS \text{ (essendo } r \text{ costante sulla sfera, e pari ad } a \text{) =}$$

$$= -\frac{1}{a^2} 4\pi a^2 = -4\pi$$

Più in generale si ha la formula:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -4\pi \delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Si è visto che in coordinate generiche i versori non sono in generale delle costanti (per cui le loro derivate non sono in generale nulle). Per individuare un vettore è necessario quindi precisarne anche il punto di applicazione, e si hanno due terne di numeri: le coordinate del punto di applicazione e le componenti del vettore.

Ulteriori relazioni in coordinate sferiche:

$$\nabla \cdot \underline{\theta}_0 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta) = \frac{1}{r \sin \theta} \cos \theta = \frac{1}{r \tan \theta}$$

$$\nabla \times \underline{\theta}_0 = \underline{\varphi}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r) = \underline{\varphi}_0 \frac{1}{r}$$

$$\nabla \theta = \underline{\theta}_0 \frac{1}{r}$$

Relazioni in coordinate cilindriche:

$$\nabla \cdot \underline{\rho}_0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho) = \frac{1}{\rho}$$

$$\nabla \times \underline{\rho}_0 = 0$$

$$\nabla^2 \underline{\rho}_0 = \underline{\rho}_0 \left(-\frac{1}{\rho^2} \right)$$

$$\nabla \rho = \underline{\rho}_0$$

$$\nabla \cdot \underline{\varphi}_0 = 0$$

$$\nabla \times \underline{\varphi}_0 = \underline{z}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \rho} = \underline{z}_0 \frac{1}{\rho}$$

$$\nabla \varphi = \underline{\varphi}_0 \frac{1}{\rho}$$

Equazione di Poisson

Si ricordi (Fisica II) l'equazione di Poisson per l'elettrostatica (equazione scalare):

$$\nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{mezzo omogeneo})$$

(con $\underline{E} = -\nabla V$)

ove ρ è la densità delle cariche libere, non di quelle di polarizzazione nei dielettrici.

Si noti per inciso che nel caso di mezzi non omogenei, i fenomeni elettrostatici sono regolati da un'equazione diversa da quella di Poisson. Infatti dall'equazione generale $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$, ossia, per mezzi isotropi $\nabla \cdot (\epsilon \underline{E}) = \rho$, e ricordando l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (\epsilon \underline{E}) = \nabla \epsilon \cdot \underline{E} + \epsilon \nabla \cdot \underline{E}$$

segue:

$$-\nabla \epsilon \cdot \nabla V - \epsilon \nabla \cdot \nabla V = \rho$$

ossia, dividendo per ϵ :

$$\nabla^2 V + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \nabla V = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

oppure:

$$\nabla^2 V + \nabla(\ln \epsilon) \cdot \nabla V = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

Per la magnetostatica si ha invece l'equazione di Poisson vettoriale:

$$\nabla^2 \underline{A} = - \underline{J} \quad (\text{mezzo omogeneo e } \nabla \cdot \underline{A} = 0)$$

(con $\underline{H} = \nabla \times \underline{A}$)

ove \underline{J} è la densità delle correnti libere, non di quelle di magnetizzazione presenti nei materiali magnetici.

E' noto (dal corso di Fisica II) che l'equazione scalare ammette una soluzione del tipo:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\rho(\underline{r}')}{\epsilon} d\tau'$$

essendo τ il volume occupato dalla distribuzione di carica ρ , \underline{r}' il vettore posizione del generico punto P' in tale volume (punto di sorgente), \underline{r} il vettore posizione del punto P dello spazio in cui si vuole il potenziale V (punto di osservazione).

Il fatto che l'espressione vista rappresenti una soluzione dell'equazione di Poisson può essere direttamente verificato. Si ha infatti:

$$\nabla^2 V = \nabla^2 \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} \frac{\rho(\underline{r}')}{\epsilon} d\tau' = \int_{\tau} \frac{\rho(\underline{r}')}{4\pi\epsilon} \nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) d\tau'$$

ove l'operatore di Laplace, che opera su \underline{r} , è stato portato dentro l'integrale, che è rispetto a \underline{r}' .

Si ricordi inoltre che è:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

per cui:

$$\nabla^2 V = \int_{\tau} -\frac{\rho(\underline{r}')}{\epsilon} \delta(\underline{r} - \underline{r}') d\tau' = \begin{cases} -\rho(\underline{r})/\epsilon & \text{se } \underline{r} \in \tau \\ 0 & \text{se } \underline{r} \notin \tau \end{cases}$$

per cui se il volume τ è quello nel quale ρ è diversa da zero (come si è assunto) l'integrale considerato è soluzione $\forall \underline{r}$. Nel caso invece in cui τ fosse un sottoinsieme del dominio D ove $\rho \neq 0$, la soluzione non sarebbe valida nell'insieme $D - \tau$.

Si noti come la soluzione che si sta considerando abbia la forma di un integrale di convoluzione spaziale, ove la funzione $1/4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|$ gioca il

ruolo di risposta impulsiva spaziale. In elettromagnetismo si parla più spesso di "funzione di Green", in questo caso per l'equazione di Poisson e per lo spazio libero. Infatti tale soluzione è utile nel caso in cui la distribuzione di carica ρ sia immersa in uno spazio senza superfici di contorno (spazio libero), riempito di un dielettrico omogeneo di costante dielettrica ϵ , ed in cui si voglia conoscere la distribuzione del potenziale elettrostatico.

Nel caso in cui fossero presenti delle superfici di contorno, come si vedrà, all'integrale di volume andrebbe aggiunto un integrale di superficie, in cui intervengano le condizioni al contorno.

Inoltre tale soluzione è utile nell'ipotesi che la distribuzione di carica ρ sia spazialmente limitata, ossia tutte le cariche si trovino a distanza finita dall'origine. In questo caso è naturale assumere come condizione al contorno (all'infinito) per il potenziale la seguente:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) r = l < \infty$$

Questa condizione ha il significato che al crescere di r la funzione V debba andare a zero almeno come $1/r$. La soluzione considerata soddisfa evidentemente tale condizione, visto il tipo di dipendenza da r .

Si può vedere inoltre che essa è l'unica che soddisfi una tale condizione al contorno. Infatti si ricordi che una qualsiasi soluzione dell'equazione di Poisson può essere espressa mediante la sovrapposizione di una (arbitraria) soluzione di essa (ad esempio quella considerata) ed un'opportuna soluzione dell'equazione omogenea corrispondente (nel nostro caso l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$).

Per avere un'altra soluzione, diversa da quella considerata, ma che soddisfi anch'essa la condizione al contorno all'infinito, si dovrebbe aggiungere alla nostra soluzione una soluzione dell'equazione di Laplace

che soddisfi anch'essa tale condizione. Pertanto una tale soluzione dell'equazione di Laplace dovrebbe andare a zero all'infinito.

Peraltro si può dimostrare che ogni soluzione dell'equazione di Laplace non possiede punti di massimo o di minimo nei punti interni del dominio di interesse. **Per cui se all'infinito (ossia sulla frontiera) vale zero, essa dev'essere identicamente nulla, e pertanto la soluzione dell'equazione di Poisson che soddisfi la predetta condizione al contorno è unica.**

Il fatto che una soluzione dell'equazione di Laplace non possieda punti di massimo o di minimo (nei punti interni) può essere visto nel modo seguente.

Supponendo ad esempio che vi sia un punto P di minimo per la funzione V, si potrà individuare una (piccola) superficie chiusa S che contenga P, per tutti i punti della quale la derivata normale (esterna) di V sia (strettamente) positiva, essendo la funzione crescente intorno al minimo. Sarà dunque:

$$\oint_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = \oint_S \underline{n} \cdot \nabla V dS > 0$$

Ma applicando il teorema della divergenza si ha:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \nabla V dS = \int_{\tau} \nabla \cdot \nabla V d\tau = \int_{\tau} \nabla^2 V d\tau > 0$$

conclusione assurda, essendo per ipotesi $\nabla^2 V = 0$ in tutto il volume τ racchiuso dalla superficie S.

Per quanto riguarda il caso magnetostatico, proiettando l'equazione per \underline{A} sui tre assi cartesiani si ottengono tre equazioni di Poisson scalari per le tre componenti di \underline{A} .

Ad esempio per A_x si ha:

$$A_x(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} J_x(\underline{r}') d\tau'$$

Moltiplicando le tre componenti per i versori cartesiani corrispondenti (che essendo costanti si possono introdurre nell'integrale) e sommando si ha:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} \underline{J}(\underline{r}') d\tau'$$

Per tale formula si possono ripetere le stesse osservazioni fatte a proposito del potenziale scalare elettrostatico V . La condizione al contorno all'infinito sarà:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \underline{A}(\underline{r}) r = \underline{l} \quad \text{con } |\underline{l}| < \infty$$

Si esamini ora il problema dell'equazione di Poisson in presenza di contorni, ossia all'interno di un certo volume τ racchiuso da una superficie chiusa S .

Si consideri allo scopo il lemma di Green nella sua seconda forma:

$$\int_{\tau} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d\tau = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

Si applichi tale teorema per la funzione:

$$\varphi = G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|}$$

cioè per la funzione di Green (per l'equazione di Poisson) per lo spazio libero. Si era visto che:

$$\nabla^2 G = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

da cui si osserva come la funzione di Green sia proprio la risposta (cioè il potenziale scalare V) ad una eccitazione (la funzione ρ/ϵ) di tipo impulso matematico.

Si prenda inoltre: $\Psi = V$. Applicando il lemma si ha:

$$\int_{\tau} (G \nabla^2 V - V \nabla^2 G) d\tau = \oint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

per cui:

$$\int_{\tau} \left[-G \frac{\rho}{\epsilon} + V \delta(\underline{r}-\underline{r}') \right] d\tau = - \int_{\tau} G \frac{\rho}{\epsilon} d\tau + V(\underline{r}') = \oint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

avendo supposto $\underline{r}' \in \tau$. Si ha quindi:

$$V(\underline{r}') = \int_{\tau} G \frac{\rho}{\epsilon} d\tau + \oint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS$$

Invertendo i ruoli delle variabili \underline{r} ed \underline{r}' ed osservando che

$G(\underline{r}', \underline{r}) = G(\underline{r}, \underline{r}')$ si ha:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} G(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\rho(\underline{r}')}{\epsilon} d\tau' + \oint_S \left[G(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n} - V(\underline{r}') \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS'$$

se $\underline{r} \in \tau$. Se invece \underline{r} è esterno al volume τ considerato occorre porre zero a primo membro della formula precedente.

Su questa espressione si possono fare alcune osservazioni. Se la superficie S viene portata all'infinito e si suppone che il potenziale V su di essa decresca come $1/r$, l'integrale di superficie va a zero. Ciò può vedersi in modo semplice se si considera una sfera con centro nell'origine (per cui la derivata normale coincide con quella radiale) e di raggio crescente, e si ricorda che G va a zero come $1/r$ e che il dS è proporzionale a r^2 . Si ritorna quindi alla soluzione per lo spazio libero.

Si osservi inoltre che nell'integrale superficiale compaiono le condizioni al contorno dette di Cauchy, che richiedono la conoscenza sul contorno sia del potenziale che della sua derivata normale. Se si richiede la conoscenza del solo potenziale sul contorno si parla di condizioni di

Dirichlet; se si richiede la sola derivata normale si parla di condizioni di Neumann.

Ora, si può vedere che ciascuna delle due ultime condizioni è sufficiente da sola a determinare univocamente la soluzione dell'equazione di Poisson. Pertanto le condizioni di Cauchy sono sovrabbondanti, e non conducono in generale a nessuna soluzione, a meno che i valori del potenziale e della derivata normale non siano scelti accuratamente, ossia non siano più indipendenti. E allora la formula precedente non va vista come la soluzione dell'equazione di Poisson che soddisfa certe condizioni al contorno (di Cauchy) assegnate, ma è in realtà essa stessa un'equazione (integrale, cioè nella quale la funzione incognita compare sotto il segno di integrale) cui deve soddisfare la funzione $V(\mathbf{r})$, soluzione dell'equazione di Poisson all'interno del volume τ .

Il fatto che assegnando condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann sulla superficie chiusa S la soluzione sia determinata univocamente può esser visto per assurdo, supponendo che esistano due soluzioni diverse V_1 e V_2 (che soddisfino alle stesse condizioni al contorno) e considerandone la differenza $V_0 = V_2 - V_1$. Si avrà che V_0 è soluzione dell'equazione di Laplace, soddisfacente le condizioni $V_0 = 0$, oppure $\partial V_0 / \partial n = 0$, su S nei due casi rispettivamente.

Si consideri ora il lemma di Green nella sua prima forma:

$$\int_{\tau} (\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \varphi \nabla^2 \psi) d\tau = \oint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS$$

ove si ponga $\varphi = \psi = V_0$. Ne segue:

$$\int_{\tau} (\nabla V_0 \cdot \nabla V_0 + V_0 \nabla^2 V_0) d\tau = \oint_S V_0 \frac{\partial V_0}{\partial n} dS = 0$$

per le condizioni al contorno in entrambi i casi. Si ha inoltre $\nabla^2 V_0 = 0$. Ne segue:

$$\int_{\tau} |\nabla V_0|^2 d\tau = 0$$

da cui $\nabla V_0 = 0$ in τ , ossia V_0 è costante in τ .

Nel caso del problema di Dirichlet si ha allora $V_0 = 0$ in τ e l'unicità è dimostrata, mentre nel caso di Neumann l'unicità è dimostrata a meno di una costante additiva arbitraria, che peraltro non è importante, essendo il potenziale sempre definito a meno di una costante arbitraria, che non altera il valore del campo elettrico.

Si ha inoltre l'unicità anche per condizioni al contorno miste, in cui sia assegnato il potenziale su una parte di S , e la sua derivata normale sulla parte restante. Calcolando invece $V(\underline{r})$ mediante condizioni di Cauchy assegnate e la formula vista, si ottengono in generale valori al contorno diversi da quelli assegnati.

Si noti infine che la formula vista poteva essere ricavata non soltanto per la funzione $1/4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|^{-1}$, ma per qualsiasi funzione $G(\underline{r}, \underline{r}')$ soddisfacente la $\nabla^2 G = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$, e che si può ottenere dalla precedente aggiungendo un'arbitraria soluzione dell'equazione di Laplace in τ . Si può sfruttare tale arbitrarietà per eliminare nella formula vista l'uno o l'altro degli integrali di superficie ed ottenere così soluzioni formali dell'equazione di Poisson per condizioni di Dirichlet o di Neumann.

Si può ad esempio scegliere una funzione di Green $G_D(\underline{r}, \underline{r}')$ tale che $G_D(\underline{r}, \underline{r}') = 0$ per $\underline{r}' \in S$, e allora segue che:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} G_D(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\rho(\underline{r}')}{\epsilon} d\tau' - \oint_S V(\underline{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n} dS'$$

e questa è ora effettivamente l'espressione per la soluzione (unica) dell'equazione di Poisson per assegnate condizioni al contorno di Dirichlet per la funzione V .

Analogamente si può scegliere una funzione di Green $G_N(\underline{r}, \underline{r}')$ tale che $\partial G_N / \partial n = 0$ per $\underline{r}' \in S$, e allora:

$$V(\underline{r}) = \int_{\tau} G_N(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\rho(\underline{r}')}{\epsilon} d\tau' + \oint_S G_N(\underline{r}, \underline{r}') \frac{\partial V}{\partial n} dS'$$

ottenendo l'espressione per la soluzione (unica) dell'equazione di Poisson per assegnate condizioni al contorno di Neumann per la funzione V .

Si noti tuttavia che tali soluzioni sono per lo più formali, perché la determinazione effettiva di queste nuove funzioni di Green presenta spesso difficoltà notevoli.

Teorema di Helmholtz

Il teorema di Helmholtz è generalmente noto sotto forma di due enunciati:

- 1) un campo vettoriale \underline{A} è completamente determinato assegnandone la divergenza ed il rotore;
- 2) ogni campo vettoriale \underline{A} è scomponibile univocamente nella somma di una parte irrotazionale (a rotore nullo) ed una parte solenoidale (a divergenza nulla). In particolare si tratta rispettivamente di un gradiente e di un rotore.

Per dimostrare la prima parte si consideri l'identità vettoriale:

$$\nabla^2 \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = - (-\nabla \nabla \cdot \underline{A} + \nabla \times \nabla \times \underline{A})$$

Se la divergenza ed il rotore di \underline{A} sono noti, tale relazione diventa un'equazione di Poisson vettoriale, che ammette nelle ipotesi viste la soluzione unica:

$$\underline{A}(\underline{r}) = - \int_{\tau} \frac{\nabla' \nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' + \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

ove gli operatori sono stati contrassegnati con un apice per indicare che operano su \underline{r}' e non su \underline{r} .

Si noti tuttavia per inciso che assegnare divergenza e rotore determina la funzione \underline{A} quasi completamente, cioè a meno del gradiente di una funzione scalare f che soddisfi l'equazione di Laplace: $\nabla^2 f = 0$. Infatti il vettore $\underline{B} = \underline{A} + \nabla f$ è tale che $\nabla \times \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$, essendo $\nabla \times \nabla f = 0$ sempre. E inoltre $\nabla \cdot \underline{B} = \nabla \cdot \underline{A}$, essendo $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = 0$ per l'ipotesi che f soddisfi l'equazione di Laplace.

Il secondo enunciato del teorema equivale a dire che per qualsiasi \underline{A} si può scrivere:

$\underline{A} = \underline{A}_i + \underline{A}_s$, con:

$$\nabla \times \underline{A}_i = 0, \text{ per cui } \nabla \times \underline{A} = \nabla \times \underline{A}_s$$

$$\nabla \cdot \underline{A}_s = 0, \text{ per cui } \nabla \cdot \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A}_i.$$

Supponendo noto \underline{A} , sono noti anche $\nabla \times \underline{A}$ e $\nabla \cdot \underline{A}$, per cui $\nabla \times \underline{A}_s$ è assegnato (come pure $\nabla \cdot \underline{A}_s = 0$ per ipotesi), e così anche $\nabla \cdot \underline{A}_i$ (come pure $\nabla \times \underline{A}_i = 0$ per ipotesi). Quindi, per la prima parte del teorema, \underline{A}_i e \underline{A}_s risultano determinati. Se ne vogliono ora trovare le espressioni esplicite.

Se il dominio considerato è a connessione lineare semplice, sarà:

$$\underline{A}_i = -\nabla \varphi$$

$$\text{per cui: } \nabla \cdot \underline{A}_i = -\nabla \cdot \nabla \varphi = -\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \underline{A}$$

e quindi $\nabla^2 \varphi = -\nabla \cdot \underline{A}$, equazione di Poisson scalare, che ha la soluzione:

$$\varphi(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

da cui:

$$\underline{A}_i(\underline{r}) = -\nabla \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

Se poi il dominio è a connessione superficiale semplice (ad esempio l'intero spazio), si ha: $\underline{A}_s = \nabla \times \underline{F}$.

Il vettore \underline{F} è completamente determinato assegnandone rotore e divergenza. Qui interessa solo il rotore, che deve essere \underline{A}_s ; la divergenza rimane arbitraria, e si può prendere nulla. Per cui:

$$\nabla \times \underline{A}_s = \nabla \times (\nabla \times \underline{F}) = \nabla \nabla \cdot \underline{F} - \nabla^2 \underline{F} = -\nabla^2 \underline{F} = \nabla \times \underline{A}$$

e quindi si ha l'equazione di Poisson vettoriale $\nabla^2 \underline{F} = -\nabla \times \underline{A}$, che ha la soluzione:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

per cui (e la seconda parte risulta così dimostrata):

$$\underline{A}_s(\underline{r}) = \nabla \times \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

Da quanto precede si ricava l'espressione per \underline{A} :

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underline{A}_i(\underline{r}) + \underline{A}_s(\underline{r}) = -\nabla \int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' + \nabla \times \int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau'$$

Si noti che la parte irrotazionale è un gradiente che dipende solo dalla divergenza di \underline{A} , mentre la parte solenoidale è un rotore che dipende solo dal rotore di \underline{A} .

Si noti infine la somiglianza tra questa formula e quella stabilita in precedenza: con le ipotesi supplementari di connessione del dominio è stato possibile portare fuori (per così dire) dall'integrale il gradiente ed il rotore, rendendo più agevole la determinazione di \underline{A} a partire dalla sua divergenza e dal suo rotore.

Può essere inoltre derivata una formula più generale, valida per una arbitraria funzione vettoriale \underline{A} (purché ovviamente derivabile), all'interno di un volume arbitrario τ delimitato da una superficie chiusa S . La relazione è:

$$\underline{A}(\underline{r}) = -\nabla \left(\int_{\tau} \frac{\nabla' \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' - \oint_S \frac{\underline{n} \cdot \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} dS' \right) + \nabla \times \left(\int_{\tau} \frac{\nabla' \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} d\tau' - \oint_S \frac{\underline{n} \times \underline{A}(\underline{r}')}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} dS' \right)$$

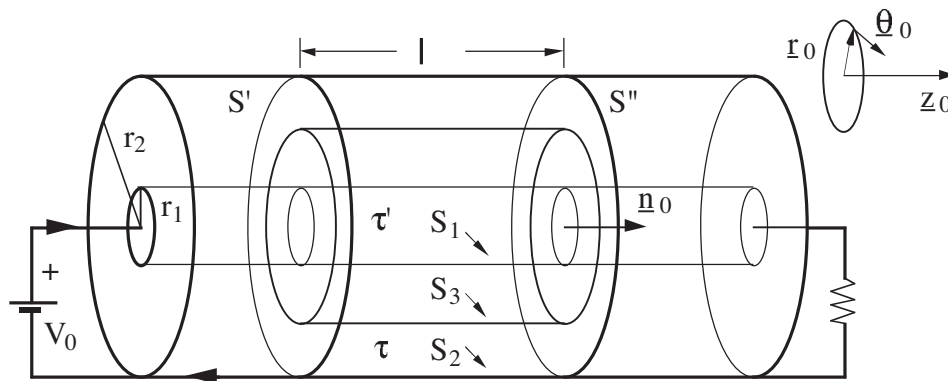
In questa espressione intervengono i valori sul contorno S . Da essa si vede fra l'altro che la condizione $\nabla \cdot \underline{A} = 0$ nel volume considerato non è

sufficiente da sola per poter esprimere \underline{A} come un rotore di una certa funzione vettoriale. Se però a tale condizione si aggiunge (ad esempio) la condizione al contorno $\underline{n} \cdot \underline{A} = 0$ sulla superficie, ciò è sufficiente. In modo analogo, la condizione $\nabla \times \underline{A} = 0$ nel volume non è sufficiente da sola per poter esprimere \underline{A} come il gradiente di una certa funzione scalare. Lo diventa se si aggiunge (ad esempio) la condizione $\underline{n} \times \underline{A} = 0$ al contorno.

Applicazione del teorema di Poynting ad un cavo coassiale in continua

Si consideri una struttura coassiale (di raggi r_1 e r_2) con pareti perfettamente conduttrici e che racchiuda un dielettrico perfetto, omogeneo, isotropo e non dispersivo.

Tra i due conduttori sia mantenuta una differenza di potenziale costante nel tempo V_0 ed il cavo sia chiuso su una **resistenza R** . Nei conduttori scorrerà allora una corrente costante nel tempo $I_0 = V_0/R$.



Si applichi ora il teorema di Poynting nel dominio del tempo al volume dielettrico τ , limitato dalle superfici S_1 , S_2 , S' e S'' .

Trattandosi di una situazione statica (indipendenza dal tempo) i termini $p_E = \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ e $p_H = \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \cdot \underline{H}$, in cui compaiono delle derivate rispetto al tempo, si annullano. In termini di energia **(essendo il mezzo non dispersivo)** si ha che l'energia elettromagnetica immagazzinata nel volume non varia:

$$\int_{\tau} (p_H + p_E) d\tau = \frac{d}{dt} \int_{\tau} (W_H + W_E) d\tau = 0$$

D'altra parte nel volume considerato non ci sono sorgenti (perché esse sono sulla superficie del conduttore perfetto), per cui si ha: $\underline{p}_i = - \underline{E} \cdot \underline{J}_i = 0$

$$\underline{p}_{mi} = - \underline{J}_{mi} \cdot \underline{H} = 0.$$

Infine, avendo supposto il dielettrico perfetto ($g=0$), si ha $\underline{p}_c = \underline{E} \cdot \underline{J}_c = 0$. Il teorema di Poynting si riduce allora a:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \underline{P} \, dS = 0$$

con $S = S_1 \cup S_2 \cup S' \cup S''$.

Per l'ipotesi di conduttori perfetti (componente tangenziale nulla di campo elettrico) si ha $\underline{n} \times \underline{E} = 0$ su S_1 e S_2 . D'altra parte:

$$\underline{n} \cdot \underline{P} = \underline{n} \cdot \underline{E} \times \underline{H} = \underline{n} \times \underline{E} \cdot \underline{H} = 0$$

Rimane dunque:

$$\int_{S'} \underline{n} \cdot \underline{P} \, dS' + \int_{S''} \underline{n} \cdot \underline{P} \, dS'' = 0$$

ove \underline{n} è al solito la normale esterna al volume. Con riferimento ad esempio al versore \underline{n}_0 si ha allora:

$$\int_{S'} \underline{n}_0 \cdot \underline{P} \, dS' = \int_{S''} \underline{n}_0 \cdot \underline{P} \, dS''$$

ossia il flusso di \underline{P} che attraversa S' dal generatore verso il carico è uguale a quello che attraversa S'' . La situazione tuttavia rimane statica (non c'è propagazione ondosa).

Si vuole ora calcolare tale integrale, per cui si necessita delle espressioni per il campo elettromagnetico.

Per il campo elettrico, considerazioni di simmetria suggeriscono l'orientazione radiale, per cui $\underline{E} = E_r \underline{r}_0$ (indicando con r, θ, z le coordinate

cilindriche, che sono quelle che meglio si adattano alla struttura in questione).

Peraltro è sempre $\underline{E} = -\nabla V$, per cui ∇V ha solo la componente radiale, e quindi si può scrivere come $\frac{\partial V}{\partial r} \underline{r}_0$, con $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$.

Per ottenere E_r si può applicare il teorema della divergenza al volume cilindrico (pieno) τ' , limitato dalla superficie chiusa S_3 , di raggio r' compreso tra r_1 e r_2 e di lunghezza l .

Per l'ipotesi di mezzo omogeneo (e isotropo, e non dispersivo), dalla $\nabla \cdot \underline{D} = \rho_{lib}$ (cariche libere, non quelle di polarizzazione) segue $\nabla \cdot \underline{E} = \rho/\epsilon$, per cui:

$$\int_{\tau'} \nabla \cdot \underline{E} \, d\tau' = \oint_{S_3} \underline{n} \cdot \underline{E} \, dS_3 = \int_{\tau'} \frac{\rho}{\epsilon} \, d\tau'$$

Peraltro sulle due basi del cilindro il contributo all'integrale è nullo, essendo il campo elettrico diretto ortogonalmente alla normale. Resta la superficie laterale S_{3l} , ove $\underline{n} = \underline{r}_0$, e quindi, in coordinate cilindriche:

$$\oint_{S_3} \underline{n} \cdot \underline{E} \, dS_3 = \int_{S_{3l}} \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_0 E_r \, dS = \int_0^l \int_0^{2\pi} E_r r' \, d\theta dz$$

essendo $dS = h_2 h_3 dq_2 dq_3 = r d\theta dz$.

D'altra parte, sempre per ragioni di simmetria, si può supporre che E_r dipenda solo da r , per cui:

$$\oint_{S_3} \underline{n} \cdot \underline{E} \, dS_3 = E_r 2\pi r' l = \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau'} \rho \, d\tau' = \frac{q}{\epsilon} = \frac{l \lambda}{\epsilon}$$

essendo q la carica all'interno di τ' e λ la carica per unità di lunghezza, avendo supposto la distribuzione di carica indipendente da z (λ costante) e

giacente ovviamente, trattandosi di conduttore perfetto, sulla superficie del cilindro. **Si ha pertanto:**

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} = - \frac{\partial V}{\partial r}$$

Lo stesso risultato poteva ottenersi facendo uso della funzione di Dirac per esprimere la densità di carica ρ , diversa da zero solo per $r=r_1$, e ponendo:

$$\rho = \sigma \delta(r-r_1) = (\lambda/2\pi r_1) \delta(r-r_1)$$

essendo ora σ la densità superficiale di carica (carica per unità di superficie, ove $2\pi r_1$ è la superficie di un tratto di lunghezza unitaria, dotato della carica λ). Si ricordi che la δ ha le dimensioni fisiche dell'inverso di un volume nello spazio in cui opera: in questo caso, essendo uno spazio unidimensionale, l'inverso di una lunghezza.

Si ha allora:

$$\int_{\tau'} \rho d\tau' = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{r'} \frac{\lambda}{2\pi r_1} \delta(r-r_1) r dr d\theta dz$$

essendo $d\tau' = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 = r dr d\theta dz$.

Per cui:

$$\int_{\tau'} \rho d\tau' = l \cdot 2\pi \frac{\lambda}{2\pi r_1} \int_0^{r'} \delta(r-r_1) r dr = \lambda l$$

essendo $r' > r_1$.

Si noti che l'espressione precedente di E_r è valida anche, per come è stata ottenuta, se il conduttore esterno non c'è. Si tratta inoltre di un'espressione indipendente dal valore di r_1 (con r ovviamente maggiore di r_1), per cui vale anche nel caso di un filo. Tale espressione non è altro che il campo elettrostatico generato da un cilindro carico perfettamente

conduttore, di lunghezza infinita. Si noti infatti che si è supposto implicitamente che il volume τ non risenta degli effetti dei bordi dovuti alla necessaria finitezza della struttura, e che quindi il cavo coassiale sia di lunghezza virtualmente infinita (e allora sono applicabili le considerazioni di simmetria).

Per determinare λ si sfrutta il fatto che la differenza di potenziale tra i conduttori è imposta e pari a V_0 . Pertanto, scegliendo un percorso radiale, si ha:

$$V_0 = V_1 - V_2 = \int_1^2 \underline{E} \cdot \underline{t} \, ds = \int_{r_1}^{r_2} E_r \underline{r}_0 \cdot \underline{r}_0 \, dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon} \, dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

Pertanto:

$$\lambda = 2\pi \epsilon / \ln(r_2/r_1) \cdot V_0 = C V_0$$

essendo C una capacità per unità di lunghezza.

L'espressione di C è la stessa che per un condensatore cilindrico (anche qui trascurando gli effetti ai bordi, ossia lunghezza grande rispetto ai raggi e differenza tra i raggi piccola rispetto ai raggi stessi). Anche l'espressione del campo è la stessa:

$$E_r = V_0 / [r \ln(r_2/r_1)]$$

Il caso del condensatore cilindrico si ottiene ponendo un circuito aperto al posto della resistenza. In tal caso non scorre corrente e si è in presenza del solo campo elettrico.

Per quanto riguarda ora il campo magnetico, si può dedurre, sempre per simmetria, che sarà puramente circonferenziale, ossia $\underline{H} = H_\theta \underline{\theta}_0$. Dall'equazione di Maxwell $\nabla \times \underline{H} = \underline{J}$, applicando il teorema di Stokes segue come è noto:

$$\oint_s \underline{H} \cdot \underline{t} \, ds = \int_S \underline{n} \cdot \underline{J} \, dS = I_0$$

ove la linea chiusa s circonda il conduttore centrale.

Prendendo ad esempio una circonferenza di raggio r (con $r_1 < r < r_2$) si ha, supponendo sempre per simmetria che H_θ dipenda solo da r :

$$\oint_s \mathbf{H}_\theta \cdot \mathbf{d}\mathbf{s} = H_\theta \oint_s ds = H_\theta 2\pi r = I_0$$

da cui: $H_\theta = I_0 / 2\pi r$. Il risultato è indipendente da r_1 , quindi valido anche nel caso di un filo.

Si noti che questa espressione sarebbe la stessa se il conduttore esterno non ci fosse (campo magnetico generato da un filo infinito, legge di Biot e Savart). Si suppone ancora che la distanza dall'asse sia piccola rispetto alla lunghezza del conduttore (e che ci si ponga al centro). Il caso del filo indefinito corrisponderebbe a porre un corto circuito al posto della resistenza (differenza di potenziale nulla e quindi presenza del solo campo magnetico). Nella realtà poi il generatore avrà una resistenza interna che limita la corrente.

Nella nostra situazione sono presenti sia il campo elettrico che quello magnetico, ma trattandosi di un problema statico i due campi sono indipendenti (ecco perché vale la sovrapposizione degli effetti).

Si può ora calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{S''} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{P} \, dS'' &= \int_{S''} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \times \mathbf{H}_\theta \frac{V_0}{r \ln(r_2/r_1)} \frac{I_0}{2\pi r} \, dS'' = \frac{V_0 I_0}{2\pi \ln(r_2/r_1)} \int_{S''} \frac{1}{r^2} \, dS'' = \\ &= \frac{V_0 I_0}{2\pi \ln(r_2/r_1)} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \, r dr d\theta = \end{aligned}$$

(essendo: $dS'' = h_1 h_2 dq_1 dq_2 = r dr d\theta$)

$$= \frac{V_0 I_0}{2\pi \ln(r_2/r_1)} 2\pi \ln(r_2/r_1) = V_0 I_0$$

Ma $V_0 I_0$ non è altro che la potenza dissipata nella resistenza, che risulta dunque uguale al flusso di potenza attraverso una sezione qualsiasi di dielettrico. I due conduttori hanno quindi soltanto una funzione di guida per il campo elettromagnetico, che del resto non penetra all'interno di un conduttore perfetto. Questa osservazione è valida anche in condizioni dinamiche ($\omega \neq 0$).

Nel caso più realistico di conduttori buoni, ma con perdite, si avrà invece una piccola penetrazione di campo all'interno ed una conseguente dissipazione per effetto Joule. In questo caso non vale più la condizione $\underline{n} \times \underline{E} = 0$ sulla superficie, e il vettore di Poynting non sarà più puramente tangenziale alle pareti metalliche ($\underline{n} \cdot \underline{P} = 0$), ma avrà una (piccola) componente normale (entrante nel conduttore).

Ovviamente nel caso di guide dielettriche (ad esempio fibre ottiche) si ha invece che il campo all'interno non è nullo, anzi si concentra prevalentemente nel dielettrico, mentre all'esterno decade in modo simile ad un'esponenziale (funzione di Hankel di seconda specie).

Da notare infine che le espressioni ottenute per \underline{E} ed \underline{H} coincidono con quelle del modo TEM a frequenza nulla (e quindi indipendenza da z).

Vettori complessi

Nel caso di vettori complessi (ossia vettori che hanno come componenti numeri complessi) i prodotti scalare e vettoriale sono eseguiti con le regole consuete. In particolare si ricordi che dalla:

$\underline{A} = \underline{B} \times \underline{C}$ segue sempre, anche per vettori complessi:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{A} \cdot \underline{C} = 0$$

Occorre invece mutare in questo caso la definizione di modulo. Si pone:

$$|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}^*} = \sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2} = \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2}$$

essendo \underline{A}^* il vettore coniugato, che ha come componenti le coniugate delle componenti di \underline{A} .

Con questa definizione il modulo risulta, come deve essere, reale e positivo. Inoltre, se c è una costante complessa, dalla $\underline{A} = c\underline{B}$ segue $|\underline{A}| = |c| |\underline{B}|$, ossia il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli.

Dal momento che un vettore complesso non è più disegnabile in uno spazio tridimensionale, la nozione di modulo nel caso complesso perde il significato geometrico di lunghezza del vettore, che aveva nel caso reale.

In senso algebrico, tuttavia, con l'introduzione del concetto di modulo diventa possibile definire la distanza fra due vettori complessi, come il modulo della loro differenza.

Si ricordi poi che se il prodotto scalare fra due vettori complessi è nullo, non è affatto vero in generale che i vettori parte reale e parte immaginaria siano separatamente ortogonali fra loro.

Si noti che, da un punto di vista di algebra astratta, se si mantiene per il prodotto scalare la definizione abituale (come somma di prodotti di

componenti omonime), lo spazio vettoriale dei vettori complessi sul campo dei numeri complessi non gode della proprietà di essere unitario (o di Hilbert), poiché tale proprietà richiedeva la:

$$\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0 \quad \text{e} \quad \underline{v} \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \underline{v} = 0$$

Tale condizione è invece verificata dal prodotto $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2^*$.

Può essere comunque utile, anche nel caso di vettori complessi, considerare la quantità:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

(nel caso di vettori reali essa è reale e coincide con il modulo). Tale quantità, tuttavia, risulterà ora in generale complessa, **e potrà chiamarsi ampiezza complessa.**

Si potrà allora scrivere, per un generico vettore complesso \underline{A} , come per i vettori reali (tranne il caso in cui tale ampiezza risulti nulla, caso che non implica in generale, come si vedrà in seguito per i vettori polarizzati circolarmente, la nullità del vettore, cioè delle tre componenti):

$$\underline{A} = A \underline{a}_0,$$

essendo $\underline{a}_0 = \underline{A} / A$ un vettore di ampiezza unitaria, ma non in generale di modulo unitario, che risulta essere una sorta di "pseudo-versore". Si tratta però in generale di un vettore complesso, e quindi non indica più una direzione visualizzabile.

Un tale vettore risulta reale se e solo se \underline{A} è polarizzato linearmente. Infatti in questo caso $\underline{A} = A_R + jA_j$, con $A_R // A_j$, per cui A_R e A_j avranno lo stesso versore reale \underline{a}_0 , ossia $\underline{A} = (A_R + jA_j)\underline{a}_0$. E' inoltre vero anche il viceversa, come si vedrà.

Nel caso del prodotto $\underline{A} = c\underline{B}$, con c complesso, si ha per le ampiezze:
 $A = cB$.

Tornando al prodotto vettoriale fra due vettori complessi \underline{A} e \underline{B} , si supponga che sia $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$. In questo caso si può dimostrare che in generale $|\underline{A} \times \underline{B}| \neq |\underline{A}| |\underline{B}|$, mentre per il caso dei vettori reali valeva l'uguaglianza. Se si impone invece $\underline{A} \cdot \underline{B}^* = 0$, si ha effettivamente che $|\underline{A} \times \underline{B}| = |\underline{A}| |\underline{B}|$. Si noti che la condizione $\underline{A} \cdot \underline{B}^* = 0$ è equivalente alla $\underline{B} \cdot \underline{A}^* = 0$. Se si considerano in luogo dei moduli le ampiezze complesse, è di nuovo la condizione $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ che implica l'uguaglianza.

Le due condizioni $\underline{A} \cdot \underline{B}^* = 0$ e $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$ non sono in generale equivalenti per vettori complessi. Lo sono se uno dei due vettori è reale, ma in realtà è sufficiente che uno dei due sia polarizzato linearmente. Infatti in tal caso il versore è reale, ed è esso ad entrare nel prodotto scalare.

Anche per i vettori complessi si parla per estensione di ortogonalità e parallelismo, in base ai prodotti scalare e vettoriale. Anche a queste nozioni non corrisponde tuttavia qualcosa di disegnabile, di visibile.

Si notino le relazioni fra vettori complessi nel dominio dei fasori e i corrispondenti vettori nel dominio del tempo (indicati con la tilde):

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{A} \cdot \underline{B}^*] = \widetilde{\underline{A}} \cdot \widetilde{\underline{B}}^t$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\underline{A} \times \underline{B}^*] = \widetilde{\underline{A}} \times \widetilde{\underline{B}}^t$$

Come si vede, quindi, la trasformazione che fa passare dai vettori nel dominio del tempo ai fasori non è un isomorfismo (perché non conserva i prodotti scalari). Ciò è legato al fatto che gli spazi vettoriali non sono unitari.

Si ricordi che le relazioni precedenti valgono ovviamente per i fasori, ma non per i vettori trasformati secondo Fourier. Infatti ad esempio si è visto che il teorema di Poynting complesso, come formulazione matematica, vale sia per i fasori, sia per i vettori trasformati secondo

Fourier, poiché è una conseguenza delle equazioni di Maxwell, che hanno la stessa forma sia per i fasori, sia per i vettori trasformati. Invece l'interpretazione del teorema in termini di valori medi delle corrispondenti grandezze nel dominio del tempo vale solo nel caso dei fasori (regime sinusoidale).

Si noti infine che mentre i fasori hanno le stesse dimensioni fisiche dei corrispondenti vettori nel dominio del tempo, i vettori trasformati hanno le dimensioni dei vettori nel tempo divise per una frequenza (cioè moltiplicate per un tempo). Ad esempio il vettore trasformato di un campo elettrico si misura in V/(mHz).

Polarizzazione dei vettori

Come si è detto, un vettore complesso non si può disegnare come i vettori reali, neanche se è polarizzato linearmente (se cioè ha versore reale), perché ha componenti complesse, che non sono associabili ai punti di una retta.

Si è visto che la condizione di polarizzazione lineare per un generico vettore complesso $\underline{A} = \underline{A}_R + j\underline{A}_j$ era:

$$\underline{A}_R \times \underline{A}_j = 0, \text{ ovvero } \underline{A}_R // \underline{A}_j.$$

Tale condizione come si è dimostrato implica porre il vettore \underline{A} come prodotto di un vettore reale per uno scalare complesso. D'altra parte se viceversa $\underline{A} = (a + jb)\underline{B}$, con \underline{B} reale, si ha:

$$\underline{A}_R = a\underline{B}, \quad \underline{A}_j = b\underline{B}, \quad \underline{A}_j = (b/a)\underline{A}_R, \text{ ossia } \underline{A}_R // \underline{A}_j.$$

Nel caso particolare delle onde piane, si ha per il vettore complesso del campo elettrico:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-jk \cdot r}$$

ove la quantità $e^{-jk \cdot r}$ è uno scalare (complesso). Si potrà allora scrivere:

$$\underline{E} = \underline{E}_0(a + jb) = (\underline{E}_{0R} + j\underline{E}_{0j})(a + jb).$$

Ora, il fatto di moltiplicare (o dividere) un vettore complesso per uno scalare complesso non ne modifica il tipo di polarizzazione, che è legata alla parte vettoriale. Ovviamente varierà l'ampiezza di oscillazione nel dominio del tempo.

Ad esempio, se \underline{E}_0 è polarizzato linearmente si ha $\underline{E}_{0R} \times \underline{E}_{0j} = 0$, per cui:

$$\begin{aligned} \underline{E}_R \times \underline{E}_j &= (\underline{E}_{0R}a - \underline{E}_{0j}b) \times (\underline{E}_{0R}b + \underline{E}_{0j}a) = \underline{E}_{0R} \times \underline{E}_{0j}a^2 - \underline{E}_{0j} \times \underline{E}_{0R}b^2 = \\ &= \underline{E}_{0R} \times \underline{E}_{0j} (a^2 + b^2) = 0 \end{aligned}$$

Ovviamente è vero il viceversa (essendo $a^2 + b^2 \neq 0$), potendosi del resto scrivere $\underline{E}_0 = \underline{E} / (a + jb) = \underline{E} (c + jd)$.

In modo analogo, se $\underline{E}_{0R} \cdot \underline{E}_{0j} = 0$ e $|\underline{E}_{0R}| = |\underline{E}_{0j}|$, ossia polarizzazione circolare per \underline{E}_0 , si ha:

$$\begin{aligned}\underline{E}_R \cdot \underline{E}_j &= (\underline{E}_{0R}a - \underline{E}_{0j}b) \cdot (\underline{E}_{0R}b + \underline{E}_{0j}a) = \underline{E}_{0R} \cdot \underline{E}_{0R}ab - \underline{E}_{0j} \cdot \underline{E}_{0j}ba = \\ &= (E_{0R}^2 - E_{0j}^2)ab = 0\end{aligned}$$

e, d'altra parte:

$$\begin{aligned}|\underline{E}_R| &= \sqrt{\underline{E}_R \cdot \underline{E}_R} = \sqrt{(\underline{E}_{0R}a - \underline{E}_{0j}b) \cdot (\underline{E}_{0R}a - \underline{E}_{0j}b)} = \sqrt{E_{0R}^2a^2 + E_{0j}^2b^2} = \\ &= E_{0R}\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Mentre:

$$\begin{aligned}|\underline{E}_j| &= \sqrt{\underline{E}_j \cdot \underline{E}_j} = \sqrt{(\underline{E}_{0R}b + \underline{E}_{0j}a) \cdot (\underline{E}_{0R}b + \underline{E}_{0j}a)} = \sqrt{E_{0R}^2b^2 + E_{0j}^2a^2} = \\ &= E_{0R}\sqrt{a^2+b^2} = |\underline{E}_R|\end{aligned}$$

Ovviamente è vero anche il viceversa.

Considerando ora un sistema di riferimento con il piano xy coincidente con il piano di polarizzazione, cioè con il piano individuato da \underline{A}_R e \underline{A}_j , si vedrà come le condizioni per i vari tipi di polarizzazione si traducono in termini delle componenti A_x e A_y .

Nel caso di polarizzazione lineare, si è visto che si può scrivere:

$\underline{A}=(1+jb)\underline{A}_R$, per cui:

$$A_x=(1+jb)A_{Rx} \quad A_y=(1+jb)A_{Ry}=(A_{Ry}/A_{Rx})A_x=rA_x \quad \text{con } r \text{ reale}$$

Si ha allora che A_x e A_y come numeri complessi sono in fase (se A_{Rx} e A_{Ry} hanno lo stesso segno), oppure in opposizione di fase (se hanno segno opposto). Viceversa, se A_x e A_y come numeri complessi sono in fase oppure in opposizione di fase, si può passare dall'uno all'altro moltiplicando per un numero reale, cioè $A_y=rA_x$, con r reale. Per cui $\underline{A}=A_x\underline{x}_0+rA_x\underline{y}_0=A_x(\underline{x}_0+r\underline{y}_0)$, e quindi \underline{A} è il prodotto del numero complesso A_x per un vettore reale, ossia è polarizzato linearmente. Per cui risulta:

A polarizzato linearmente \Leftrightarrow **$A_y = rA_x$, con r reale.**

Per quanto riguarda la polarizzazione circolare, ossia:

$$\begin{aligned} |\underline{A}_R| &= |\underline{A}_j| \\ \underline{A}_R \cdot \underline{A}_j &= 0 \end{aligned}$$

Dalla prima segue:

$$(A_{Rx})^2 + (A_{Ry})^2 = (A_{jx})^2 + (A_{jy})^2$$

Dalla seconda invece:

$$A_{Rx}A_{jx} + A_{Ry}A_{jy} = 0 \Rightarrow A_{Rx}^2 A_{jx}^2 = A_{Ry}^2 A_{jy}^2 \Rightarrow A_{Rx}^2 = \frac{A_{Ry}^2 A_{jy}^2}{A_{jx}^2}$$

Sostituendo nella prima si trova:

$$\begin{aligned} \frac{A_{Ry}^2 A_{jy}^2}{A_{jx}^2} + A_{Ry}^2 &= A_{jx}^2 + A_{jy}^2 \\ \Rightarrow A_{Ry}^2 \left(\frac{A_{jy}^2}{A_{jx}^2} + 1 \right) &= A_{jx}^2 + A_{jy}^2. \text{ Da cui:} \end{aligned}$$

$$A_{Ry}^2 = \frac{A_{jx}^2 + A_{jy}^2}{\frac{A_{jy}^2}{A_{jx}^2} + 1} A_{jx}^2 \Rightarrow A_{Ry}^2 = A_{jx}^2 \Rightarrow A_{Ry} = \pm A_{jx}$$

Dalla seconda: $A_{Ry}A_{jy} = -A_{Rx}A_{jx}$ segue $A_{jy} = -(\pm)A_{Rx}$. Ma allora:

$$A_y = A_{Ry} + jA_{jy} = \pm A_{jx} - j(\pm A_{Rx}) = -(\pm)j(A_{Rx} + jA_{jx}) = -(\pm)jA_x$$

Viceversa se: $A_y = \pm jA_x$ segue:

$$A_{Ry} + jA_{jy} = \pm j(A_{Rx} + jA_{jx}) = \pm jA_{Rx} - (\pm)A_{jx}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$A_{jy} = \pm A_{Rx}$$

$$A_{Ry} = -(\pm)A_{jx}$$

Per cui:

$$\underline{A}_R \cdot \underline{A}_j = A_{Rx}A_{jx} + A_{Ry}A_{jy} = \pm A_{jy}A_{jx} - (\pm)A_{jx}A_{jy} = 0$$

$$|\underline{A}_R|^2 = A_{Rx}^2 + A_{Ry}^2 = A_{jy}^2 + A_{jx}^2 = |\underline{A}_j|^2 \Rightarrow |\underline{A}_R| = |\underline{A}_j|$$

Per cui risulta:

$$\underline{A} \text{ polarizzato circolarmente} \Leftrightarrow A_y = \pm j A_x.$$

In questo caso quindi A_x e A_y , come numeri complessi, sono in quadratura (differenza di fase di $\pi/2$, essendo $e^{\pm j\pi/2} = \pm j$). Si noti che le dimostrazioni precedenti non hanno coinvolto il dominio del tempo, per cui sono valide per vettori complessi generici nel piano xy.

Nel caso più generale invece di polarizzazione ellittica si avrà $A_y = c A_x$, con c complesso, e quindi $c = M e^{j\varphi}$, con $M > 0$.

Se $0 < \varphi < \pi$ il verso di rotazione nel dominio del tempo, sul piano xy, è orario (guardando dalla punta dell'asse z). Altrimenti, se $-\pi < \varphi < 0$, si ha il verso antiorario.

In particolare se $M=1$ e $\varphi = \pm\pi/2$ si ha polarizzazione circolare: $A_y = j A_x$ per il verso orario; $A_y = -j A_x$ per il verso antiorario.

I versi si possono individuare passando nel dominio del tempo. Ad esempio nel primo caso si ha:

$$\tilde{A}_x(t) = |A_x| \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\tilde{A}_y(t) = |A_y| \cos(\omega t + \varphi_y) = |A_x| \cos(\omega t + \varphi_x + \pi/2) = |A_x| \cos[\omega(t + \varphi_x/\omega) + \pi/2]$$

La fase φ_x è legata semplicemente alla scelta dell'origine dei tempi, per cui si può eliminare senza perdita di generalità. Sono significative solo le differenze di fase. Per cui:

$$\tilde{A}_y(t) = |A_x| \cos(\omega t + \pi/2) = -|A_x| \sin(\omega t)$$

ove $\tilde{A}_x(t) = |A_x| \cos(\omega t)$.

Quindi $\tilde{A}_x(t)$ va come il $\cos(\omega t)$, $\tilde{A}_y(t)$ come il $-\sin(\omega t)$, da cui il verso orario. I versi ovviamente si invertono se si guarda invece nella direzione dell'asse z.

Il caso in cui $\varphi = \pm\pi/2$, ma $M \neq 1$ corrisponde ad una polarizzazione ellittica, in cui gli assi principali dell'ellisse coincidono con gli assi cartesiani. Se invece $\varphi \neq \pm\pi/2$ (e ovviamente diversa da 0 e da π , altrimenti si torna alla polarizzazione lineare) si tratta di un'ellisse con gli assi principali ruotati di un certo angolo rispetto agli assi cartesiani.

Scomposizione di una polarizzazione generica

Il generico vettore complesso \underline{A} , di polarizzazione in generale ellittica, può ovviamente decomporre nella somma di due vettori, in generale complessi, polarizzati linearmente, ad esempio i due vettori componenti secondo x ed y nel piano di polarizzazione: $\underline{A} = A_x \underline{x}_0 + A_y \underline{y}_0$. Ciò equivale ad assumere come base di rappresentazione, per uno stato di polarizzazione arbitrario, i vettori reali ortonormali \underline{x}_0 ed \underline{y}_0 . Non si perde dunque in generalità a considerare vettori polarizzati linearmente, poiché poi è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti.

D'altra parte una generica polarizzazione ellittica si può esprimere anche come la sovrapposizione di due polarizzazioni circolari, di opposto verso di rotazione. Per dimostrarlo, dato un generico vettore complesso \underline{A} , si ponga:

$$\underline{A} = A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2$$

ove:

$$\underline{c}_1 = \frac{\underline{x}_0 - j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} \quad \underline{c}_2 = \frac{\underline{x}_0 + j \underline{y}_0}{\sqrt{2}}$$
$$A_1 = \frac{A_x + j A_y}{\sqrt{2}} \quad A_2 = \frac{A_x - j A_y}{\sqrt{2}}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2 &= \frac{A_x + j A_y}{\sqrt{2}} \left(\frac{\underline{x}_0 - j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} \right) + \frac{A_x - j A_y}{\sqrt{2}} \left(\frac{\underline{x}_0 + j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{A_x \underline{x}_0}{2} - j \frac{A_x \underline{y}_0}{2} + j \frac{A_y \underline{x}_0}{2} + \frac{A_y \underline{y}_0}{2} + \\ &+ \frac{A_x \underline{x}_0}{2} + j \frac{A_x \underline{y}_0}{2} - j \frac{A_y \underline{x}_0}{2} + \frac{A_y \underline{y}_0}{2} = A_x \underline{x}_0 + A_y \underline{y}_0 \end{aligned}$$

Dalle definizioni di A_1 e A_2 si ha, sommando:

$$A_1 + A_2 = 2 \frac{A_x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} A_x \Rightarrow A_x = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}}$$

Sottraendo si ha invece:

$$A_1 - A_2 = 2j \frac{A_y}{\sqrt{2}} = j \sqrt{2} A_y \Rightarrow A_y = \frac{A_1 - A_2}{j \sqrt{2}}$$

Procedendo in modo analogo con i versori, si ha:

$$\underline{x}_0 = \frac{\underline{c}_1 + \underline{c}_2}{\sqrt{2}} \quad \underline{y}_0 = \frac{\underline{c}_2 - \underline{c}_1}{j\sqrt{2}}$$

Si noti intanto che i vettori complessi \underline{c}_1 e \underline{c}_2 sono di modulo unitario.

Si ha infatti:

$$|\underline{c}_1|^2 = \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1^* = \frac{\underline{x}_0 - j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\underline{x}_0 + j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \underline{c}_2^* \cdot \underline{c}_2 = |\underline{c}_2|^2$$

essendo $\underline{c}_1 = \underline{c}_2^*$. Le ampiezze complesse sono invece nulle, essendo $\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1 = \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2 = 0$ (pur essendo \underline{c}_1 e $\underline{c}_2 \neq 0$).

Inoltre \underline{c}_1 e \underline{c}_2 sono anche ortogonali (in senso algebrico), secondo la definizione:

$$\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2^* = \frac{\underline{x}_0 - j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\underline{x}_0 - j \underline{y}_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 = \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1^*$$

Mentre si ha invece, come già visto, $\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_2 = 1 \neq 0$.

Dunque i vettori complessi \underline{c}_1 e \underline{c}_2 costituiscono una base ortonormale.

Si noti per inciso che mentre in una qualsiasi base ortonormale reale (ad esempio \underline{x}_0 e \underline{y}_0) si può scrivere per un vettore generico:

$$\underline{A} = A_x \underline{x}_0 + A_y \underline{y}_0 = (\underline{A} \cdot \underline{x}_0) \underline{x}_0 + (\underline{A} \cdot \underline{y}_0) \underline{y}_0$$

questa espressione va invece modificata se la base è complessa, e si ha:

$$\underline{A} = A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2 = (\underline{A} \cdot \underline{c}_1^*) \underline{c}_1 + (\underline{A} \cdot \underline{c}_2^*) \underline{c}_2$$

(nuove definizioni algebriche per le componenti di un vettore). Infatti ad esempio:

$$\underline{A} \cdot \underline{c}_1^* = (A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2) \cdot \underline{c}_1^* = A_1 \underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1^* + A_2 \underline{c}_2 \cdot \underline{c}_1^* = A_1$$

Si noti adesso che \underline{c}_1 e \underline{c}_2 sono vettori polarizzati circolarmente. Si ha:

$$c_{1x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad c_{1y} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$$

per cui $c_{1y} = -jc_{1x}$ (verso di percorrenza antiorario guardando dal semipiano $z > 0$). Inoltre:

$$c_{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad c_{2y} = \frac{j}{\sqrt{2}} = jc_{2x} \quad (\text{verso orario})$$

Ovviamente anche una generica polarizzazione lineare, come caso particolare di una polarizzazione ellittica (con uno dei semiassi nullo), può scomporsi in due polarizzazioni circolari. Del resto in questo caso si può scegliere l'asse x coincidente con la direzione di polarizzazione, per cui $\underline{A} = A_x \underline{x}_0$, e poi porre:

$$\underline{A}_1 = (A_x/2) \underline{x}_0 - j(A_x/2) \underline{y}_0$$

$$\underline{A}_2 = (A_x/2) \underline{x}_0 + j(A_x/2) \underline{y}_0$$

ove $\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A}$, e \underline{A}_1 è polarizzato circolarmente in verso antiorario, mentre \underline{A}_2 lo è in verso orario.

Si noti che, dato un generico vettore complesso \underline{A} funzione di punto (ad esempio un campo elettrico), non è sempre possibile scomporre tale vettore nel prodotto di uno scalare funzione di punto e di un vettore che non dipenda dal punto. Per cui in generale il tipo di polarizzazione sarà diverso da punto a punto nello spazio, \underline{A}_R ed \underline{A}_j saranno delle funzioni di punto, e si potranno considerare i luoghi dei punti in cui si ha ad esempio polarizzazione lineare, o circolare. Questo può avvenire ad esempio in una guida d'onda. Nel caso dell'onda piana, tuttavia, vista la sua dipendenza dalle coordinate ($\underline{E} = \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, con \underline{E}_0 costante), si ha effettivamente che il tipo di polarizzazione è lo stesso in tutto lo spazio.

L'ellisse di polarizzazione

L'angolo θ che il vettore nel dominio del tempo $\tilde{\underline{A}}(t)$ forma in un certo istante con l'asse x del piano di polarizzazione è dato dalla:

$$\theta(t) = \arctan \frac{\tilde{A}_y(t)}{\tilde{A}_x(t)} = \arctan \frac{\hat{A}_y \cos(\omega t + \varphi)}{\hat{A}_x \cos(\omega t)}$$

avendo posto $\varphi = \varphi_y - \varphi_x$, poiché come si è visto solo le differenze di fase sono significative.

L'ellisse di polarizzazione sarà allora percorsa con velocità angolare istantanea:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left[\frac{\tilde{A}_y(t)}{\tilde{A}_x(t)} \right]^2} \frac{\tilde{A}_y'(t) \tilde{A}_x(t) - \tilde{A}_y(t) \tilde{A}_x'(t)}{\tilde{A}_x^2(t)} = \frac{\tilde{A}_y'(t) \tilde{A}_x(t) - \tilde{A}_y(t) \tilde{A}_x'(t)}{\tilde{A}_x^2(t) + \tilde{A}_y^2(t)} = \\ &= \frac{1}{\tilde{A}^2(t)} \left[-\hat{A}_y \omega \sin(\omega t + \varphi) \hat{A}_x \cos(\omega t) + \hat{A}_y \cos(\omega t + \varphi) \omega \hat{A}_x \sin(\omega t) \right] = \\ &= \frac{\omega \hat{A}_x \hat{A}_y}{\tilde{A}^2(t)} \left[\sin(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) - \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t) \right] = -\omega \frac{\hat{A}_x \hat{A}_y \sin \varphi}{\tilde{A}^2(t)} \end{aligned}$$

Come si vede per $0 < \varphi < \pi$ si ha $\Omega < 0$ (ossia verso orario di rotazione), come già visto, mentre per $-\pi < \varphi < 0$ il verso è antiorario ($\Omega > 0$). Si noti comunque che la velocità angolare non risulta in generale costante nel tempo. Il vettore nel tempo compie però comunque una rotazione completa nel periodo $T = 2\pi/\omega$. Se $|A_x| = |A_y|$ e $\varphi = \pm\pi/2$ (polarizzazione circolare) si ha

$$\begin{aligned} \tilde{A}^2(t) &= \tilde{A}_x^2(t) + \tilde{A}_y^2(t) = \hat{A}_x^2 \cos^2(\omega t) + \hat{A}_x^2 \cos^2\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \hat{A}_x^2 \left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \right] = \hat{A}_x^2 \end{aligned}$$

per cui:

$$\Omega(t) = -\omega \frac{\widehat{A}_x^2}{\widehat{A}_x^2} (\pm 1) = -(\pm)\omega = \text{cost}$$

Scomponendo una generica polarizzazione ellittica in due polarizzazioni circolari è anche semplice individuare l'ellisse di polarizzazione. Ponendo infatti $\underline{A} = A_1 \underline{c}_1 + A_2 \underline{c}_2$ e scrivendo:

$$\frac{A_2}{A_1} = M e^{j2\alpha}$$

si può dimostrare che α è l'angolo che gli assi principali dell'ellisse formano con gli assi cartesiani. Si ha:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{\text{Im} \frac{A_2}{A_1}}{\text{Re} \frac{A_2}{A_1}} \right]$$

Tornando alle componenti cartesiane sul piano di polarizzazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{A_2}{A_1} &= \frac{(A_x - jA_y) \frac{1}{\sqrt{2}}}{(A_x + jA_y) \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{A_x - jA_y}{A_x + jA_y} = \frac{(A_x - jA_y)(A_x^* - jA_y^*)}{|A_x + jA_y|^2} = \\ &= \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j[A_x A_y^* + A_y A_x^*]}{|A_x + jA_y|^2} = \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j2\text{Re}[A_x A_y^*]}{|A_x + jA_y|^2} = \\ &= \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j2\text{Re}[\widehat{A}_x \widehat{A}_y e^{-j\varphi}]}{|A_x + jA_y|^2} = \frac{|A_x|^2 - |A_y|^2 - j2\widehat{A}_x \widehat{A}_y \cos\varphi}{|A_x + jA_y|^2} \end{aligned}$$

Per cui:

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{-2\widehat{A}_x \widehat{A}_y \cos\varphi}{\widehat{A}_x^2 - \widehat{A}_y^2} \right)$$

Si verifica che se $\varphi = \pm \pi/2$ gli assi principali coincidono con gli assi cartesiani. Si dimostra inoltre che il rapporto fra il semiasse maggiore a e il semiasse minore b è dato dalla:

$$\frac{a}{b} = \frac{|1 + M|}{|1 - M|} = \frac{1 + \left| \frac{A_2}{A_1} \right|}{1 - \left| \frac{A_2}{A_1} \right|}$$

Nel caso $M=1$ si ricade nella polarizzazione lineare (A_2 e A_1 hanno lo stesso modulo) $b=0$, mentre la polarizzazione circolare si ha per $M=0$ ($A_2=0$), con $a/b=1$ (semiassi uguali).

Costanti secondarie dei mezzi. Costanti di fase e di attenuazione per onde piane uniformi. Perdite dei mezzi. Relazioni di Kramers-Kronig

Per costanti secondarie di un mezzo si intendono le quantità k ed ζ , rispettivamente costante di propagazione e impedenza caratteristica (o intrinseca) del mezzo. Le costanti primarie sono invece ϵ , μ e g .

Le costanti secondarie dipendono dalle costanti primarie e dalla frequenza, secondo le note relazioni:

$$k = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_c} = \sqrt{\omega^2 \mu \left(\epsilon - j \frac{g}{\omega} \right)} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu g} = \sqrt{-j \omega \mu (g + j \omega \epsilon)} = k_R - j k_j$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j \frac{g}{\omega}}} = \sqrt{\frac{j \omega \mu}{g + j \omega \epsilon}} = \sqrt{\frac{j \omega \mu (g - j \omega \epsilon)}{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \epsilon}{g^2 + \omega^2 \epsilon^2} + \frac{j \omega \mu g}{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}} = \zeta_R + j \zeta_j$$

Del resto anche le costanti primarie ϵ e μ nei mezzi dispersivi (e tutti i mezzi a rigore lo sono) saranno in generale funzioni complesse della variabile ω (si pensi ad esempio al modello di Lorentz per $\epsilon(\omega)$). Per quanto riguarda g si può vedere che fino a frequenze al di sotto delle microonde ($\omega \leq 10^{11} \text{ sec}^{-1}$) le conducibilità dei metalli sono essenzialmente reali (corrente di conduzione in fase con il campo elettrico) e indipendenti dalla frequenza. A frequenze più elevate (infrarosso e oltre) la conducibilità è complessa e varia con la frequenza (modello di Drude).

Si è visto che in ambedue le definizioni delle costanti secondarie compare il fattore $(g + j \omega \epsilon)$. Ricordando che la corrente di conduzione è data da $\underline{J}_c = g \underline{E}$, e la corrente di spostamento da $j \omega \epsilon \underline{E}$, si dirà che un mezzo è buon conduttore se prevale l'effetto della corrente di conduzione, cioè se

$g \gg |\omega \epsilon|$, mentre è un buon dielettrico se $|\omega \epsilon| \gg g$ (è stato inserito il modulo per includere il caso dispersivo per ϵ , con la parte immaginaria legata a dissipazioni nel dielettrico). Ovviamente tale distinzione dipende dal campo di frequenze che interessa. **Alle alte frequenze, ad esempio frequenze ottiche, anche i metalli, con g dell'ordine di 10^7 S/m, non sono più degli ottimi conduttori. Se un mezzo possiede elettroni liberi, è un conduttore a basse frequenze, un isolante negli altri casi.**

Si noti che le costanti secondarie sono qui definite come caratteristiche di un certo mezzo, indipendentemente dal tipo di campo elettromagnetico che si propaga in quel mezzo (a parte la dipendenza dalla frequenza). È stato posto $k = k_R - j k_j$ poiché, nell'ipotesi di mezzi non dispersivi (oppure dispersivi, ma non dissipativi, ϵ e μ reali), la quantità k^2 giace nel quarto quadrante del piano complesso, e si sceglie la determinazione della radice quadrata con parte reale positiva (che giace cioè anch'essa nel quarto quadrante, ed ha quindi parte immaginaria negativa). In tal modo k_R e k_j risultano entrambi positivi.

Per quanto riguarda ζ si ha invece che (nelle stesse ipotesi sui mezzi) ζ^2 giace nel primo quadrante, e si sceglie ζ anch'essa nel primo quadrante, per cui ζ_R ed ζ_j sono >0 .

Separando ora la parte reale da quella immaginaria si ha:

$$k^2 = (k_R - j k_j)^2 = k_R^2 - k_j^2 - 2j k_R k_j = \omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu g$$

Per cui:

$$k_R^2 - k_j^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$2k_R k_j = \omega \mu g$$

Nel caso dell'impedenza si ha invece:

$$\zeta^2 = (\zeta_R + j \zeta_j)^2 = \zeta_R^2 - \zeta_j^2 + 2j \zeta_R \zeta_j = \frac{\omega^2 \mu \epsilon + j \omega \mu g}{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}, \text{ per cui:}$$

$$\zeta_R^2 - \zeta_j^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}$$

$$2\zeta_R \zeta_j = \frac{\omega \mu g}{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}$$

Confrontando con il sistema precedente per k , si vede subito che si può porre:

$$\zeta_R = \frac{k_R}{\sqrt{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}} \quad \zeta_j = \frac{k_j}{\sqrt{g^2 + \omega^2 \epsilon^2}}$$

E' sufficiente allora considerare e risolvere solo il problema per k . Ciò sarà fatto inizialmente nelle due situazioni di buon dielettrico e di buon conduttore.

Nel caso del buon dielettrico ($\omega \epsilon \gg g$) si ha:

$\omega^2 \mu \epsilon \gg \omega \mu g$, per cui:

$$\omega^2 \mu \epsilon + k_j^2 \gg \omega \mu g$$

Ma:

$$\omega^2 \mu \epsilon + k_j^2 = k_R^2 \quad \text{e} \quad \omega \mu g = 2k_R k_j \quad , \text{ da cui:}$$

$$k_R^2 \gg 2k_R k_j \Rightarrow k_R^2 \gg k_R k_j \Rightarrow k_R \gg k_j$$

E' possibile allora trascurare k_j rispetto a k_R nella prima equazione del sistema per k , e scrivere:

$$k_R^2 \cong \omega^2 \mu \epsilon \Rightarrow k_R \cong \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

Dalla seconda si ha:

$$k_j = \frac{\omega \mu g}{2k_R} \cong \frac{\mu g}{2\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cong \frac{g}{2\omega \epsilon} k_R$$

Per quanto riguarda ζ , essendo in questo caso:

$$\sqrt{g^2 + \omega^2 \epsilon^2} \cong \omega \epsilon$$

si avrà:

$$\zeta_R \cong \frac{k_R}{\omega \epsilon} \quad \zeta_j \cong \frac{k_j}{\omega \epsilon}$$

da cui:

$$\zeta_R \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$\zeta_j \cong \frac{g}{2\omega \epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cong \frac{g}{2\omega \epsilon} \zeta_R$$

Si noti che k_R e k_j risultano (come già detto) determinati una volta note ϵ , μ , g e la frequenza.

Si consideri ora un'onda piana, in cui si introducono come è noto il vettore di fase $\underline{\beta}$ e quello di attenuazione $\underline{\alpha}$. Si hanno le note relazioni:

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \epsilon = k_R^2 - k_j^2$$

$$\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \frac{\omega \mu g}{2} = k_R k_j$$

Da tali relazioni segue per inciso che dev'essere $\beta \neq 0$, inoltre $\beta > \alpha$, e l'angolo fra $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$ non ottuso. I valori di β e α dipendono dalle caratteristiche dell'onda che si propaga in quel mezzo.

Per esempio nel caso particolare dell'onda piana uniforme, essendo $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ paralleli (e concordi), si ha:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha} = (\beta - j\alpha)\underline{\beta}_0 = k\underline{\beta}_0, \text{ con } k = \beta - j\alpha, \text{ per cui } k_R = \beta \text{ e } k_j = \alpha$$

Risulta dal sistema precedente $\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \beta\alpha$

Un'altra soluzione del sistema sarebbe $\beta = -k_R$, $\alpha = -k_j$, non accettabile essendo β ed α supposti positivi. Le altre due soluzioni (il sistema è di quarto grado, quindi ha quattro soluzioni) sono immaginarie, quindi non accettabili. Ricapitolando, per un buon dielettrico, si ha per l'onda piana uniforme $\beta \gg \alpha$.

Passando ora al caso di buon conduttore ($g \gg \omega \epsilon$) si ha:

$$k^2 = -j\omega\mu(g + j\omega\epsilon) \cong -j\omega\mu g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cong \sqrt{-j} \sqrt{\omega\mu g} = \sqrt{\omega\mu g} \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}} (1-j)$$

Ne segue allora che:

$$k_R \cong k_j \cong \sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}$$

Ne deriva subito:

$$\zeta_R \cong \zeta_j \cong \sqrt{\frac{\omega\mu}{2g}}$$

Nel caso particolare di un'onda piana uniforme in un buon conduttore, ne segue che β e α hanno modulo quasi uguale.

Si consideri ora il caso di un mezzo generico. Si ha:

$$k_j = \frac{\omega\mu g}{2k_R} \Rightarrow k_R^2 - \left(\frac{\omega\mu g}{2k_R}\right)^2 = \omega^2\mu\epsilon$$

$$4k_R^4 - 4k_R^2\omega^2\mu\epsilon - \omega^2\mu^2g^2 = 0$$

Si tratta di un'equazione biquadratica, per cui:

$$k_R^2 = \frac{1}{8} \left[4\omega^2\mu\epsilon \pm \sqrt{16\omega^4\mu^2\epsilon^2 + 16\omega^2\mu^2g^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\omega^2\mu\epsilon \pm \sqrt{\omega^4\mu^2\epsilon^2 \left(1 + \frac{g^2}{\omega^2\epsilon^2} \right)} \right] = \frac{\omega^2\mu\epsilon}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\epsilon} \right)^2} \right]$$

Scartando la determinazione con il meno, poiché dà luogo a un valore negativo per k_R^2 , si ha:

$$k_R = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right]}$$

Si ritrovano i casi particolari visti in precedenza (buon dielettrico e buon conduttore).

Per quanto riguarda k_j si ha in modo analogo:

$$k_R = \frac{\omega \mu g}{2k_j} \Rightarrow \left(\frac{\omega \mu g}{2k_j} \right)^2 - k_j^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$4k_j^4 + 4k_j^2 \omega^2 \mu \epsilon - \omega^2 \mu^2 g^2 = 0$$

Per cui:

$$k_j^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega \epsilon} \right)^2} \right]$$

avendo anche ora scartato la determinazione negativa, e infine:

$$k_j = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{g}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right]}$$

Si ritrovano anche ora i casi particolari già visti.

Come già detto, nel caso delle onde piane uniformi le espressioni ricavate sono anche quelle per β e α rispettivamente.

Si noti come β e α abbiano entrambe le dimensioni fisiche di m^{-1} . Tuttavia, per ricordare che β si riferisce alla fase (esponenziale immaginario) si parla spesso di rad/m, mentre per sottolineare che α è legato al modulo (esponenziale reale) si parla di Neper/m, o Np/m. Per l'attenuazione si usa anche la notazione in decibel a metro (dB/m), secondo la definizione (supponendo z la direzione di propagazione dell'onda):

$$dB(z) = 20 \log_{10} (e^{-\alpha z}) = 20 (-\alpha z) \log_{10} (e) \cong 20 (-\alpha z) (0.434) = -8.68 (\alpha z)$$

Per cui (per lunghezza unitaria): $\alpha_{dB/m} \cong 8.68 \alpha_{Np/m}$

Infine dalle espressioni per β nei vari casi si ricavano la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/\beta$ e la velocità di fase $v_p = \omega/\beta$.

Si definisce inoltre profondità di pelle ("skin depth") δ la quantità: $\delta = 1/\alpha$, ossia la distanza percorsa da un'onda piana uniforme per ridursi in modulo di $e^{-1} \cong 0.368$, ossia a circa il 36.8%.

Un modo per caratterizzare le perdite di un certo mezzo è l'introduzione della cosiddetta tangente di perdita ("loss tangent") $\tan\delta$ (non si confonda δ con la profondità di pelle). Si tratta di un parametro adimensionale definito dalla (rapporto fra parte immaginaria e parte reale):

$$\epsilon_c = \epsilon(1 - j\tan\delta) = \epsilon - j\epsilon\tan\delta$$

per cui $\epsilon\tan\delta = g/\omega \Rightarrow \tan\delta_g = g/\omega\epsilon$, ove il pedice g si riferisce alle perdite ohmiche. Usualmente per un certo materiale il costruttore assegna o la conducibilità (S/m) oppure la loss tangent.

In modo analogo, tangenti di perdita possono definirsi per le perdite dielettriche e magnetiche. In questo caso si porrà:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega)$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega)$$

ove al solito una parte immaginaria negativa corrisponde effettivamente a potenza dissipata (come si vede a proposito del teorema di Poynting). Si avrà:

$$\tan\delta_\epsilon = \epsilon''/\epsilon', \text{ oppure } \tan\delta_\mu = \mu''/\mu'$$

L'effetto di ϵ'' può essere paragonato a quello di una conducibilità (del resto $\omega\epsilon''$ ha le stesse dimensioni di g), e si può definire una conducibilità equivalente $g + \omega\epsilon''$. Ad esempio nel riscaldamento a microonde dei cibi l'effetto prevalente è quello di ϵ'' . Inoltre il muscolo ha una più elevata ϵ'' della pelle e dei grassi, per cui i cibi vengono scaldati dal forno a microonde più all'interno che all'esterno. Per questo motivo anche non ci si accorge subito di essere "scaldati" a microonde, perché i sensori di temperatura si trovano all'esterno, sulla pelle.

Inoltre ad esempio il vetro e la plastica posseggono bassi valori di g (buoni isolanti), ma possono presentare notevoli perdite dielettriche.

Nel caso di mezzo dispersivo (e dissipativo) i sistemi di equazioni per k ed η non sono più validi, restano soltanto le definizioni.

Si noti che nel caso di un'onda piana uniforme che si propaghi in un certo mezzo di costanti secondarie k ed ζ , è possibile associare ad essa una linea di trasmissione equivalente, lungo la direzione di propagazione dell'onda. I parametri della linea (costante di propagazione ed impedenza caratteristica) vengono a coincidere con quelli del mezzo. Questa è una caratteristica delle onde TEM (come l'onda piana uniforme).

Si noti ancora che le funzioni $\varepsilon'(\omega)$ e $\varepsilon''(\omega)$ non sono indipendenti fra loro, ossia nota una delle due è possibile calcolare l'altra. Questo deriva dal fatto che la funzione complessa $\varepsilon(\omega)$ è olomorfa nel semipiano destro della variabile complessa $s=p+j\omega$. Non ci devono cioè essere poli nel semipiano destro (compreso l'asse immaginario). Si potrebbe vedere che tale proprietà è in generale conseguenza, in un sistema lineare ($\varepsilon(\omega)$ si può vedere come la funzione di trasferimento di un sistema lineare), delle ipotesi di stabilità (uscita limitata per ingressi limitati) e causalità (il vettore \tilde{D} in un certo istante è determinato solo dai valori del campo \tilde{E} per istanti precedenti).

Valgono allora in tali ipotesi le cosiddette relazioni di Kramers-Kronig:

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \varepsilon''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega [\varepsilon'(\omega') - \varepsilon_0]}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Relazioni analoghe valgono anche per $\mu(\omega)$.

Esse sono inoltre perfettamente analoghe alle relazioni fra parte reale e immaginaria delle funzioni impedenza.

Si noti infine che esiste un legame fra le relazioni di Kramers-Kronig e la trasformata di Hilbert (rispetto alla pulsazione). Si ha in particolare che $\epsilon'(\omega) - \epsilon_0 = -H(\epsilon''(\omega))$ e che $\epsilon''(\omega) = H(\epsilon'(\omega) - \epsilon_0)$.

Ricordando poi che $\epsilon'(\omega)$ è una funzione pari ed $\epsilon''(\omega)$ una funzione dispari (essendo $\epsilon(\omega)$ la trasformata di una funzione reale), dalle trasformate di Hilbert seguono le relazioni di Kramers-Kronig con semplici passaggi.

Concludendo, è possibile, da esperimenti di assorbimento, ricavare empiricamente $\epsilon''(\omega)$ e quindi calcolare $\epsilon'(\omega)$.

Si noti infine che non può esistere un mezzo (a parte il vuoto) che sia dispersivo e non dissipativo per ogni ω , ossia avente la parte immaginaria identicamente nulla. Questo porterebbe infatti, dalla prima relazione di Kramers-Kronig, ad avere la parte reale coincidente con ϵ_0 .

Onde piane uniformi

Come è noto, si hanno onde piane uniformi in due casi: quando il vettore di attenuazione $\underline{\alpha}$ è nullo, e quando esso è parallelo al vettore di fase $\underline{\beta}$. Nel primo caso il vettore di propagazione \underline{k} è reale, nel secondo caso è complesso, ma polarizzato linearmente (versore reale).

Si è visto che in entrambi i casi si ha un'onda TEM (trasversa elettromagnetica) rispetto alla direzione di propagazione, ossia il piano di polarizzazione per i vettori \underline{E} ed \underline{H} (in generale polarizzati ellitticamente) è ortogonale alla direzione di propagazione.

Considerando le posizioni:

$$\begin{aligned} \underline{E}_0 &= \underline{E}_R + j\underline{E}_j & \underline{H}_0 &= \underline{H}_R + j\underline{H}_j \\ \text{con } \underline{E} &= \underline{E}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} & \underline{H} &= \underline{H}_0 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} \end{aligned}$$

non è detto in generale che, presi separatamente, i vettori reali \underline{E}_R e \underline{H}_R (ed i vettori reali \underline{E}_j e \underline{H}_j) rappresentino un'onda piana, una volta moltiplicati per l'esponenziale. Occorre come è noto verificare che sia:

$$1) \quad \underline{k} \cdot \underline{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c,$$

affinché si tratti di una soluzione dell'equazione di Helmholtz (condizione di separabilità). Ovviamente tale condizione in questo caso è verificata, essendo per ipotesi la coppia \underline{E} , \underline{H} un'onda piana.

$$2) \quad \underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0,$$

affinché si tratti di una soluzione delle equazioni di Maxwell (condizione aggiuntiva $\nabla \cdot \underline{E} = 0$). Nel caso dell'onda piana uniforme si ha:

$$(\underline{E}_R + j\underline{E}_j) \cdot \underline{k} = (\underline{E}_R + j\underline{E}_j) \cdot k \underline{\beta}_0 = 0$$

ove $k = \beta - j\alpha$. Da cui:

$$\underline{E}_R \cdot \underline{\beta}_0 = 0$$

$$\underline{E}_j \cdot \underline{\beta}_0 = 0$$

e quindi $\underline{k} \cdot \underline{E}_R = 0$ e $\underline{k} \cdot \underline{E}_j = 0$

3) resta a questo punto determinato $\underline{H}_0 = (1/\omega\mu) \underline{k} \times \underline{E}_0$, per cui occorre controllare che anche questa sia verificata. Nel caso in cui $\alpha=0$ si ha:

$$\underline{H}_R + j\underline{H}_j = (1/\omega\mu) \underline{\beta} \times (\underline{E}_R + j\underline{E}_j)$$

Separando parte reale e parte immaginaria:

$$\underline{H}_R = (1/\omega\mu) \underline{\beta} \times \underline{E}_R = (1/\omega\mu) \underline{k} \times \underline{E}_R$$

$$\underline{H}_j = (1/\omega\mu) \underline{\beta} \times \underline{E}_j = (1/\omega\mu) \underline{k} \times \underline{E}_j$$

per cui ho effettivamente scomposto in due onde piane, è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti.

Nel caso invece in cui $\alpha // \underline{\beta}$ le prime due condizioni sono ancora verificate, mentre dalla terza si ha:

$$(\underline{\beta} - j\alpha) \times (\underline{E}_R + j\underline{E}_j) = \omega\mu (\underline{H}_R + j\underline{H}_j), \text{ e separando parte reale e parte immaginaria:}$$

$$\underline{\beta} \times \underline{E}_R + \alpha \times \underline{E}_j = \omega\mu \underline{H}_R$$

$$-\alpha \times \underline{E}_R + \underline{\beta} \times \underline{E}_j = \omega\mu \underline{H}_j$$

In questo caso le equazioni non si separano, e non si può concludere che $\underline{k} \times \underline{E}_R = \omega\mu \underline{H}_R$ e $\underline{k} \times \underline{E}_j = \omega\mu \underline{H}_j$. Non è possibile scomporre in questo modo in due onde piane. Per ottenere la scomposizione di \underline{E}_0 e \underline{H}_0 in due vettori polarizzati linearmente (anche se non più reali), si può prendere la direzione di propagazione come asse z, il piano di polarizzazione come piano xy, e porre:

$$\underline{E}_0 = E_{0x} \underline{x}_0 + E_{0y} \underline{y}_0 = \underline{E}_{0x} + \underline{E}_{0y}$$

$$\underline{H}_0 = H_{0x} \underline{x}_0 + H_{0y} \underline{y}_0 = \underline{H}_{0x} + \underline{H}_{0y}$$

con \underline{E}_{0x} , \underline{E}_{0y} , \underline{H}_{0x} e \underline{H}_{0y} in generale complessi, ma ovviamente polarizzati linearmente.

Si considerino ora le coppie \underline{E}_{0x} , \underline{H}_{0y} e \underline{E}_{0y} , \underline{H}_{0x} e si controlli che si tratti separatamente di onde piane. Essendo \underline{k} diretto lungo z si ha (condizione 2):

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_{0x} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{k} \cdot \underline{E}_{0y} = 0$$

Per quanto riguarda la condizione 3) si ha, dalla: $\underline{k} \times \underline{E}_0 = \omega\mu \underline{H}_0$ che:

$$\underline{k} \times (\underline{E}_{ox} + \underline{E}_{oy}) = \omega \mu (\underline{H}_{ox} + \underline{H}_{oy})$$

$$\underline{k} \times \underline{E}_{ox} + \underline{k} \times \underline{E}_{oy} = \omega \mu \underline{H}_{ox} + \omega \mu \underline{H}_{oy}$$

Il vettore $\underline{k} \times \underline{E}_{ox}$ è polarizzato linearmente nella direzione y , mentre $\underline{k} \times \underline{E}_{oy}$ nella direzione x . Per cui uguagliando separatamente si ha:

$$\underline{k} \times \underline{E}_{ox} = \omega \mu \underline{H}_{oy}$$

$$\underline{k} \times \underline{E}_{oy} = \omega \mu \underline{H}_{ox}$$

Si è dunque visto come sia sempre possibile, nel caso dell'onda piana uniforme, scomporre una generica polarizzazione ellittica in due (onde piane) polarizzate linearmente. Per cui non si perde in generalità a considerare onde piane uniformi polarizzate linearmente.

Sempre per un'onda piana uniforme, dalla:

$$\underline{H} = (1/\omega \mu) \underline{k} \times \underline{E}$$

segue:

$$\underline{H} = (k/\omega \mu) \underline{\beta}_o \times \underline{E} = (\epsilon_c/\mu)^{1/2} \underline{\beta}_o \times \underline{E} = (1/\zeta) \underline{\beta}_o \times \underline{E} = (1/\zeta) \underline{k}_o \times \underline{E}$$

essendo ζ l'impedenza caratteristica del mezzo, in generale complessa (nel vuoto si ha $\zeta_o \cong 120\pi \Omega \cong 377 \Omega$). Le dimensioni fisiche sono quelle di un'impedenza, in quanto \underline{H} ha dimensioni (nel caso dei fasori) A/m, \underline{E} ha dimensioni V/m e il versore è adimensionale.

In termini di campo elettrico si ha invece:

$$\underline{E} = (1/\omega \epsilon_c) \underline{H} \times \underline{k} = (k/\omega \epsilon_c) \underline{H} \times \underline{\beta}_o = (\mu/\epsilon_c)^{1/2} \underline{H} \times \underline{\beta}_o = \zeta \underline{H} \times \underline{\beta}_o = \zeta \underline{H} \times \underline{k}_o$$

Si noti tuttavia che queste relazioni con l'impedenza possono scriversi anche per un'onda piana generica (non uniforme), in cui cioè il vettore complesso \underline{k} non sia polarizzato linearmente. Si può sempre porre, infatti:

$\underline{k} = k \underline{k}_o = \omega \sqrt{\mu \epsilon_c} \underline{k}_o$, ove però \underline{k}_o , definito dalla $\underline{k}_o = \underline{k}/(\omega \sqrt{\mu \epsilon_c})$, sarà in generale complesso. Il vettore \underline{k} sicuramente non è polarizzato circolarmente, perché $\underline{k} = \underline{\beta} - j \underline{\alpha}$, con $\underline{\beta}$ ed $\underline{\alpha}$ di modulo diverso.

Il vettore \underline{k}_o sarà di modulo in generale non unitario, ma di ampiezza (complessa) unitaria. Sarà inoltre sempre vero che:

$$\underline{k}_0 \cdot \underline{E} = 0 \quad \text{e} \quad \underline{k}_0 \cdot \underline{H} = 0$$

Anche per i vettori \underline{E} ed \underline{H} , che non saranno in generale polarizzati linearmente, si potrà però sempre scrivere (a parte il caso di polarizzazione circolare):

$$\underline{E} = E \underline{e}_0 \quad \underline{H} = H \underline{h}_0, \text{ con:}$$

$$\underline{k}_0 \cdot \underline{e}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \underline{k}_0 \cdot \underline{h}_0 = 0$$

con E ed H ampiezze complesse.

Scrivendo allora la relazione per il campo elettrico:

$$E \underline{e}_0 = \zeta H \underline{h}_0 \times \underline{k}_0$$

si ricava, uguagliando la parte scalare e quella vettoriale:

$$E = \zeta H \underline{e}_0 = \underline{h}_0 \times \underline{k}_0$$

Quindi fra le ampiezze complesse la relazione di impedenza è valida in generale.

Dalla relazione vettoriale segue, moltiplicando vettorialmente a sinistra per \underline{k}_0 :

$$\underline{k}_0 \times (\underline{h}_0 \times \underline{k}_0) = (\underline{k}_0 \cdot \underline{k}_0) \underline{h}_0 - (\underline{k}_0 \cdot \underline{h}_0) \underline{k}_0 = \underline{h}_0 = \underline{k}_0 \times \underline{e}_0$$

Si ha poi:

$$\underline{e}_0 \times \underline{h}_0 = \underline{e}_0 \times (\underline{k}_0 \times \underline{e}_0) = (\underline{e}_0 \cdot \underline{e}_0) \underline{k}_0 - (\underline{e}_0 \cdot \underline{k}_0) \underline{e}_0 = \underline{k}_0$$

Sostanzialmente i 3 pseudoversori \underline{e}_0 , \underline{h}_0 , \underline{k}_0 si comportano come \underline{x}_0 , \underline{y}_0 , \underline{z}_0 rispettivamente nei prodotti vettoriali.

Mentre la relazione di impedenza fra le ampiezze complesse è vera sempre, la relazione analoga fra i moduli vale se \underline{k}_0 è reale (\underline{k} polarizzato linearmente, ossia onda piana uniforme). Infatti in questo caso, dalla:

$$\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{\beta}_0 \quad \text{con} \quad \underline{H} \cdot \underline{\beta}_0^* = \underline{H} \cdot \underline{\beta}_0 = 0$$

si può concludere che il modulo del prodotto vettoriale è il prodotto dei moduli, e scrivere:

$$|\underline{E}| = |\zeta| |\underline{H} \times \underline{\beta}_0| = |\zeta| |\underline{H}| |\underline{\beta}_0| = |\zeta| |\underline{H}|$$

ove ζ è complessa nel caso $\alpha \neq 0$, reale nel caso $\alpha = 0$.

Considerando ora i corrispondenti vettori nel dominio del tempo, si possono fare alcune osservazioni. Si è visto che per i vettori complessi si ha, per un'onda piana del tutto generale:

$$\underline{E} \cdot \underline{H} = 0 \quad \underline{E}_0 \cdot \underline{H}_0 = 0.$$

Nel dominio del tempo si ha invece:

$$\begin{aligned} \underline{E}(t) &= \text{Re}[\underline{E} e^{j\omega t}] = \text{Re}[\underline{E}_0 e^{-j\beta \cdot \underline{r}} e^{-\alpha \cdot \underline{r}} e^{j\omega t}] = e^{-\alpha \cdot \underline{r}} \text{Re}[(\underline{E}_R + j\underline{E}_j) e^{-j\beta \cdot \underline{r}} e^{j\omega t}] = \\ &= e^{-\alpha \cdot \underline{r}} [\underline{E}_R \cos(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) - \underline{E}_j \sin(\omega t - \beta \cdot \underline{r})] \end{aligned}$$

e analogamente:

$$\underline{H} = e^{-\alpha \cdot \underline{r}} [\underline{H}_R \cos(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) - \underline{H}_j \sin(\omega t - \beta \cdot \underline{r})]$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \underline{E}(t) \cdot \underline{H}(t) &= e^{-2\alpha \cdot \underline{r}} [\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R \cos^2(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) - \underline{E}_R \cdot \underline{H}_j \cos(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) \sin(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) + \\ &- \underline{E}_j \cdot \underline{H}_R \sin(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) \cos(\omega t - \beta \cdot \underline{r}) + \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j \sin^2(\omega t - \beta \cdot \underline{r})] \end{aligned}$$

D'altra parte, dalla $\underline{E}_0 \cdot \underline{H}_0 = 0$ segue:

$$(\underline{E}_R + j\underline{E}_j) \cdot (\underline{H}_R + j\underline{H}_j) = 0$$

ossia:

$$\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R + j\underline{E}_R \cdot \underline{H}_j + j\underline{E}_j \cdot \underline{H}_R - \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j = 0$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ha:

$$\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j, \quad \underline{E}_R \cdot \underline{H}_j = -\underline{E}_j \cdot \underline{H}_R$$

Per cui risulta:

$$\underline{E}(t) \cdot \underline{H}(t) = e^{-2\alpha \cdot \underline{r}} \underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = e^{-2\alpha \cdot \underline{r}} \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j$$

per un'onda piana del tutto generale. Si noti che tale prodotto scalare non dipende dal tempo.

Nel caso generale non sarà vero che $\underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j = 0$, per cui i vettori nel tempo non sono ortogonali. Neppure nel caso in cui l'onda piana sia uniforme con $\alpha \neq 0$. Se invece si ha $\alpha = 0$, dalle relazioni viste in precedenza segue:

$$\beta \times \underline{E}_R = \omega \mu \underline{H}_R$$

$$\beta \times \underline{E}_j = \omega \mu \underline{H}_j \Rightarrow \underline{E}_R \cdot \underline{H}_R = 0 = \underline{E}_j \cdot \underline{H}_j$$

per cui in questo caso i vettori nel tempo sono ad ogni istante ortogonali fra loro.

Si consideri ora la relazione di impedenza per i vettori nel dominio del tempo.

Si è visto che si può decomporre la generica onda piana uniforme che si propaghi nella direzione z in due onde piane polarizzate linearmente, date da \underline{E}_{ox} , \underline{H}_{oy} e \underline{E}_{oy} , \underline{H}_{ox} . Valgono le relazioni fra le ampiezze complesse:

$$E_{ox} = \zeta H_{oy} \quad E_{oy} = -\zeta H_{ox}$$

Nella seconda equazione si è usato il segno meno, il che corrisponde a prendere il versore ($-\underline{x}_o$) per mantenere il carattere destro della terna \underline{e}_o , \underline{h}_o , \underline{k}_o .

Considerando ora i vettori nel dominio del tempo, si ha per il caso privo di perdite ($\alpha=0$):

$$\underline{E}(t) = E_x(t)\underline{x}_o + E_y(t)\underline{y}_o, \text{ con:}$$

$$E_x(t) = \text{Re}[E_{ox} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = E_{oxR} \cos(\omega t - \beta z) - E_{oxj} \sin(\omega t - \beta z)$$

$$E_y(t) = \text{Re}[E_{oy} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = E_{oyR} \cos(\omega t - \beta z) - E_{oyj} \sin(\omega t - \beta z)$$

ove, essendo ζ reale, si ha:

$$E_{oxR} = \zeta H_{oyR} \quad E_{oyR} = -\zeta H_{oxR}$$

$$E_{oxj} = \zeta H_{oyj} \quad E_{oyj} = -\zeta H_{oxj}$$

Per il campo magnetico si ha:

$$\underline{H}(t) = H_x(t)\underline{x}_o + H_y(t)\underline{y}_o, \text{ con:}$$

$$H_x(t) = \text{Re}[H_{ox} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = H_{oxR} \cos(\omega t - \beta z) - H_{oxj} \sin(\omega t - \beta z)$$

$$H_y(t) = \text{Re}[H_{oy} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = H_{oyR} \cos(\omega t - \beta z) - H_{oyj} \sin(\omega t - \beta z)$$

Calcolando i moduli nel dominio del tempo si ha:

$$|\underline{H}(t)|^2 = H_x^2 + H_y^2 = [H_{oxR} \cos(\omega t - \beta z) - H_{oxj} \sin(\omega t - \beta z)]^2 + [H_{oyR} \cos(\omega t - \beta z) - H_{oyj} \sin(\omega t - \beta z)]^2$$

Per il campo elettrico invece:

$$|\underline{E}(t)|^2 = E_x^2 + E_y^2 = [\zeta H_{oyR} \cos(\omega t - \beta z) - \zeta H_{oyj} \sin(\omega t - \beta z)]^2 +$$

$$+[-\zeta H_{oxR} \cos(\omega t - \beta z) + \zeta H_{oxj} \sin(\omega t - \beta z)]^2 = \zeta^2 |\underline{H}(t)|^2 \Rightarrow |\underline{E}(t)| = \zeta |\underline{H}(t)|$$

Riassumendo, i due vettori $\underline{E}(t)$ e $\underline{H}(t)$ sono ad ogni istante ortogonali, e i moduli differiscono per un fattore costante ζ .

La dimostrazione non è più valida nel caso di $\alpha \neq 0$.

Onde piane TE, TM e TEM

E' noto che un'onda piana uniforme è sempre un'onda TEM rispetto alla direzione di propagazione. D'altra parte risulta vero anche il viceversa, nell'ambito delle onde piane. Ossia un'onda piana TEM rispetto alla direzione di propagazione (che è in generale la direzione del vettore $\underline{\beta}$, per cui si ipotizza $\underline{\beta} \cdot \underline{E} = 0$ e $\underline{\beta} \cdot \underline{H} = 0$) risulta uniforme, ossia $\underline{\beta} // \underline{\alpha}$.

Infatti, dalle relazioni generali, sempre valide per onde piane:

$$\underline{k} \cdot \underline{E} = 0 \quad \underline{k} \cdot \underline{H} = 0, \text{ segue:}$$

$$(\underline{\beta} - j\alpha) \cdot \underline{E} = \underline{\beta} \cdot \underline{E} - j\alpha \cdot \underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \underline{E} = 0$$

$$(\underline{\beta} - j\alpha) \cdot \underline{H} = \underline{\beta} \cdot \underline{H} - j\alpha \cdot \underline{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \underline{H} = 0$$

Se per assurdo non fosse $\underline{\beta} // \underline{\alpha}$, allora questi due vettori reali individuerebbero un piano, e dovendo essere $\underline{\beta} \cdot \underline{E} = 0$ e $\alpha \cdot \underline{E} = 0$, il vettore \underline{E} dovrebbe essere polarizzato linearmente nella direzione ortogonale a tale piano. La stessa cosa varrebbe per \underline{H} , che risulterebbe polarizzato linearmente nella stessa direzione di \underline{E} . Ma allora non potrebbe essere verificata l'altra relazione generale $\underline{E} \cdot \underline{H} = 0$.

E' noto anche che se si considera un'onda piana in cui il campo elettrico sia polarizzato linearmente, tale onda risulta un'onda TE rispetto alla direzione di propagazione.

Si noti che ciò è vero sia se $g=0$ (e allora $\underline{\alpha} \perp \underline{\beta}$, altrimenti se fosse $\underline{\alpha} = 0$ si ricadrebbe nel caso TEM), sia se $g \neq 0$ (e $\underline{\alpha}$ non parallelo a $\underline{\beta}$). Infatti, in ogni caso, se \underline{E} è polarizzato linearmente si può scrivere per \underline{E}_0 :

$$\underline{E}_o = \underline{E}_R(1+jb)$$

per cui dalla relazione generale $\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0$ segue:

$$(\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) \cdot \underline{E}_R(1+jb) = 0, \text{ da cui } \underline{\beta} \cdot \underline{E}_R = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta} \cdot \underline{E} = 0 \text{ (e anche } \underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0)$$

Per il campo magnetico è noto che esso risulta polarizzato (in generale ellitticamente) nel piano individuato da $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$.

Si può vedere che vale anche il viceversa, ossia se un'onda piana è TE rispetto alla direzione di propagazione (ossia $\underline{E} \cdot \underline{\beta} = 0$) allora il campo elettrico risulta polarizzato linearmente lungo la direzione ortogonale al piano individuato da $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$. Infatti ovviamente, dalla $\underline{k} \cdot \underline{E} = 0$ segue:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{E} - j\underline{\alpha} \cdot \underline{E} = 0 \Rightarrow \underline{E} \cdot \underline{\alpha} = 0$$

Analogamente si può vedere che per il campo magnetico l'ipotesi di essere polarizzato linearmente è equivalente all'avere un'onda TM rispetto alla direzione di propagazione.

Si noti inoltre che le onde piane TE e TM hanno soltanto tre componenti di campo (delle sei) diverse da zero, e cioè la componente di \underline{E} (o di \underline{H} rispettivamente) ortogonale al piano individuato da $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$, e le due componenti di \underline{H} (o di \underline{E}) sul piano individuato da $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$. Questo fatto non è vero, ad esempio, per i modi TE e TM in una guida d'onda (tranne particolari valori per gli indici di modo).

Si noti infine che si possono definire anche campi TE e TM (rispetto ad una arbitraria direzione) in modo ancor più generale (che non siano necessariamente onde piane), e si può dimostrare che in generale un arbitrario campo elettromagnetico si può esprimere come somma di un campo TE e di uno TM. Ciascuno di tali campi può inoltre venir ricavato a partire da una funzione scalare che soddisfa l'equazione di Helmholtz omogenea.

Vettore di Poynting per onde piane

Si consideri ora l'espressione del vettore di Poynting per una generica onda piana. Si ha:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= (1/2) \underline{E} \times \underline{H}^* = (1/2) \underline{E} \times [1/(\omega\mu) \underline{k} \times \underline{E}]^* = (1/2\omega\mu^*) \underline{E} \times (\underline{k}^* \times \underline{E}^*) = \\ &= (1/2\omega\mu^*) \underline{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_0^* e^{j\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}}) = (1/2\omega\mu^*) e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{j\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}} \underline{E}_0 \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_0^*) = \\ &= (1/2\omega\mu^*) e^{-j\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} e^{j\mathbf{\beta} \cdot \mathbf{r}} e^{-\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{E}_0 \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_0^*) = \\ &= (1/2\omega\mu^*) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \underline{E}_0 \times (\underline{k}^* \times \underline{E}_0^*) \end{aligned}$$

Dalla regola del doppio prodotto vettoriale segue:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= (1/2\omega\mu^*) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} [(\underline{E}_0 \cdot \underline{E}_0^*) \underline{k}^* - (\underline{E}_0 \cdot \underline{k}^*) \underline{E}_0^*] = (1/2\omega\mu^*) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} \\ &[|\underline{E}_0|^2 (\mathbf{\beta} + j\alpha) - (\underline{E}_0 \cdot \underline{k}^*) \underline{E}_0^*] \end{aligned}$$

In modo analogo si poteva calcolare \underline{P} in funzione del solo campo magnetico, ottenendosi:

$$\underline{P} = (1/2\omega\epsilon_c) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} [|\underline{H}_0|^2 (\mathbf{\beta} - j\alpha) - (\underline{H}_0 \cdot \underline{k}) \underline{H}_0]$$

Considerando di nuovo la prima espressione, si vede che \underline{P} ha una parte reale (per mezzi non dispersivi, o comunque non dissipativi) diretta come $\mathbf{\beta}$ (direzione di propagazione), una parte immaginaria diretta come α , oltre a un termine complesso, dato da:

$$(-1/2\omega\mu^*) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}} (\underline{E}_0 \cdot \underline{k}^*) \underline{E}_0^*$$

A questo proposito si noti ancora una volta che la condizione (sempre vera) $\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$ non implica in generale che sia $\underline{E}_0 \cdot \underline{k}^* = 0$. Questo però si verifica, come si è detto, se almeno uno dei due vettori \underline{E}_0 e \underline{k} è polarizzato linearmente (oppure in particolare è reale). Il caso di \underline{E}_0 polarizzato linearmente si è visto che coincide con il caso dell'onda piana TE (rispetto alla direzione di $\mathbf{\beta}$), mentre \underline{k} polarizzato linearmente corrisponde all'onda TEM. In tali situazioni rimane:

$$\underline{P} = (1/2\omega\mu^*) |\underline{E}_0|^2 (\mathbf{\beta} + j\alpha) e^{-2\alpha \cdot \mathbf{r}}$$

Analogamente dall'espressione di \underline{P} in funzione di \underline{H} si vede che nel caso TEM o nel caso TM (\underline{H}_0 polarizzato linearmente) si ha:

$$\underline{P} = (1/2\omega\epsilon_c) |\underline{H}_0|^2 (\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}}$$

Nel caso particolare di conducibilità g nulla, $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ risultano ortogonali.

Esaminando ancora l'espressione in funzione di \underline{E} , si può dimostrare (per μ reale) che il termine complesso è tale che la sua parte reale è ortogonale ad $\underline{\alpha}$, mentre la sua parte immaginaria è ortogonale a $\underline{\beta}$.

Quindi si può scrivere in generale:

$$\underline{P} = (1/2\omega\mu) |\underline{E}_0|^2 \underline{\beta} e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}} + j (1/2\omega\mu) |\underline{E}_0|^2 \underline{\alpha} e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}} + (\underline{Re} + j\underline{Im})$$

$$\text{con } \underline{Re} \cdot \underline{\alpha} = 0, \quad \underline{Im} \cdot \underline{\beta} = 0$$

Dunque nel caso di mezzi privi di perdite ($\underline{\beta} \perp \underline{\alpha}$), l'intera parte reale di \underline{P} non ha componenti lungo la direzione di $\underline{\alpha}$, e l'intera parte immaginaria di \underline{P} non ha componenti lungo la direzione di $\underline{\beta}$.

Questo però non significa che in generale la parte reale di \underline{P} sia diretta come $\underline{\beta}$ e che la parte immaginaria sia diretta come $\underline{\alpha}$: infatti il termine \underline{Re} non sarà in generale parallelo a $\underline{\beta}$, e il termine \underline{Im} non sarà parallelo ad $\underline{\alpha}$. Ciò si verifica tuttavia nei casi TE, TM e TEM, casi in cui il termine $(\underline{Re} + j\underline{Im})$ si annulla.

E' comunque improprio per inciso associare senza precauzioni la parte reale del vettore di Poynting ad un flusso di potenza attiva, la parte immaginaria alla potenza reattiva.

Tornando infine all'espressione iniziale di \underline{P} , si noti che per un'onda piana generica il vettore di Poynting dipende dalle coordinate solo tramite il fattore esponenziale $e^{-2\underline{\alpha} \cdot \underline{r}}$. Esso è quindi costante sul generico piano equiampiezza ortogonale ad $\underline{\alpha}$. Allora se \underline{P} ha una componente reale nella direzione di $\underline{\alpha}$, si ha per così dire un flusso infinito di potenza attiva attraverso il piano stesso.

Ciò avviene in mezzi con perdite, oppure quando $\underline{\alpha}=0$ (caso in cui tutto lo spazio è equiampiezza). Questo risultato assurdo è una conseguenza dei limiti di validità fisica della soluzione onda piana.

La singola onda piana infatti (come l'onda monocromatica nel caso della dipendenza dal tempo) contraddice il principio di indeterminazione di Heisenberg. Questo non toglie che una opportuna sovrapposizione di onde piane (spettro di onde piane) possa dar luogo a soluzioni fisicamente realizzabili (così come una sovrapposizione di onde monocromatiche può dar luogo ad una dipendenza dal tempo realistica).

Vettore di Poynting per incidenza normale di onde piane uniformi

Si considerino ora le espressioni per il vettore di Poynting nel caso di incidenza normale di un'onda piana uniforme (polarizzata linearmente) sulla superficie piana di separazione fra due mezzi diversi. Si supponga il mezzo 1 (da cui proviene l'onda) privo di perdite ($g_1=0$, $\underline{k}_1=\underline{\beta}_1$ reale, ed ζ_1 reale). L'asse z è entrante nel mezzo 2.

Nel caso di trasmissione totale, che però per incidenza normale può avvenire solo se il mezzo 2 è identico al mezzo 1, si avrebbe come è noto (indicando con gli apici i campi incidente e riflesso e supponendo il campo elettrico polarizzato lungo x):

$$\underline{E}_1 = \underline{E}^i = E_0 \underline{x}_0 e^{-j\beta z} = E_1(z) \underline{x}_0$$

$$\underline{H}_1 = \underline{H}^i = H_0 \underline{y}_0 e^{-j\beta z} = (E_0 / \zeta_1) \underline{y}_0 e^{-j\beta z} = H_1(z) \underline{y}_0$$

con $\beta = \beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$

Il vettore di Poynting avrebbe l'espressione:

$$\underline{P}_1 = (1/2) \underline{E}_1 \times \underline{H}_1^* = (1/2) \underline{z}_0 (E_0 e^{-j\beta z}) (E_0^* / \zeta_1 e^{j\beta z}) = (1/2) |E_0|^2 / \zeta_1 \underline{z}_0 =$$

$$= (1/2) E_1 H_1^* \underline{z}_0$$

Esso risulterebbe puramente reale (flusso di potenza attiva nella direzione z) e indipendente da z , potendosi quindi pensare (con le debite cautele) come la potenza media (in regime sinusoidale) trasportata dall'onda per unità di superficie normale a $\underline{\beta}$. Il fatto che \underline{P}_1 sia reale è legato al fatto che E_1 e H_1 sono in fase (essendo $E_1 = \zeta_1 H_1$, con ζ_1 reale, si ha $E_1 H_1^* = \zeta_1 H_1 H_1^* = \zeta_1 |H_1|^2$, reale). Si tratta di un'onda puramente progressiva.

Nel caso invece di riflessione totale (che per incidenza normale può avvenire solo se il mezzo 2 è un conduttore perfetto) si ha come è noto, nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}^i + \underline{E}^r = \underline{x}_0 (E_0^i e^{-j\beta_1 z} + E_0^r e^{j\beta_1 z}) = \underline{x}_0 E_0^i (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) =$$

$$= -\underline{x}_0 E_0^i 2j \sin(\beta_1 z) = E_1(z) \underline{x}_0$$

$$\underline{H}_1 = \underline{H}^i + \underline{H}^r = \underline{y}_0 (H_0^i e^{-j\beta_1 z} - H_0^r e^{j\beta_1 z}) = \underline{y}_0 H_0^i (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) = \underline{y}_0 H_0^i 2 \cos(\beta_1 z) = \underline{y}_0 E_0^i / (\zeta_1) 2 \cos(\beta_1 z) = H_1(z) \underline{y}_0$$

essendo $E_0^r = -E_0^i$, $H_0^r = -H_0^i$. Si noti che $H_1 \neq E_1 / \zeta_1$, perché la relazione di impedenza vale singolarmente per i campi incidente e riflesso, ma non per il campo somma.

Si ha per il vettore di Poynting:

$$\underline{P}_1 = -(1/2) \underline{z}_0 E_0^i 2j \sin(\beta_1 z) (E_0^{i*} / \zeta_1) 2 \cos(\beta_1 z) =$$

$$= -\underline{z}_0 |E_0^i|^2 / (\zeta_1) j 2 \sin(\beta_1 z) \cos(\beta_1 z) = -j |E_0^i|^2 / \zeta_1 \sin(2\beta_1 z) \underline{z}_0 = (1/2) E_1 H_1^* \underline{z}_0$$

Esso risulta dipendente da z e puramente immaginario (potenza reattiva). Ciò è legato al fatto che E_1 e H_1 sono in quadratura. Infatti se $E_1 = \pm j r H_1$, con r reale, si ha:

$E_1 H_1^* = \pm j r H_1 H_1^* = \pm j r |H_1|^2$, quantità puramente immaginaria. Si tratta di un'onda puramente stazionaria.

Negli altri casi $E_1 H_1^*$ risulta dotato sia di parte reale che di parte immaginaria. Si ha $E_1 = c H_1 = M e^{j\phi} H_1$, per cui:

$$E_1 H_1^* = M e^{j\phi} |H_1|^2$$

Nel caso generale, in cui non c'è riflessione totale, ma c'è ovviamente riflessione, si ha per i campi nel mezzo 1:

$$\underline{E}_1 = E_0^i \underline{x}_0 e^{-j\beta_1 z} + E_0^r \underline{x}_0 e^{j\beta_1 z} = E_1(z) \underline{x}_0$$

$$\underline{H}_1 = H_0^i \underline{y}_0 e^{-j\beta_1 z} - H_0^r \underline{y}_0 e^{j\beta_1 z} = E_0^i / (\zeta_1) \underline{y}_0 e^{-j\beta_1 z} - E_0^r / (\zeta_1) \underline{y}_0 e^{j\beta_1 z} = H_1(z) \underline{y}_0$$

Per cui si ha il vettore di Poynting:

$$\underline{P}_1 = \underline{z}_0 (1/2) (E_0^i e^{-j\beta_1 z} + E_0^r e^{j\beta_1 z}) (E_0^{i*} / (\zeta_1) e^{j\beta_1 z} - E_0^{r*} / (\zeta_1) e^{-j\beta_1 z}) =$$

$$= \underline{z}_0 (1/2 \zeta_1) (|E_0^i|^2 - |E_0^r|^2) - (j/\zeta_1) \underline{z}_0 \text{Im}[E_0^i E_0^{r*} e^{-2j\beta_1 z}]$$

Quindi la potenza reale (parte reale del vettore di Poynting) è la somma algebrica delle potenze (reali) associate all'onda incidente e all'onda riflessa. Inoltre vi è una parte immaginaria, che costituisce il termine

cosiddetto di interferenza, dovuto al fatto che il calcolo del vettore di Poynting non è ovviamente un'operazione lineare, quindi non si possono semplicemente sommare i vettori di Poynting delle due onde progressive componenti (incidente e riflessa). Si tratta in questo caso di un'onda in parte progressiva e in parte stazionaria. La parte immaginaria è la sola a comparire se $|E_o^i|=|E_o^r|$, ovvero $|q_E|=1$, riflessione totale.

Dunque nel caso generale, in cui c'è riflessione, ma non totale, per cui $|E_o^i|>|E_o^r|$, ci sarà un flusso di potenza reale nella direzione entrante nel mezzo 2 (come è ovvio, visto che bisogna alimentare in qualche modo l'onda trasmessa).

Per quanto riguarda invece la potenza reattiva, legata al termine:

$$\text{Im}[E_o^i E_o^{r*} e^{-2j\beta_1 z}]$$

si può vedere che tale quantità è nulla per ogni z se e solo se $E_o^r=0$, ossia assenza di onda riflessa. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \text{Im}[E_o^i E_o^{r*} e^{-2j\beta_1 z}] &= \text{Im}\{[\text{Re}(E_o^i E_o^{r*}) + j\text{Im}(E_o^i E_o^{r*})][\cos(2\beta_1 z) - j\sin(2\beta_1 z)]\} \\ &= -\text{Re}(E_o^i E_o^{r*})\sin(2\beta_1 z) + \text{Im}(E_o^i E_o^{r*})\cos(2\beta_1 z) \end{aligned}$$

Essendo il seno e il coseno linearmente indipendenti, l'annullarsi dell'espressione precedente per ogni z implica che sia:

$$\text{Re}(E_o^i E_o^{r*}) = \text{Im}(E_o^i E_o^{r*}) = 0$$

$$\Rightarrow E_o^i E_o^{r*} = 0 \Rightarrow E_o^r = 0, \text{ essendo per ipotesi } E_o^i \neq 0.$$

Rimane da osservare che la parte reale del vettore di Poynting nel mezzo 1, ossia:

$$Z_o(1/2)(|E_o^i|^2/\zeta_1 - |E_o^r|^2/\zeta_1)$$

è uguale al vettore di Poynting nel mezzo 2 (che risulta reale nell'ipotesi di assenza di perdite e supponendo il mezzo 2 indefinito). Si ha infatti:

$$P_2 = (1/2) \underline{E}_2 \times \underline{H}_2^* = (1/2) \underline{E}^t \times \underline{H}^{t*} = (1/2) |E_o^t|^2 / (\zeta_2) Z_o$$

D'altra parte, dalle condizioni di continuità all'interfaccia per le componenti tangenziali del campo elettromagnetico, si aveva:

$$E_o^t = E_o^i + E_o^r$$

$$H_o^t = H_o^i - H_o^r \Rightarrow E_o^t / \zeta_2 = (E_o^i - E_o^r) / \zeta_1$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} |E_o^t|^2 / \zeta_2 &= E_o^t E_o^{t*} / \zeta_2 = (1/\zeta_1) (E_o^i - E_o^r) (E_o^{i*} + E_o^{r*}) = \\ &= (1/\zeta_1) (|E_o^i|^2 + E_o^i E_o^{r*} - E_o^r E_o^{i*} - |E_o^r|^2) \end{aligned}$$

Si ricordi ora che $E_o^r = q_E E_o^i$, ove q_E è reale nelle nostre ipotesi di assenza di perdite, essendo (mezzo 2 indefinito) $q_E = (\zeta_2 - \zeta_1) / (\zeta_2 + \zeta_1)$, dunque E_o^r ed E_o^i sono in fase. Per cui:

$$E_o^r E_o^{i*} = q_E |E_o^i|^2,$$

quantità reale, e quindi uguale al suo coniugato $E_o^i E_o^{r*}$. Si ha allora:

$$|E_o^t|^2 / \zeta_2 = (1/\zeta_1) (|E_o^i|^2 - |E_o^r|^2), \text{ e infine:}$$

$$\underline{P}_2 = (1/2) (1/\zeta_1) (|E_o^i|^2 - |E_o^r|^2) \underline{Z}_o$$

come volevasi dimostrare, e in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

Si considerano ora le grandezze elettromagnetiche nel dominio del tempo, iniziando dal caso di polarizzazione lineare.

Nel caso di onda puramente progressiva (trasmissione totale), si ha in mezzi privi di perdite (ζ reale) e supponendo per semplicità (ma senza perdita di generalità) E_o reale positivo e $\beta = \beta_1$:

$$\underline{E}(z,t) = \text{Re}[\underline{E}(z)e^{j\omega t}] = \text{Re}[E_o \underline{x}_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = E_o \underline{x}_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Il caso di E_o genericamente complesso (cioè dotato di una fase diversa da zero e da π) può ricondursi semplicemente ad un cambiamento di origine nell'asse dei tempi. Per il campo magnetico si ha:

$$\underline{H}(z,t) = \text{Re}[(E_o/\zeta) \underline{y}_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = (E_o/\zeta) \underline{y}_o \cos(\omega t - \beta z)$$

Da cui, per il vettore di Poynting:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z,t) &= \underline{E}(t) \times \underline{H}(t) = \underline{z}_o E_o \cos(\omega t - \beta z) (E_o/\zeta) \cos(\omega t - \beta z) = \\ &= (E_o^2/\zeta) \underline{z}_o \cos^2(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

(Si ricordi che nel dominio della frequenza $\underline{P}=(1/2) (E_0^2/\zeta)z_0$ e che $\cos^2x=[1+\cos(2x)]/2$)

Ovviamente il vettore di Poynting complesso non è il fasore del vettore di Poynting nel dominio del tempo, poiché comporta un'operazione di prodotto vettoriale, non lineare rispetto al campo elettromagnetico.

Calcolando ora le densità di energia elettrica e magnetica si ha:

$$w_E(z,t)=(1/2) \epsilon \underline{E}(t) \cdot \underline{E}(t)=(1/2) \epsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - \beta z)$$

$$w_H(z,t)=(1/2) \mu \underline{H}(t) \cdot \underline{H}(t)=(1/2) \mu (E_0^2/\zeta^2) \cos^2(\omega t - \beta z) = \\ = (1/2) \epsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - \beta z) = w_E$$

Come si vede, le due densità di energia sono uguali, per cui l'energia totale è ripartita equamente nelle due forme.

Si può anche definire una velocità dell'energia. Infatti, pensando la velocità come lo spazio percorso dall'energia nell'unità di tempo, e considerando il flusso di energia attraverso una superficie di area unitaria, ortogonale alla direzione di propagazione, tale spazio percorso coincide numericamente con il volume occupato dall'energia che attraversa tale area nell'unità di tempo, cioè dalla potenza. Tale potenza non è altro che il modulo del vettore di Poynting. Per ottenere allora il volume cercato, basta dividere tale quantità per la densità di energia, ottenendo:

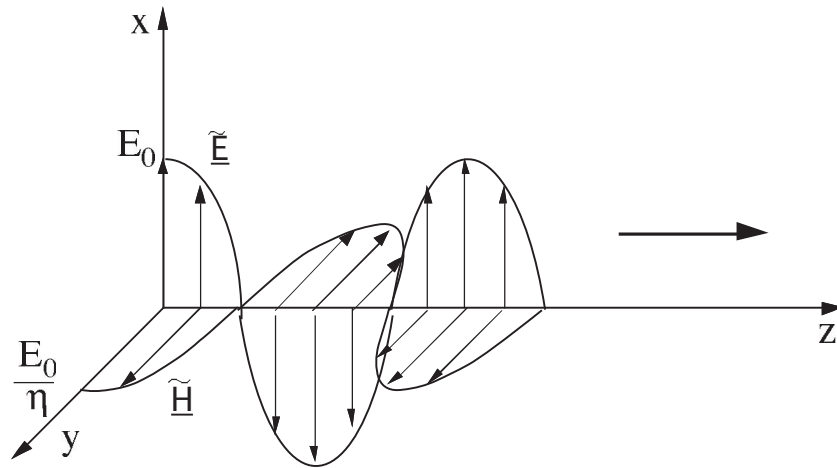
$$v_e = P(t)/[w_E(t)+w_H(t)] = [(E_0^2/\zeta) \cos^2(\omega t - \beta z)] / [\epsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - \beta z)] = 1/(\zeta \epsilon) = \\ = 1/\sqrt{\mu \epsilon} = v$$

Tale quantità v (velocità della luce nel mezzo) è anche, come è noto, la velocità di fase. Tuttavia in altri casi queste due velocità non sono necessariamente uguali. Si ricordi che la velocità dell'energia è vincolata ad essere al massimo uguale alla velocità della luce nel mezzo v , a differenza della velocità di fase, che può essere anche maggiore.

La configurazione del campo elettromagnetico è ad un certo istante ($t=0$) del tipo in figura seguente. Il periodo delle oscillazioni lungo z è

$2\pi/\beta=2\pi/(2\pi/\lambda)=\lambda$. I campi risultano in fase, ad un massimo di \underline{E} corrisponde un massimo di \underline{H} , e così per i minimi.

Al variare del tempo, le sagome si spostano rigidamente nel verso delle z positive, alla velocità di fase.

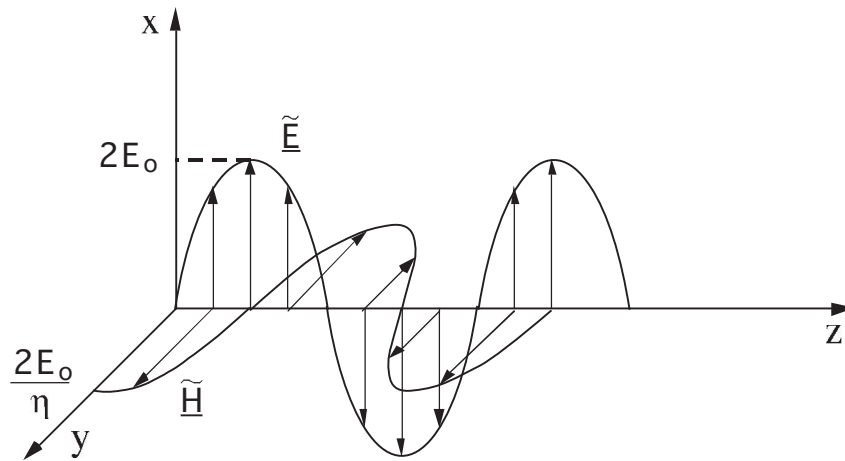


Si consideri ora il caso di onda puramente stazionaria (riflessione totale), sempre per polarizzazione lineare. Si ha nel dominio del tempo (supponendo $E_0=E_0^i$ reale positivo):

$$\underline{E}(z,t)=\text{Re}[-\underline{x}_0 E_0 2j \sin(\beta z) e^{j\omega t}] = 2\underline{x}_0 E_0 \sin(\beta z) \sin(\omega t)$$

$$\underline{H}(z,t)=\text{Re}[(E_0/\zeta) \underline{y}_0 2 \cos(\beta z) e^{j\omega t}] = (E_0/\zeta) 2\underline{y}_0 \cos(\beta z) \cos(\omega t)$$

La configurazione del campo elettromagnetico è ad un certo istante ($\omega t=\pi/4$) del tipo:



In questo caso i campi sono in quadratura, con $\underline{E}(t)$ che raggiunge il suo valore di picco quando $\underline{H}(t)$ vale zero, e viceversa. Inoltre, coerentemente con la natura stazionaria dell'onda, non c'è spostamento delle sagome nella direzione z .

In corrispondenza ai nodi dell'onda stazionaria per \underline{E} , ossia sui piani $\beta z = n\pi$, $z = n\pi / (2\pi/\lambda) = n\lambda/2$ con n intero, si ha per ogni t : $\underline{E} = 0$. Il fatto che il campo elettrico tangenziale sia nullo su un certo piano geometrico permetterebbe di sostituire a tale piano un piano fisico perfettamente conduttore. Infatti tale sostituzione non modifica le condizioni al contorno, e quindi non altera il campo elettromagnetico. Questo fa capire come nel caso dell'onda stazionaria si abbia una situazione a compartimenti stagni, senza influenze fra queste regioni di spessore $\lambda/2$.

Per il vettore di Poynting si ha:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z,t) &= 2Z_0 E_0 \sin(\beta z) \sin(\omega t) (E_0/\zeta) 2\cos(\beta z) \cos(\omega t) = \\ &= 4Z_0 (E_0^2/\zeta) \sin(\beta z) \cos(\beta z) \sin(\omega t) \cos(\omega t) = Z_0 (E_0^2/\zeta) \sin(2\beta z) \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Si trova conferma del fatto che il valor medio nel tempo è nullo (non c'è flusso di potenza in media).

Per le densità di energia si ha:

$$w_E(z,t) = (1/2) \epsilon 4 E_0^2 \sin^2(\beta z) \sin^2(\omega t) = 2\epsilon E_0^2 \sin^2(\beta z) \sin^2(\omega t)$$

$$w_H(z,t) = (1/2) \mu (E_o^2 / \zeta^2) 4 \cos^2(\beta z) \cos^2(\omega t) = 2 \epsilon E_o^2 \cos^2(\beta z) \cos^2(\omega t)$$

Come si vede, negli istanti in cui la densità di energia elettrica è massima, la densità di energia magnetica è zero, e viceversa. L'energia viene scambiata tra le forme elettrica e magnetica.

Si consideri ora il caso di polarizzazione circolare, e di onda puramente progressiva (trasmissione totale), ossia del tipo (fasore):

$$\underline{E} = (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z}$$

Il verso di polarizzazione è antiorario, se si guarda dal semipiano $z > 0$ (essendo $E_y = -jE_x$).

Il campo magnetico sarà dato dalla relazione:

$$\underline{H} = (1/\zeta) \underline{z}_o \times \underline{E}, \text{ ossia:}$$

$$\underline{H} = (1/\zeta) \underline{z}_o \times (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} = (1/\zeta) (\underline{y}_o + j\underline{x}_o) E_o e^{-j\beta z} = j(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (E_o/\zeta) e^{-j\beta z}$$

I campi \underline{E} ed \underline{H} sono in quadratura.

Nel dominio del tempo si ha (supponendo E_o reale):

$$\underline{E}(z,t) = \text{Re}[(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = E_o \underline{x}_o \cos(\omega t - \beta z) + E_o \underline{y}_o \sin(\omega t - \beta z)$$

(E_o sarebbe il raggio della circonferenza)

$$\begin{aligned} \underline{H}(z,t) &= \text{Re}[(1/\zeta) (\underline{y}_o + j\underline{x}_o) E_o e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] = \\ &= (E_o/\zeta) \underline{y}_o \cos(\omega t - \beta z) - (E_o/\zeta) \underline{x}_o \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

Le sagome di E_x e E_y , H_x e H_y si spostano rigidamente nel tempo con la velocità di fase. In questo caso una rappresentazione dinamica dell'onda ricorda un moto elicoidale nella direzione z . Si può verificare (come doveva essere, trattandosi di un'onda piana uniforme in mezzi privi di perdite) che si ha $\underline{E}(z,t) \cdot \underline{H}(z,t) = 0$ per ogni t .

Considerando ora il vettore di Poynting si ha:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z,t) &= [E_o \underline{x}_o \cos(\omega t - \beta z) + E_o \underline{y}_o \sin(\omega t - \beta z)] \times [E_o/(\zeta) \underline{y}_o \cos(\omega t - \beta z) + \\ &- E_o/(\zeta) \underline{x}_o \sin(\omega t - \beta z)] = \\ &= \underline{z}_o (E_o^2/\zeta) \cos^2(\omega t - \beta z) + \underline{z}_o (E_o^2/\zeta) \sin^2(\omega t - \beta z) = \underline{z}_o (E_o^2/\zeta) \end{aligned}$$

Per le densità di energia si ha:

$$w_E(z,t) = (1/2) \epsilon [E_o^2 \cos^2(\omega t - \beta z) + E_o^2 \sin^2(\omega t - \beta z)] = (1/2) \epsilon E_o^2$$

$$w_H(z,t) = (1/2) \mu [(E_o^2/\zeta^2) \cos^2(\omega t - \beta z) + (E_o^2/\zeta^2) \sin^2(\omega t - \beta z)] =$$

$$= (1/2) (\mu/\zeta^2) E_o^2 = (1/2) \epsilon E_o^2 = w_E$$

Come si vede, nel caso della polarizzazione circolare non c'è variazione delle densità di potenza e di energia nel tempo e nello spazio. Si ha un flusso stazionario di potenza. Per il vettore di Poynting complesso si ha:

$$\underline{P} = (1/2) \underline{E} \times \underline{H}^* = (1/2) (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} \times (-j)(\underline{x}_o + j\underline{y}_o) (E_o/\zeta) e^{j\beta z} =$$

$$= -(1/2) j (E_o^2/\zeta) (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) \times (\underline{x}_o + j\underline{y}_o) = -(1/2) j (E_o^2/\zeta) (j\underline{z}_o + j\underline{z}_o) = (E_o^2/\zeta) \underline{z}_o \underline{P}(z,t)$$

puramente reale, come doveva essere.

Nel caso invece di onda puramente stazionaria (riflessione totale) polarizzata circolarmente si ha (essendo $q_E = -1$):

$$\underline{E} = \underline{E}^i + \underline{E}^r = (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o e^{-j\beta z} - (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o e^{j\beta z} = (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o (e^{-j\beta z} - e^{j\beta z}) =$$

$$= (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (-2j) E_o \sin(\beta z)$$

$$\underline{H}^i = j(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) E_o / (\zeta) e^{-j\beta z}, \text{ come già calcolato.}$$

$$\underline{H}^r = (1/\zeta) (-\underline{z}_o) \times \underline{E}^r = (1/\zeta) (-\underline{z}_o) \times (-\underline{x}_o + j\underline{y}_o) E_o e^{j\beta z} =$$

$$= (1/\zeta) (\underline{y}_o + j\underline{x}_o) E_o e^{j\beta z} = j (E_o/\zeta) (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) e^{j\beta z}$$

Per cui:

$$\underline{H} = \underline{H}^i + \underline{H}^r = j(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (E_o/\zeta) e^{-j\beta z} + j(E_o/\zeta) (\underline{x}_o - j\underline{y}_o) e^{j\beta z} =$$

$$= j(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (E_o/\zeta) (e^{-j\beta z} + e^{j\beta z}) = j(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (E_o/\zeta) 2 \cos(\beta z) \quad (\text{in fase con } \underline{E})$$

Si calcolino ora i campi istantanei:

$$\underline{E}(z,t) = \text{Re}[(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (-2j) E_o \sin(\beta z) e^{j\omega t}] = -2E_o \sin(\beta z) \text{Re}[(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) j e^{j\omega t}] =$$

$$= -2\underline{y}_o E_o \sin(\beta z) \cos(\omega t) + 2\underline{x}_o E_o \sin(\beta z) \sin(\omega t) =$$

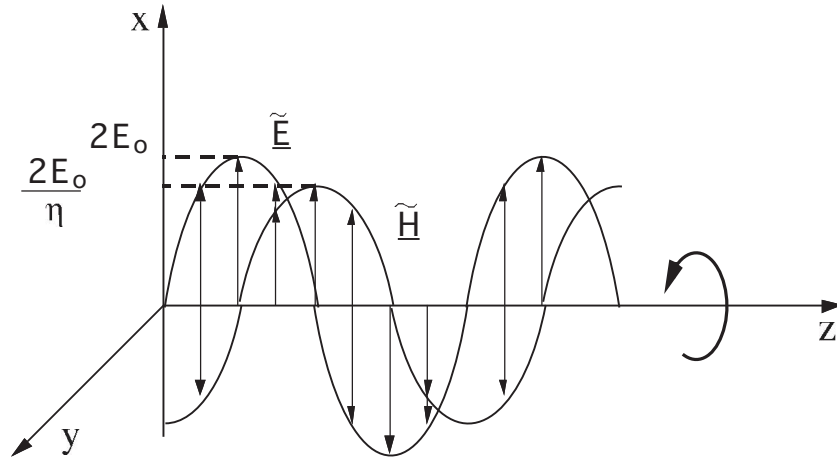
$$= 2E_o \sin(\beta z) [\underline{x}_o \sin(\omega t) - \underline{y}_o \cos(\omega t)]$$

$$\underline{H}(z,t) = \text{Re}[j(\underline{x}_o - j\underline{y}_o) (E_o/\zeta) 2 \cos(\beta z) e^{j\omega t}] =$$

$$= (E_o/\zeta) 2 \cos(\beta z) [-\underline{x}_o \sin(\omega t) + \underline{y}_o \cos(\omega t)] =$$

$$= -(E_o/\zeta) 2 \cos(\beta z) [\underline{x}_o \sin(\omega t) - \underline{y}_o \cos(\omega t)]$$

Si noti che in questo caso $\underline{E}(z,t)$ ed $\underline{H}(z,t)$ sono paralleli, e di modulo non dipendente da t (polarizzazione circolare). La configurazione del campo sarà del tipo (ad esempio per $\omega t = \pi/2$):



Per le varie quantità si ha:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= (1/2) \underline{E} \times \underline{H}^* = (1/2) (\underline{x}_0 - j\underline{y}_0) (-2j) E_0 \sin(\beta z) \times (-j) (\underline{x}_0 + j\underline{y}_0) (E_0/\zeta) 2 \cos(\beta z) = \\ &= -(E_0^2/\zeta) 2 \sin(\beta z) \cos(\beta z) (\underline{x}_0 - j\underline{y}_0) \times (\underline{x}_0 + j\underline{y}_0) = \\ &= -(E_0^2/\zeta) \sin(2\beta z) [(\underline{x}_0 - j\underline{y}_0) \times (\underline{x}_0 + j\underline{y}_0)] = -(E_0^2/\zeta) \sin(2\beta z) (j\underline{z}_0 + j\underline{z}_0) = \\ &= -2j (E_0^2/\zeta) \sin(2\beta z) \underline{z}_0 \end{aligned}$$

puramente immaginario, come doveva essere. Nel dominio del tempo si ha:

$$\begin{aligned} \underline{P}(z,t) &= \underline{E}(z,t) \times \underline{H}(z,t) = 2E_0 \sin(\beta z) [\underline{x}_0 \sin(\omega t) - \underline{y}_0 \cos(\omega t)] \times \\ &(-E_0/\zeta) 2 \cos(\beta z) [\underline{x}_0 \sin(\omega t) - \underline{y}_0 \cos(\omega t)] = \\ &= -4(E_0^2/\zeta) \sin(\beta z) \cos(\beta z) [-\underline{z}_0 \sin(\omega t) \cos(\omega t) + \underline{z}_0 \cos(\omega t) \sin(\omega t)] = 0 \\ w_E(z,t) &= (1/2) \epsilon 4E_0^2 \sin^2(\beta z) [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = 2\epsilon E_0^2 \sin^2(\beta z) \\ w_H(z,t) &= (1/2) \mu (E_0^2/\zeta^2) 4 \cos^2(\beta z) [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)] = 2\epsilon E_0^2 \cos^2(\beta z) \end{aligned}$$

Si noti l'indipendenza dal tempo delle densità di potenza e di energia, al contrario di ciò che accadeva per l'onda stazionaria polarizzata linearmente. Tuttavia l'onda stazionaria polarizzata circolarmente si può sempre vedere come sovrapposizione di due onde stazionarie polarizzate

linearmente, per le quali vale il discorso dell'energia oscillante fra le due forme elettrica e magnetica.

Si considerino ora le eventuali modifiche alla polarizzazione in caso di riflessione. Si esamini il caso di incidenza obliqua.

Se l'onda incidente è polarizzata linearmente, e la superficie di discontinuità è piana, anche le onde riflesse e rifratte saranno polarizzate linearmente. Se invece le superfici riflettenti sono curve oppure ruvide, esse introducono una componente di campo ortogonale a quella incidente, e si parla di polarizzazione incrociata ("cross polarization").

Se l'onda incidente sulla superficie piana è invece polarizzata circolarmente, e se il secondo mezzo è un conduttore perfetto (riflessione totale), la polarizzazione circolare è mantenuta, ma viene invertito il verso di rotazione. Se il secondo mezzo è un dielettrico perfetto, le onde riflesse e rifratte risultano in generale polarizzate ellitticamente. L'onda riflessa ha verso opposto di rotazione, l'onda rifratta verso concorde.

Nel caso di polarizzazione incidente ellittica, se il mezzo 2 è un conduttore perfetto si ha per l'onda riflessa un'inversione del verso di rotazione, ma viene mantenuto il rapporto fra i semiassi. Invece se il mezzo 2 è un dielettrico perfetto, nell'onda riflessa e rifratta viene alterato il rapporto fra i semiassi.

Queste modifiche nel caso del dielettrico perfetto sono dovute al fatto che la generica polarizzazione ellittica si può come si è visto decomporre nella somma di due polarizzazioni lineari (incidenza orizzontale e incidenza verticale) e che nei due casi i coefficienti di riflessione e di trasmissione hanno espressioni diverse, per cui si ha una deformazione.

Carta di Smith per le ammettenze

Il diagramma (o carta) di Smith è una rappresentazione grafica, sul piano complesso del coefficiente di riflessione in tensione, della corrispondenza biunivoca esistente tra tale coefficiente e l'impedenza normalizzata $\hat{Z} = Z/Z_0 = \hat{R} + j\hat{X}$, oppure l'ammettenza normalizzata $\hat{Y} = Y/Y_0 = \hat{G} + j\hat{B} = 1/\hat{Z}$ (R è la resistenza, X la reattanza, G la conduttanza, B la suscettanza).

In particolare considereremo il caso delle ammettenze, utile quando si ha a che fare con tratti di linea di trasmissione o componenti concentrati in parallelo (come sarà per i metodi di adattamento che vedremo), visto che l'ammettenza di un parallelo è semplicemente la somma delle ammettenze. Le relazioni che esprimono la corrispondenza biunivoca suddetta sono:

$$q_v(z) = \frac{1 - \hat{Y}(z)}{1 + \hat{Y}(z)} \quad ; \quad \hat{Y}(z) = \frac{1 - q_v(z)}{1 + q_v(z)}$$

Si noti che a differenza della trasformazione fra q_v e \hat{Z} , in questo caso abbiamo la stessa legge.

Ponendo ora $q_v = q_v^r + jq_v^j$ e considerando la trasformazione di coordinate (traslazione) sul piano complesso:

$$x = q_v^r + 1$$

$$y = q_v^j$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{Y} = \hat{G} + j\hat{B} &= \frac{1 - q_v}{1 + q_v} = \frac{1 - q_v^r - jq_v^j}{1 + q_v^r + jq_v^j} = \\ &= \frac{2 - x - jy}{x + jy} = \frac{(2 - x - jy)(x - jy)}{x^2 + y^2} = \frac{2x - (x^2 + y^2) - 2jy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria si ha:

$$\widehat{G} = -1 + \frac{2x}{x^2+y^2} ; \quad \widehat{B} = -\frac{2y}{x^2+y^2}$$

Quindi la retta $\widehat{G} = \text{cost} = \widehat{G}_0$ si trasforma in:

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{1+\widehat{G}_0} = 0$$

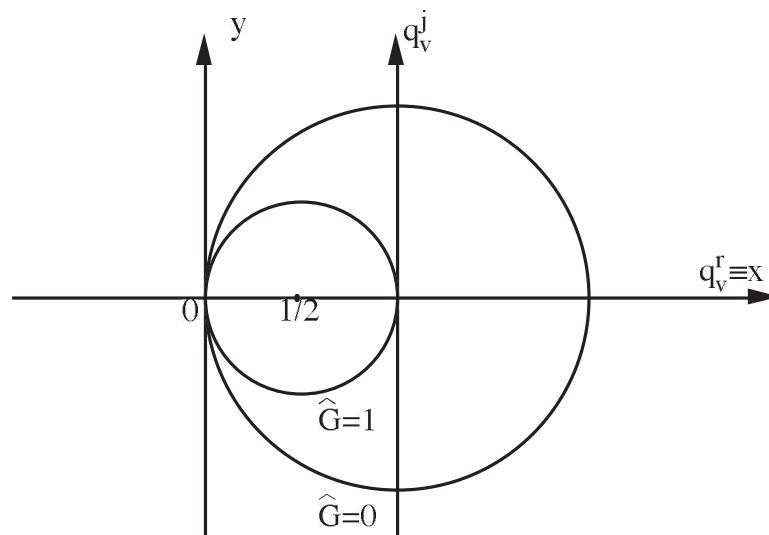
Si ricordi ora che un'equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\text{con: } a^2 + b^2 - 4c > 0$$

rappresenta una circonferenza con centro nel punto $(-a/2, -b/2)$. Nel nostro caso allora avremo una circonferenza passante per l'origine (equazione omogenea) del nuovo sistema di riferimento x,y ; con centro in $(1/(1+\widehat{G}_0), 0)$ e tangente alla retta $x=0$ (asse y).

Dovendo essere, per componenti passivi, $\widehat{G}_0 \geq 0$, tutte le circonferenze si troveranno a destra dell'asse y , avendo centro a destra dell'origine. Per $\widehat{G}_0=0$ la circonferenza ha centro in $(1,0)$ e raggio unitario. Per $\widehat{G}_0=1$ il centro è in $(1/2, 0)$ e il raggio vale $1/2$. Al limite per $\widehat{G}_0 \rightarrow +\infty$ la circonferenza si riduce al punto origine $(0,0)$.



Poiché $\widehat{G} \geq 0$, i punti significativi del diagramma sono solo quelli interni alla circonferenza $\widehat{G}=0$, che rappresenta inoltre il luogo delle ammettenze puramente immaginarie.

Passando ora alle suscettanze, la retta $\widehat{B}=\text{cost}=\widehat{B}_0$ si trasforma in:

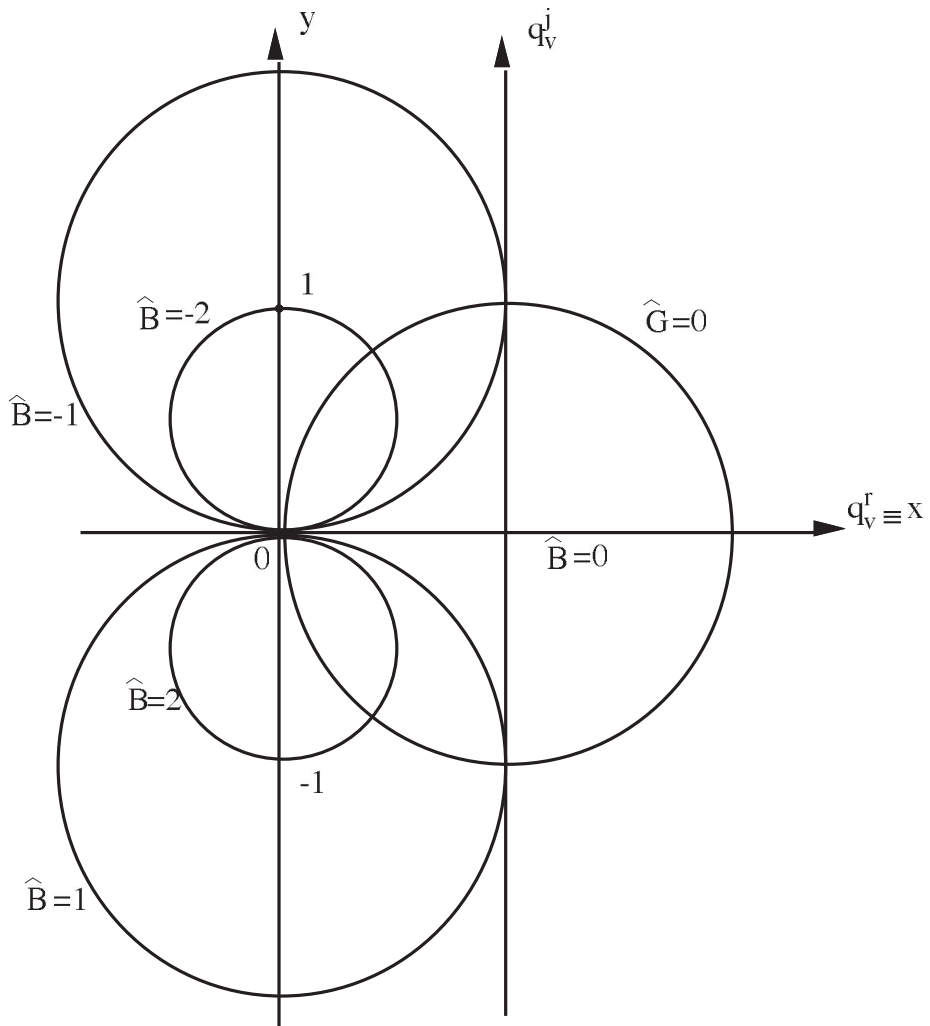
$$x^2 + y^2 + \frac{2}{\widehat{B}_0} y = 0$$

che è l'equazione di una circonferenza passante per l'origine del nuovo sistema di riferimento x,y ; con centro in $(0,-1/\widehat{B}_0)$ e tangente alla retta $y=0$ (asse x).

Per $\widehat{B}_0 > 0$ (suscettanza positiva, quindi di tipo capacitivo) le circonferenze si trovano al di sotto dell'asse x , per $\widehat{B}_0 < 0$ (suscettanza negativa, quindi di tipo induttivo) si trovano al di sopra. Al limite per $\widehat{B}_0 \rightarrow \pm\infty$ la circonferenza si riduce al punto origine $x=0=y$, che del resto corrisponde al corto circuito (ammettenza infinita, impedenza nulla, coefficiente di riflessione pari a -1).

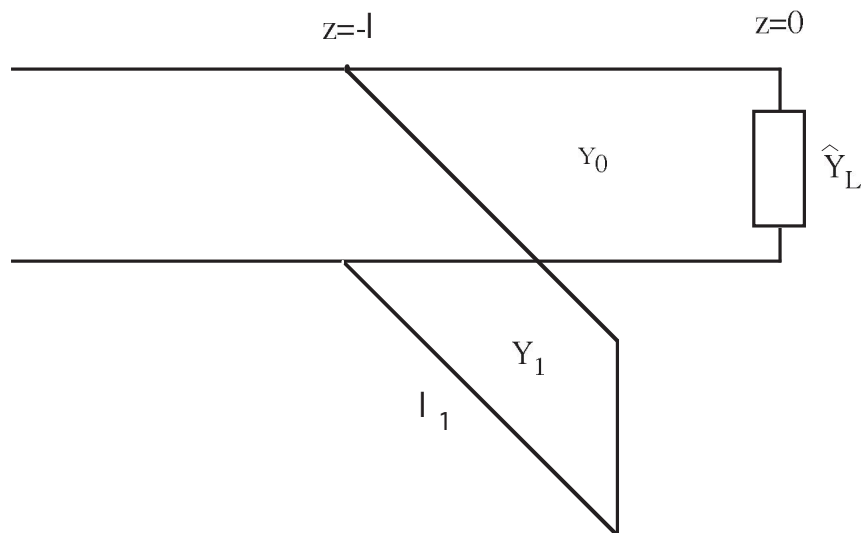
Per $\widehat{B}_0=0$ si ha il caso degenere della retta $y=0$ (asse x). Il segmento di tale retta compreso fra l'origine e il punto $(2,0)$ rappresenta dunque il luogo delle ammettenze puramente reali positive (resistenze). In particolare il punto $(2,0)$ corrisponde al circuito aperto (ammettenza nulla, impedenza infinita, coefficiente di riflessione pari a 1). Infine il punto $(1,0)$, per il quale si ha $\widehat{B}=0$, $\widehat{G}=1$ e quindi $\widehat{Y}=1$ rappresenta la situazione di adattamento (assenza di riflessioni, coefficiente di riflessione nullo).

Da notare per concludere che la carta di Smith per le ammettenze ora introdotta può ottenersi da quella per le impedenze semplicemente capovolgendo il diagramma.



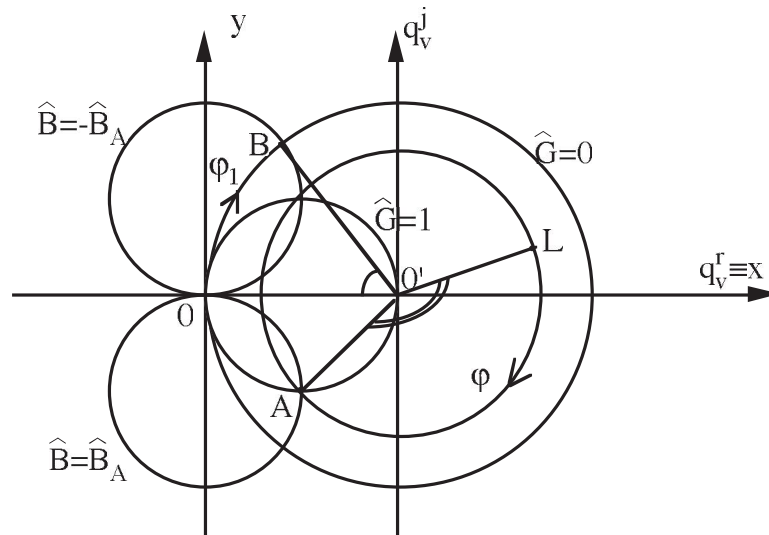
Adattamento con uno stub

L'adattamento della linea può essere ottenuto mediante l'uso di uno stub, che è un tratto di linea di trasmissione senza perdite, chiuso in corto circuito (potrebbe anche essere chiuso in circuito aperto), e di lunghezza opportuna. Si vuole cioè adattare un certo carico, che indichiamo con l'ammettenza normalizzata $\hat{Y}_L = \hat{G}_L + j\hat{B}_L$, a una linea di ammettenza caratteristica Y_0 : ad una certa distanza l dal carico si pone in parallelo alla linea uno stub di lunghezza l_1 e di ammettenza caratteristica Y_1 . Le quantità da determinare sono l ed l_1 . Il carico può essere qualsiasi, purché non puramente immaginario. Si ricordi in proposito che l'adattamento con trasformatore a $\lambda/4$ è utilizzabile solo per carichi reali.



Consideriamo a tale scopo il diagramma di Smith per le ammettenze. Sia L il punto rappresentativo dell'ammettenza di carico $\hat{G}_L + j\hat{B}_L$. Essendo la linea supposta priva di perdite, il modulo del coefficiente di riflessione deve mantenersi costante lungo la linea stessa. Spostandoci dal carico verso il generatore (cioè nel verso negativo di z) dovremo muoverci sul

diagramma di Smith lungo la circonferenza di centro O' e passante per L , in senso orario, fino ad arrivare alla sezione della linea nella quale si ha $\widehat{G}=1$. Si noti che per carichi puramente immaginari questa condizione non sarebbe ottenibile.



Il punto corrispondente è quello indicato con A . Ma in tale punto $\widehat{B} \neq 0$: nel nostro caso $\widehat{B}_A > 0$, appartenendo A ad una circonferenza che si trova al di sotto dell'asse x . Quindi per ottenere l'adattamento, cioè la condizione $\widehat{Y} = 1$, ossia $\widehat{G} = 1$ e $\widehat{B} = 0$, si deve aggiungere in parallelo alla linea una suscettanza non normalizzata pari a $-\widehat{B}_A Y_0$. Ciò viene realizzato ponendo lo stub nella sezione $z = -1$ corrispondente al punto A , in parallelo alla linea principale.

La lunghezza l si può ottenere misurando l'angolo φ in radianti ($1 \text{ rad} (57.3^\circ)$) che corrisponde all'arco LA , e ricordando che tale angolo corrisponde alla variazione di fase del coefficiente di riflessione lungo il tratto l . Per cui si ha:

$$\varphi = 2\beta l = 2 \cdot 2\pi/\lambda \cdot l = 4\pi/\lambda \cdot l$$

$$\text{e quindi: } l = \lambda/(4\pi) \cdot \varphi.$$

Per quanto riguarda la lunghezza d'onda, se la linea principale è una schematizzazione matematica di una struttura guidante che opera nel modo TEM (ad esempio cavo coassiale o linea bifilare) la lunghezza d'onda da prendere in considerazione è quella nello spazio libero, ossia $\lambda=v/f$, ove è nota la frequenza f alla quale si opera, e v è la velocità della luce nel mezzo. Lo stesso dicasi quando applichiamo il formalismo delle linee di trasmissione ad onde piane uniformi (e quindi TEM) che attraversano un mezzo stratificato.

Se invece la linea principale schematizza una guida d'onda, è necessario prendere in considerazione la lunghezza d'onda in guida:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_t^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_t^2}}$$

ove ω è nota e k_t^2 è quello del modo in cui opera la guida (in genere il modo dominante).

Occorre ora determinare la lunghezza l_1 da dare allo stub. L'ammettenza d'ingresso di uno stub (cioè di una linea chiusa in corto circuito) è puramente reattiva (cioè puramente immaginaria) ed è pari a:

$$Y_S = -jY_1 \cot(\beta_1 l_1) = jB_S$$

ossia:

$$B_S = -Y_1 \cot(\beta_1 l_1)$$

E' necessario dunque, per l'adattamento, che sia $B_S = -\hat{B}_A Y_0$. Ma $B_S = \hat{B}_S Y_1$, per cui dovrà aversi $\hat{B}_S = -\hat{B}_A \frac{Y_0}{Y_1}$.

Considerando allora adesso sulla carta di Smith la linea stub, si deve partire dal suo carico, cioè dal corto circuito, corrispondente al punto origine O; ruotare in senso orario lungo la circonferenza $\hat{G}=0$ fino al punto

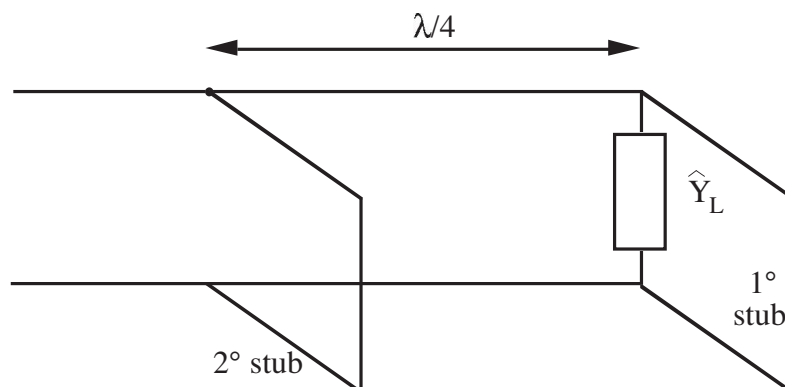
che rappresenta la \hat{B}_S . Nel caso semplice considerato in figura in cui lo stub e la linea principale abbiano la stessa ammettenza caratteristica si ha $\hat{B}_S = -\hat{B}_A$ e si ottiene il punto B, che giace sulla circonferenza simmetrica rispetto a quella di A. Misurando poi l'angolo φ_1 corrispondente all'arco OB si ottiene la lunghezza l_1 dello stub in funzione della lunghezza d'onda.

Abbiamo appena visto come con la stessa carta di Smith è possibile trattare insieme linee con ammettenze caratteristiche diverse. E' questa l'utilità di considerare ammettenze normalizzate.

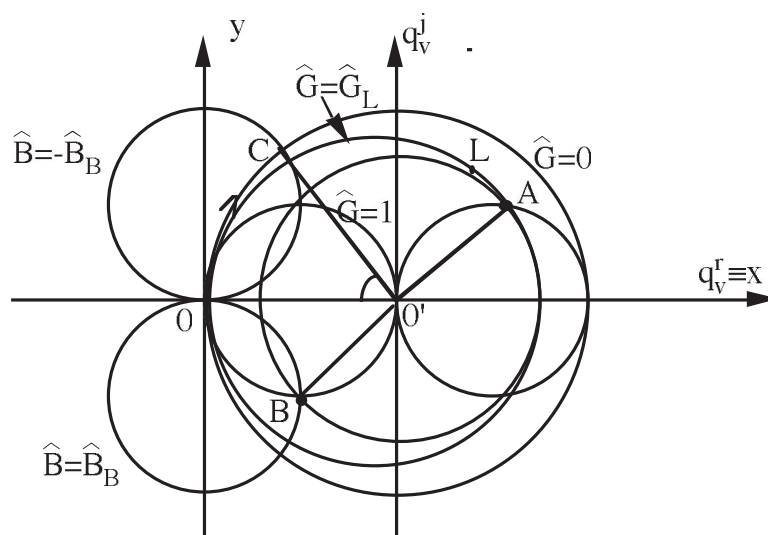
L'adattamento con un solo stub ha lo svantaggio che la posizione in cui devo applicare lo stub, cioè la lunghezza l , varia al variare del carico. Tale inconveniente è superato con il doppio stub.

Adattamento con doppio stub

Un ulteriore modo di realizzare l'adattamento di una linea a un carico \hat{Y}_L è quello di usare due stubs: uno posto sul carico, e l'altro a distanza $\lambda/4$. Supponiamo inoltre per semplicità che i due stubs abbiano la stessa ammettenza caratteristica della linea principale.



Si rappresenta sul diagramma di Smith la $\hat{Y}_L = \hat{G}_L + j\hat{B}_L$ (punto L).



Mediante il primo stub (ammettenza d'ingresso puramente reattiva), inserito in parallelo al carico, si ottiene l'effetto di variare la parte immaginaria lasciando uguale la parte reale: quindi regolando opportunamente la lunghezza dello stub ci si muove lungo la circonferenza $\widehat{G} = \widehat{G}_L$ passante per L. Si vuole arrivare fino al punto A, intersezione di tale circonferenza con quella simmetrica della circonferenza $\widehat{G} = 1$ rispetto all'origine del piano q_v . La lunghezza dello stub deve essere tale che la suscettanza di ingresso di esso, sommata alla suscettanza \widehat{B}_L , sia pari alla suscettanza del punto A.

Partendo quindi dal punto O, che rappresenta il corto circuito ($q_v = -1$) che chiude lo stub, ci si deve muovere in senso orario lungo la circonferenza più esterna $\widehat{G} = 0$, sulla quale è $|q_v| = 1$, fino al punto di intersezione con la circonferenza di suscettanza normalizzata pari a $\widehat{B}_A - \widehat{B}_L$.

Spostandosi ora verso il generatore si deve attraversare il tratto di linea lungo $\lambda/4$, che viene detto "trasformatore in quarto d'onda". Si può vedere che l'ammettenza normalizzata vista in ingresso di una tale linea è

l'inverso di quella su cui la linea è terminata, cioè chiusa. Spostarsi lungo la linea di $\lambda/4$ corrisponde a muoversi lungo la circonferenza con centro in O' e passante per A (perché il modulo di q_v si mantiene costante), in senso orario perché si va verso il generatore, e di un angolo pari a π .

Si giunge così al punto B , che per ragioni di simmetria giace sulla circonferenza $\widehat{G} = 1$. Ed è proprio per questo che in precedenza ci si è posizionati sulla circonferenza simmetrica, poiché essa è ovviamente il luogo dei punti che dopo una rotazione di 180° finiscono sulla circonferenza $\widehat{G} = 1$.

Ricordando ora che la condizione di adattamento $\widehat{Y}=1$ corrisponde ad avere $\widehat{G} = 1$ e $\widehat{B}=0$, occorre agire sulla suscettanza. Allo scopo, dopo la linea lunga $\lambda/4$ viene inserito in parallelo il secondo stub, la cui lunghezza dovrà essere tale che la sua suscettanza d'ingresso sia uguale ed opposta alla suscettanza relativa al punto B . Occorrerà al solito partire dal punto O e ruotare in senso orario sulla circonferenza $\widehat{G} = 0$, fino ad intersecare la circonferenza $\widehat{B}=-\widehat{B}_B$ nel punto C . L'angolo corrispondente all'arco OC individua la lunghezza del secondo stub in termini di λ .

Si noti infine che il metodo dell'adattamento con doppio stub non è applicabile a carichi qualsiasi: occorre infatti, come è evidente dalla costruzione geometrica fatta, che il punto L sia esterno alla circonferenza $\widehat{G} = 1$, cioè dev'essere $\widehat{G}_L < 1$.

Un'osservazione generale su questi metodi di adattamento è che essi sono "a banda stretta", ossia la condizione di adattamento si ottiene rigorosamente solo per una frequenza ben precisa. Infatti basti pensare che i vari tratti di linea vengono dimensionati in funzione della lunghezza d'onda, la quale varia se si cambia frequenza. Per frequenze poco lontane da quella di adattamento rigoroso si avrà una situazione di quasi

adattamento, che però può ancora andar bene dal punto di vista pratico. Le specifiche pratiche del problema determinano quindi la banda di utilizzabilità.

Rapporto di onda stazionaria

Il rapporto di onda stazionaria (Standing Wave Ratio) è definito dalla:

$$(VSWR) \quad \Psi_V = \frac{|V(z)|_{MAX}}{|V(z)|_{min}}$$

Per il modulo della tensione si ha:

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V^+(z) + V^-(z)| = |V^+(z)| \left| 1 + \frac{V^-(z)}{V^+(z)} \right| = \\ &= |V^+ e^{-jkz}| \cdot |1 + q_v(z)| = |V^+ e^{-jkz}| \cdot |1 + q_v(0) e^{2jkz}| = \\ &= |V^+ e^{-jkz}| \cdot |1 + q_v(0) e^{j[2kz + \angle q_v(0)]}| \end{aligned}$$

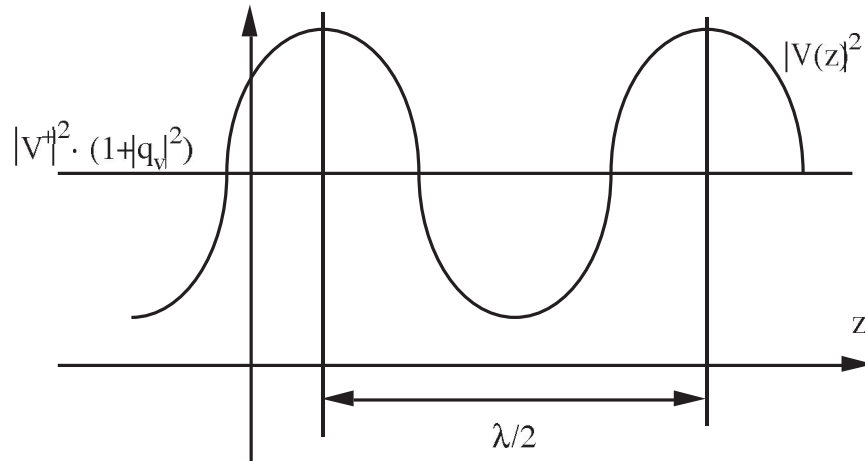
Nell'ipotesi da noi assunta di linea priva di perdite si ha $k = \beta$ e $|q_v| = \text{cost} = |q_v(0)|$, per cui:

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V^+| \cdot |1 + |q_v| e^{j[2\beta z + \angle q_v(0)]}| = \\ &= |V^+| \cdot |1 + |q_v| \cos[2\beta z + \angle q_v(0)] + j|q_v| \sin[2\beta z + \angle q_v(0)]| \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} |V(z)|^2 &= |V^+|^2 \{ 1 + |q_v| \cos[2\beta z + \angle q_v(0)] \}^2 + |V^+|^2 \{ |q_v| \sin[2\beta z + \angle q_v(0)] \}^2 = \\ &= |V^+|^2 \{ 1 + |q_v|^2 \cos^2[2\beta z + \angle q_v(0)] + 2|q_v| \cos[2\beta z + \angle q_v(0)] + |q_v|^2 \sin^2[2\beta z + \angle q_v(0)] \} = \\ &= |V^+|^2 \{ 1 + |q_v|^2 + 2|q_v| \cos[2\beta z + \angle q_v(0)] \} \end{aligned}$$

Si ha quindi che $|V(z)|^2$ è una funzione sinusoidale a valor medio ovviamente positivo e con periodo $p = 2\pi / (2\beta) = \pi / (2\pi / \lambda) = \lambda / 2$.



Nel caso di adattamento ($q_v=0$) la sinusoida si appiattisce sul suo valor medio, per cui $|V(z)|^2 = |V^+|^2$ ossia $|V(z)| = |V^+|$, i massimi e i minimi coincidono e si ha $\Psi_v=1$. Nel caso opposto di riflessione totale ($|q_v|=1$) i minimi toccano l'asse z e si ha $|V(z)|_{\min} = 0$ e $\Psi_v=+\infty$.

Per quanto riguarda l'andamento di $|V(z)|$, sarà anch'essa una funzione periodica di z (non sinusoidale), di periodo $\lambda/2$. Ovviamente i valori di z per i quali $|V(z)|$ sarà massimo o minimo saranno gli stessi per cui sarà massimo o minimo $|V(z)|^2$. Per trovare il massimo e il minimo basta ovviamente indagare su un tratto lungo $\lambda/2$.

I massimi si avranno per:

$$\cos(2\beta z + \varphi_L) = +1$$

avendo indicato con $\varphi_L = \angle q_v(0)$ la fase del coefficiente di riflessione sul carico, ossia per $z=0$. Dovrà essere allora:

$$2\beta z + \varphi_L = 2n\pi$$

$$2 \cdot 2\pi/\lambda \cdot z = -\varphi_L + 2n\pi, \text{ per cui:}$$

$$z_{\text{MAX}} = -\varphi_L \lambda/(4\pi) + \lambda/(4\pi) \cdot 2n\pi = -\varphi_L \lambda/(4\pi) + n\lambda/2$$

Poiché i valori di z che ci interessano sono quelli negativi o nulli, avremo $n=0,-1,-2,\dots$. Il valore $n=+1$ non va bene, visto che si suppone $0 \leq \varphi_L < 2\pi$. La distanza fra il carico e il punto di massimo sarà:

$$d_{\text{MAX}} = -z_{\text{MAX}} = \varphi_L \lambda / (4\pi) - n \lambda / 2 = \varphi_L \lambda / (4\pi) + m \lambda / 2 \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$d_{\text{MAX}} / \lambda = \varphi_L / (4\pi) + m / 2 \quad 0 \leq \varphi_L < 2\pi$$

I minimi invece si avranno per:

$$\cos[2\beta z + \varphi_L] = -1$$

$$2\beta z + \varphi_L = (2n+1)\pi$$

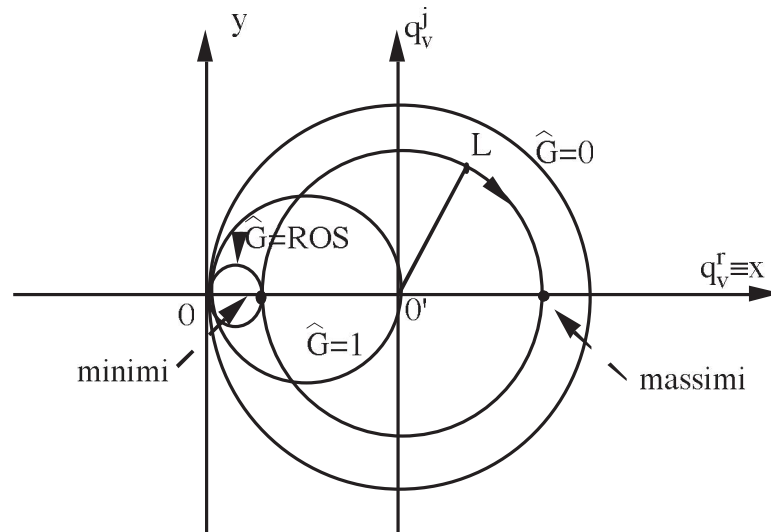
$$z_{\text{min}} = -\varphi_L \lambda / (4\pi) + 2n\pi \lambda / (4\pi) + \pi \lambda / (4\pi) = -\varphi_L \lambda / (4\pi) + n \lambda / 2 + \lambda / 4 \quad n = 0, -1, -2, \dots$$

$$d_{\text{min}} / \lambda = \varphi_L / (4\pi) + m / 2 - 1/4 \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leq \varphi_L < 2\pi$$

Nelle ultime due espressioni il valore nullo dell'indice può essere preso solo se $\varphi_L \geq \pi$.

Come si vede, e come doveva essere, un minimo dista $\lambda/4$ dai massimi adiacenti.

Sul diagramma di Smith è immediato individuare questi massimi e minimi.



Una volta fissato il carico (punto L), e quindi la circonferenza di centro O' lungo la quale ci si deve muovere in senso orario, i massimi corrispondono ai multipli di 2π per la fase del coefficiente di riflessione, i minimi ai multipli dispari di π . Le distanze d_{MAX} e d_{min} in termini di lunghezza d'onda sono al solito ricavabili misurando gli angoli a partire dal punto L.

Come si vede, il fatto di incontrare prima un massimo e poi un minimo, o viceversa, dipende dalla posizione del carico.

Per ricavare ora il rapporto d'onda stazionaria sulla carta di Smith delle ammettenze, osserviamo che in corrispondenza a un minimo il coefficiente di riflessione ha fase π , per cui ci troviamo all'interno del segmento $\overline{OO'}$, dove $\widehat{B}=0$ e $\widehat{G}>1$. Ricordando allora che:

$$q_v = (1 - \widehat{Y}) / (1 + \widehat{Y}) = (1 - \widehat{G}) / (1 + \widehat{G})$$

da cui:

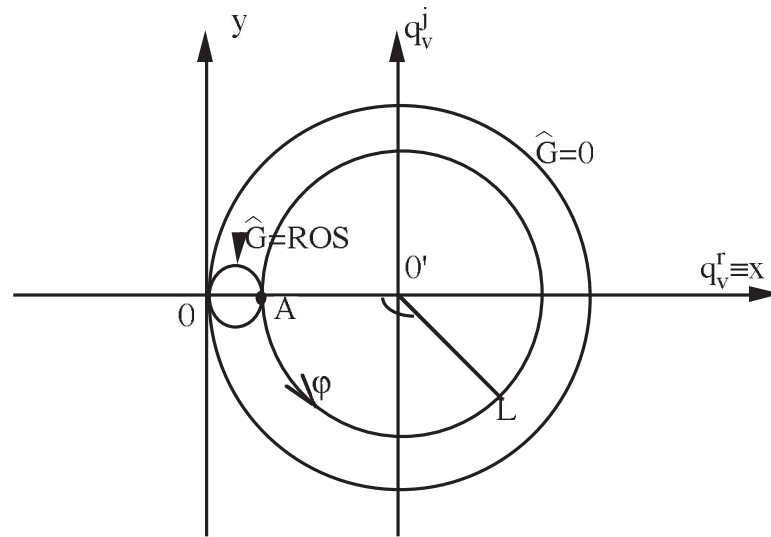
$$\begin{aligned} |q_v| &= (\widehat{G} - 1) / (\widehat{G} + 1) \\ \Psi_v &= (1 + |q_v|) / (1 - |q_v|) = [1 + (\widehat{G} - 1) / (\widehat{G} + 1)] / [1 - (\widehat{G} - 1) / (\widehat{G} + 1)] = \\ &= (\widehat{G} + 1 + \widehat{G} - 1) / (\widehat{G} + 1 - \widehat{G} + 1) = 2\widehat{G} / 2 = \widehat{G} \end{aligned}$$

Dunque Ψ_v (che è lo stesso per qualsiasi sezione della linea) coincide con l'ammettenza normalizzata che si vede in una sezione di minimo. Quindi il punto di minimo sulla carta di Smith individua la circonferenza $\widehat{G} = \Psi_v$. Si tratta fra l'altro del valore massimo di \widehat{G} ottenibile lungo la linea.

Se si conosce allora (ad esempio con una misura) il rapporto d'onda stazionaria (che viene misurato usando la sua definizione) di una linea chiusa su un certo carico, e si conosce inoltre la distanza dal carico del primo minimo di tensione (i minimi sono più facilmente, più precisamente, localizzabili dei massimi), si può determinare il coefficiente di riflessione

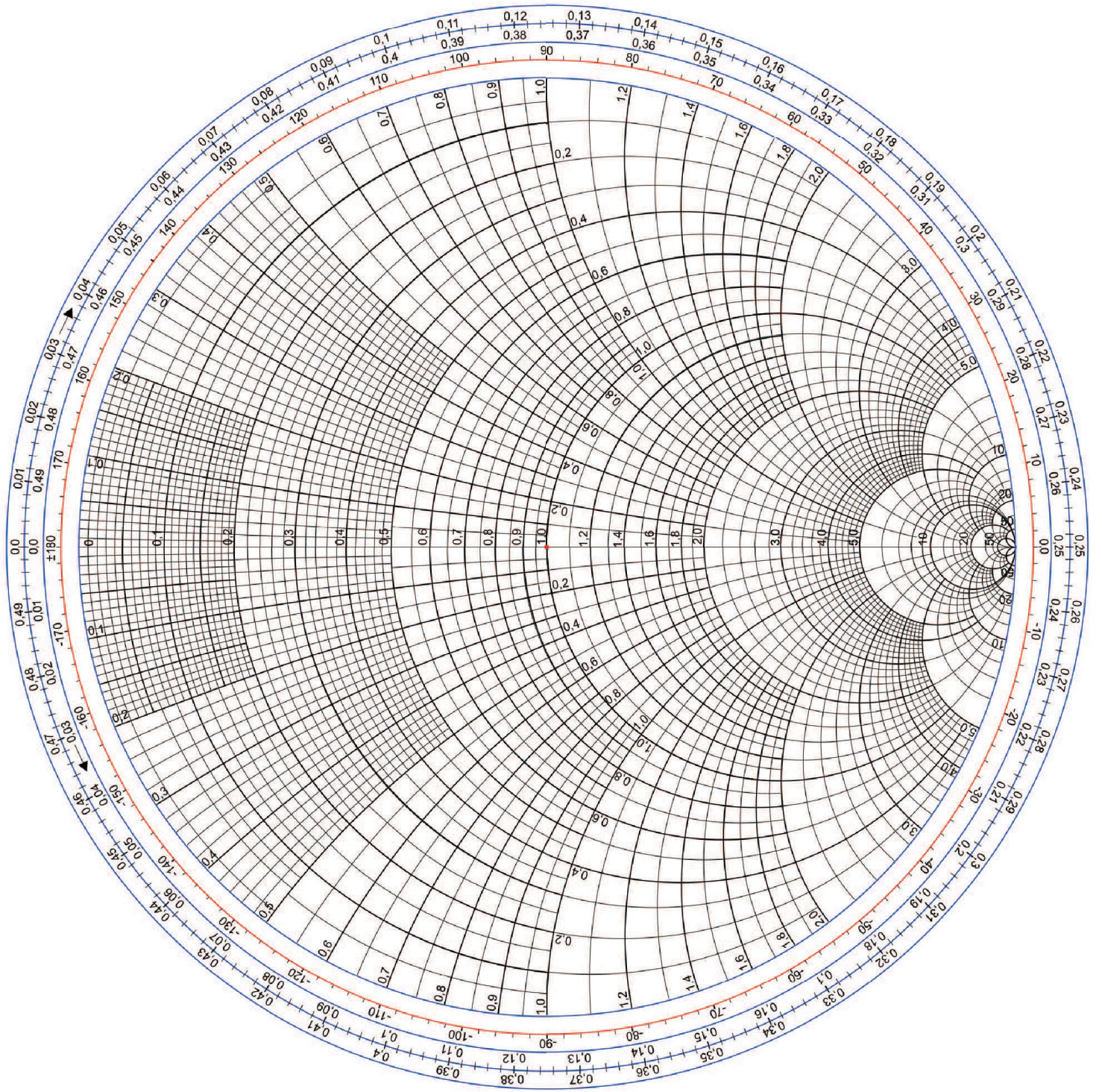
(in modulo e fase) sul carico (cioè il punto rappresentativo del carico sulla carta), e quindi l'ammettenza del carico stesso.

Infatti, noto Ψ_v , è individuata la circonferenza $\widehat{G}=\Psi_v$, ed il punto di minimo A.



Ci si dovrà quindi muovere sulla circonferenza $|q_v|=const$ passante per A, ma stavolta verso il carico e quindi in senso antiorario. Nota poi la distanza d del primo minimo dal carico, si ottiene l'angolo di cui ci si deve spostare, ossia $\varphi=4\pi/\lambda \cdot d$, fino a giungere al punto L rappresentativo del carico, ricavando così \widehat{G}_L e \widehat{B}_L .

Si noti infine che molte delle considerazioni fatte devono essere modificate per dualità se si lavora invece sulla carta di Smith delle impedenze.



Bibliografia

- [1] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*, second edition, Wiley, New York, 2012.
- [2] G. Franceschetti, *Campi Elettromagnetici*, Boringhieri, seconda edizione, Torino, 1988.
- [3] C. G. Someda, *Onde elettromagnetiche*, UTET, Torino, 1986.
- [4] J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, seconda edizione italiana (sulla terza edizione inglese del 1999), Zanichelli, Bologna, 2001.
- [5] D. S. Jones, *Acoustic and electromagnetic waves*, Oxford University Press, 1989.
- [6] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. Van Duzer, *Campi e onde nell'elettronica per le telecomunicazioni*, Franco Angeli Editore, Milano, 2006.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Elettrodinamica dei mezzi continui*, volume 8 della serie di Fisica Teorica, Editori Riuniti, Roma, 2011.
- [8] G. Barzilai, *Fondamenti di elettromagnetismo*, Siderea, Roma, 1975.
- [9] A. W. Snyder, J. D. Love, *Optical waveguide theory*, Chapman and Hall, London, 1983.
- [10] I. Cattaneo Gasparini, *Strutture algebriche lineari*, Masson, Milano, 1998.
- [11] G. C. Corazza, C. G. Someda, *Elementi di calcolo vettoriale e tensoriale*, Pitagora, Bologna, 1982.
- [12] K. Kurokawa, *An introduction to the theory of microwave circuits*, Academic Press, New York, 1969.
- [13] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [14] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [15] C. T. Tai, *Generalized vector and dyadic analysis*, second edition, IEEE Press, New York, 1997.