

Correlazione, densità spettrale e filtraggio

QUESTO capitolo *intreccia* la teoria dei segnali (capp. 2 e 3) con quella delle probabilità (cap. 6) per descrivere in modo unitario il passaggio sia dei segnali certi che dei processi aleatori attraverso un sistema fisico, dal punto di vista delle modifiche spettrali come da quello delle proprietà statistiche. Mentre per segnali certi siamo già in grado (vedi § 3.5.1, 3.2 e 3.7) di determinare lo spettro di ampiezza e di densità di energia presenti in uscita, se il segnale in ingresso al filtro è membro di un processo deve essere svolta una nuova parte di teoria, volta a definire la *funzione di autocorrelazione* $\mathcal{R}_x(\tau)$ come strumento unificante con il mondo dei segnali certi, la cui trasformata (grazie al teorema di WIENER) fornisce lo spettro di densità di potenza cercato. Il resto del capitolo procede applicando i risultati ottenuti a casi pratici, determinando lo spettro di densità di potenza per alcuni segnali di interesse, così come la relativa stima basata su osservazioni sperimentali. Al § 7.4 si perviene ad una impostazione unitaria per il filtraggio di segnali di energia, periodici e aleatori, mentre al § 7.5 lo stesso schema è applicato alla loro somma e prodotto. Una sezione a parte è dedicata alla teoria del *filtro adattato*, alle prestazioni relative, ed alla sua applicazione nel contesto della segnalazione ortogonale, mentre in appendice si affronta il tema della *regressione lineare*.

7.1 Correlazione, covarianza e autocorrelazione

Al § 6.3.5 abbiamo discusso come per un processo stazionario ed ergodico $\{x(t, \theta)\}$ la conoscenza della d.d.p. $p_X(x)$ che descrive la variabilità dei suoi valori indipendentemente da t e θ consenta il calcolo dei corrispondenti valori attesi media m_X e varianza σ_X^2 , nonché della potenza $\mathcal{P}_X = E_X\{x^2\} = \sigma_X^2 + (m_x)^2$ di ogni suo membro. Tali medie di insieme sono descrizioni statistiche *del primo ordine*, in quanto legate alla d.d.p. di *un singolo* valore estratto.

In questa sezione definiamo invece una descrizione statistica *del secondo ordine* ossia un momento misto (pag. 158), che come vedremo al § 7.2.1 ci metterà in grado di ottenere lo *spettro di densità di potenza* dei membri del processo. Tale descrizione

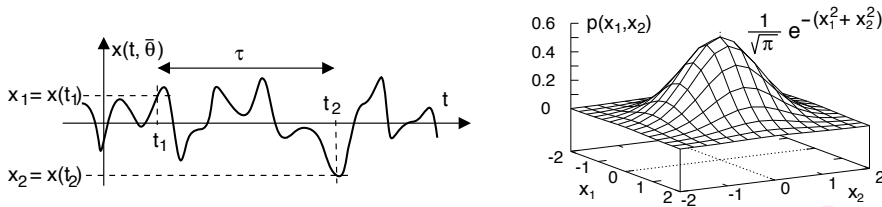


Figura 7.1: Estrazione di due v.a. da un processo, e possibile d.d.p. congiunta

si basa sulla considerazione di due istanti t_1 e $t_2 = t_1 + \tau$, in corrispondenza dei quali sono estratte le variabili aleatorie $x_1 = x(t_1)$, $x_2 = x(t_2)$ a partire da una qualunque realizzazione θ del processo $x(t, \theta)$, di cui al lato sinistro di fig. 7.1 si mostra il caso per uno specifico membro $x(t, \theta)$. Al variare della realizzazione $\theta \in \Theta$ tutte le coppie di valori campionati sono altrettante determinazioni di una variabile aleatoria *bidimensionale*, descritta da una densità di probabilità *congiunta* $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2)$, che dipende anche dagli istanti t_1 e t_2 , e che è esemplificata nella parte destra di fig. 7.1; tale d.d.p. *bidimensionale* sottende un volume unitario ovvero $\int \int p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$, e il suo grafico 3D descrive le regioni del piano $x_1 x_2$ in cui ciascuna coppia di possibili valori è più o meno probabile.

7.1.1 Correlazione tra variabili aleatorie

Ora che abbiamo a disposizione la d.d.p. congiunta $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2)$ di due v.a. x_1 e x_2 estratte dal processo $x(t, \theta)$ a distanza temporale τ , possiamo calcolare il loro *momento misto*, ovvero un valore atteso (§ 6.2.2) in cui, a differenza del caso monodimensionale, i possibili valori sono ponderati mediante la probabilità che si verifichino *assieme*. In particolare, il momento misto *di ordine (1,1)* (vedi pag. 158) $m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2)$ tra le v.a. prende il nome di *correlazione*, ed è definito come

$$m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) = E_{X_1 X_2} \{x_1 x_2\} = \iint x_1 x_2 \cdot p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; t_1 t_2) dx_1 dx_2 \quad (7.1)$$

Prima di proseguire, proviamo ad approfondire il significato di questa nuova descrizione statistica nel suo contesto più ampio di due v.a. di tipo qualsiasi, non necessariamente estratte da un medesimo processo aleatorio, ma che descrivono due eventi in qualche modo interdipendenti¹.

Segno Osserviamo innanzitutto che *il segno* della correlazione fra due v.a. x_1 e x_2 riflette la loro *concordanza*, nel senso che se $m_{X_1 X_2}^{(1,1)} > 0$ le due v.a. hanno frequentemente lo stesso segno², oppure opposto qualora la correlazione sia negativa.

¹Il termine *correlazione* risale a studi sull'ereditarietà genetica, e via via è stato adottato da tutte le discipline (economiche, cliniche, sociologiche...) che analizzano da un punto di vista statistico la dipendenza (*co-relazione*) tra due o più grandezze, vedi ad es.

[https://it.wikipedia.org/wiki/Correlazione_\(statistica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Correlazione_(statistica)).

²Come intuitivamente verificabile pensando $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$ come media pesata in probabilità dei possibili valori del prodotto $x_1 x_2$; i termini di eguale ampiezza e segno opposto possono elidersi se equiprobabili.

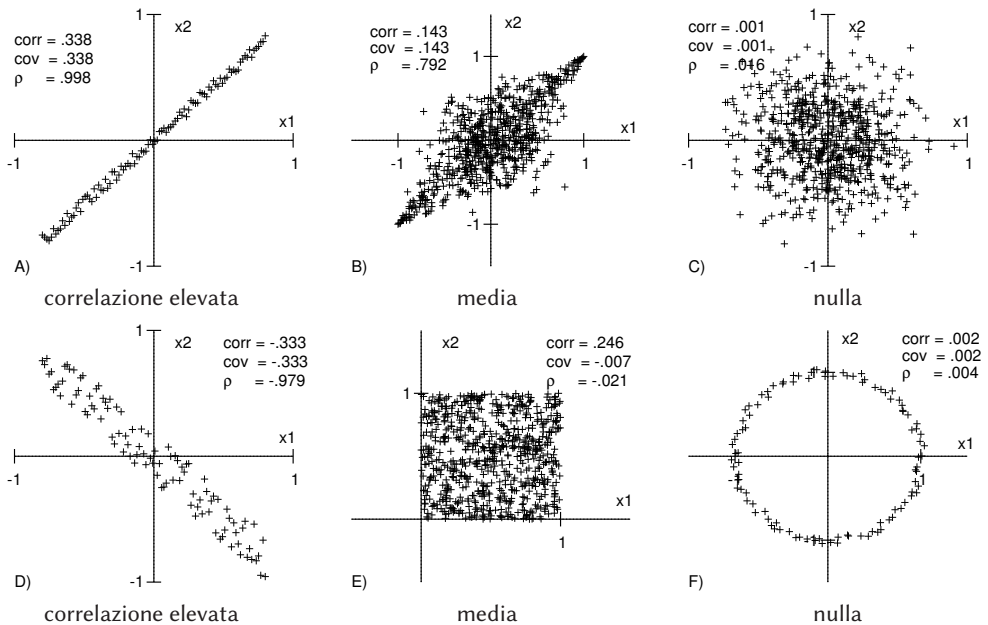


Figura 7.2: Diagramma di dispersione per coppie di variabili aleatorie

Regressione Individua un concetto simile³, ma orientato al problema di *predire* il valore atteso di una grandezza (es. x_2) a partire dalla conoscenza di un'altra (in questo caso x_1): possiamo infatti pensare che le grandezze siano legate da una relazione del tipo $x_2 = f(x_1) + \varepsilon$ dove ε rappresenta la componente aleatoria, a media nulla e statisticamente indipendente sia da x_1 che da x_2 . Qualora $f(x_1) = a \cdot x_1 + b$ si parla di *regressione lineare* in quanto $f(x_1)$ è l'equazione di una retta in cui $a = \tan \alpha$ è il coefficiente angolare e b l'intercetta, ed al § 7.7.1 si mostra come risulti $a = \frac{\sigma_{x_1 x_2}}{\sigma_{x_1}}$ e dunque (eq. (7.3)) sia legato a $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$, mentre $b = m_{x_2} - a m_{x_1}$.

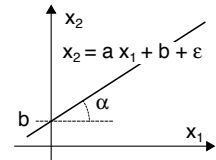


Diagramma di scattering L'ultima riflessione prima di passare al lato analitico riguarda i diagrammi di dispersione (o *scattering*⁴) mostrati in fig. 7.2 che mappano la *posizione* di un numero elevato⁵ di coppie di valori x_1 e x_2 secondo sei possibili leggi di dipendenza stocastica. Assieme alle nuvole, i diagrammi riportano anche i valori *stimati*⁶ di correlazione $m_{X_1 X_2}^{(1,1)}$ (corr), covarianza $\sigma_{x_1 x_2}$ (cov) (eq. (7.3)), e coefficiente di correlazione ρ (§ 7.7.2).

Nei casi A) e F) le coppie di valori sono legate da una legge ben poco casuale, ma nel secondo caso la correlazione è nulla poiché la dipendenza *non è lineare*. Nei casi B) e D)

³Il termine si rifà al concetto di *regredire*, ovvero da un punto di vista genetico, veder riaffiorare tratti remoti. Per approfondimenti si veda https://it.wikipedia.org/wiki/Regressione_lineare

⁴Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Grafico_di_dispersione

⁵I grafici A, D ed F sono realizzati con 100 punti, mentre B, C ed E con 700.

⁶Ovvero ottenuti a partire dal campione statistico, per cui ad es. $\hat{m}_{X_1 X_2}^{(1,1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_1(i) x_2(i)$.

c'è più variabilità, ma si nota ancora una certa dipendenza tra le due v.a. Nei casi c) ed E) siamo invece al cospetto di due v.a. *st statisticamente indipendenti*, dato che $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ è fattorizzabile come $p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2)$, e per le quali tra breve si mostra che risulta $m_{X_1 X_2}^{(1,1)} = m_{X_1} m_{X_2}$, come infatti riscontriamo per il caso E) in cui le v.a. sono indipendenti, e la correlazione risulta 0.25 cioè pari al prodotto delle medie $m_{X_1} = m_{X_2} = 0.5$. Per gestire questo caso, occorre introdurre la *covarianza*, descritta di seguito.

7.1.2 Covarianza, indipendenza statistica e incorrelazione

Nel caso in cui le due v.a. siano *st statisticamente indipendenti*, ovvero per le quali si possa scrivere $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1) p(x_2)$ ⁽⁷⁾, l'integrale che definisce la correlazione *si fattorizza*, fornendo come risultato il prodotto delle medie delle v.a.:

$$\begin{aligned} m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) &= E\{x_1, x_2\} = \iint x_1 x_2 p(x_1) p(x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int x_1 p(x_1) dx_1 \cdot \int x_2 p(x_2) dx_2 = E\{x_1\} E\{x_2\} = m_{X_1} m_{X_2} \quad (7.2) \end{aligned}$$

Covarianza È indicata come $\sigma(x_1, x_2)$ e consiste nella correlazione $m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2)$ a cui è sottratto il termine $m_{X_1} m_{X_2}$, ottenendo il momento misto *centrato* tra le due v.a. Infatti:⁸

$$\begin{aligned} \sigma(x_1, x_2) &= E\{(x_1 - m_{X_1})(x_2 - m_{X_2})\} = \\ &= E\{x_1 x_2\} - E\{x_1 m_{X_2}\} - E\{m_{X_1} x_2\} + E\{m_{X_1} m_{X_2}\} = \quad (7.3) \\ &= E\{x_1 x_2\} - m_{X_1} m_{X_2} = m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) - m_{X_1} m_{X_2} \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di enunciare un'importante conseguenza dell'indipendenza statistica:

Incorrelazione Combinando i risultati (7.2) e (7.3) possiamo verificare che

Se due variabili aleatorie x_1 ed x_2 sono statisticamente indipendenti, la loro covarianza $\sigma(x_1, x_2)$ è nulla, e sono pertanto dette INCORRELATE⁹.

Questa proprietà è valida in *una sola* direzione, in quanto se per due v.a. si verifica una covarianza $\sigma(x_1, x_2)$ nulla, *non è detto* che esse siano statisticamente indipendenti¹⁰. L'unica circostanza in cui l'incorrelazione tra variabili aleatorie *ne implica* l'indipendenza statistica è quella relativa al *caso gaussiano*, come mostrato al § 6.5.1.

⁷Omettiamo per brevità di indicare la variabile aleatoria a pedice della densità di probabilità, così come gli istanti temporali.

⁸Ancora una semplificazione di notazione, da intendersi ricordando che un valore atteso è in realtà un integrale che pesa l'argomento per la rispettiva d.d.p., a cui si applica la proprietà distributiva del prodotto per una somma.

⁹Notiamo immediatamente che il termine più corretto sarebbe "incovarianzate"; l'uso (ormai storico e consolidato) dell'espressione *incorrelate* deriva probabilmente dal considerare usualmente grandezze a media nulla, per le quali le due espressioni coincidono.

¹⁰Vedi ad esempio il caso F) di fig. 7.2, in cui le variabili aleatorie risultano incorrelate, ma non sono per nulla indipendenti, dato che le coppie di valori si dispongono su di un cerchio. Ciò rappresenta un caso di dipendenza *non lineare*, in quanto l'equazione che descrive la circonferenza è quadratica.

7.1.3 Correlazione di un processo stazionario ergodico

Qualora il processo da cui si estraggono x_1 e x_2 sia *stazionario* almeno *in senso lato* (§ 6.3.4), la relativa d.d.p. congiunta dipende solamente dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$ tra gli istanti t_2 e t_1 (vedi fig. 7.1), e dunque anche la correlazione (7.1) dipende solamente da τ :

$$m_{XX}^{(1,1)}(t_1, t_2) = E\{x_1 x_2\} = \iint x_1 x_2 \cdot p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau) dx_1 dx_2 = m_{XX}^{(1,1)}(\tau) \quad (7.4)$$

che quindi viene ora indicata come $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$.

Se poi il processo oltre che stazionario è anche *ergodico* (§ 6.3.5), allora la media di insieme $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$ assume lo stesso valore della corrispondente media temporale. Pertanto nel caso in cui non si conosca la $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau)$ ma si disponga invece di qualche realizzazione del processo, anziché tramite la (7.4) la correlazione può essere ottenuta dalla *media temporale* $x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i)$ (vedi § 6.3.2) calcolata per una qualunque realizzazione θ_i . Tale media temporale viene ora indicata come $\mathcal{R}_x(\tau)$, e corrisponde a

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, \theta_i) x(t + \tau, \theta_i) dt \quad \forall \theta_i \in \Theta \quad (7.5)$$

Dato che per processi stazionari ed ergodici le (7.4) e (7.5) forniscono lo stesso risultato, per essi anche la correlazione (7.4) viene indicata con la notazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ anziché $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$. Fermo restando che nel caso in cui non si disponga di realizzazioni del processo, ma si conosca la $p_{X_1 X_2}(x_1 x_2; \tau)$, la correlazione deve essere ottenuta dall'espressione (7.4).

Prima di utilizzare (al § 7.2.1) il nuovo descrittore statistico *correlazione* $\mathcal{R}_x(\tau)$ per giungere ad una espressione della densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ per processi ergodici, partiamo dal punto di contatto tra questi ultimi ed i segnali certi rappresentato dalle (7.4) e (7.5), per approfondire l'interpretazione di $\mathcal{R}_x(\tau)$ nel contesto *deterministico*.

7.1.4 Autocorrelazione e intercorrelazione di segnali certi

Quando la media temporale (7.5) è calcolata per un segnale *deterministico* $x(t)$ ovvero

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \overline{x(t) x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt$$

viene chiamata *integrale di autocorrelazione* ed ancora indicata con $\mathcal{R}_x(\tau)$ come per la (7.5), entrambe valide per segnali *di potenza*. Nel caso invece di un segnale *di energia* la (7.5) darebbe risultato nullo, e per i segnali di energia la definizione di *autocorrelazione* diviene

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (7.6)$$

in cui l'operatore di coniugato generalizza l'espressione anche al caso di segnali complessi.

Confrontando le (7.6) e (7.5) con la (3.5) di pag. 64, notiamo come l'autocorrelazione valuti l'energia (o potenza) *mutua* (ovvero un *prodotto scalare*) tra un segnale $x(t)$ ed una sua *copia anticipata*: in questo senso, un valore elevato di $\mathcal{R}_x(\tau)$ indica che per quel valore di τ (o di anticipo) le due copie del segnale *si somigliano*, mentre un suo valore nullo è indice (per quella scelta di τ) di *ortogonalità*.

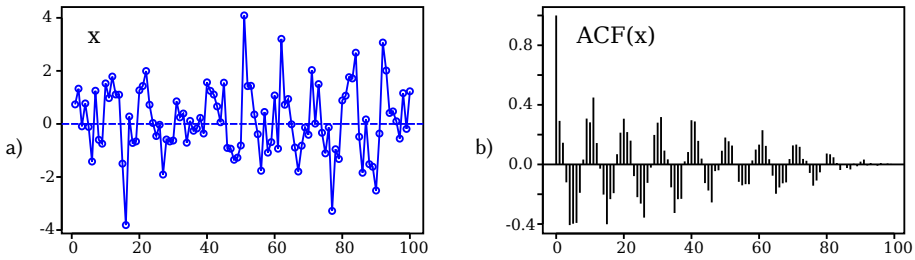


Figura 7.3: a) - sequenza sinusoidale immersa nel rumore; b) - sua autocorrelazione

Esempio In fig. 7.3-a) è raffigurata una sequenza numerica x_n a media nulla ottenuta da una sinusoida a cui è sovrapposto rumore, mentre a destra si mostra la relativa autocorrelazione, che nel caso numerico si valuta come $\mathcal{R}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n x_{n+k}$. Notiamo come $\mathcal{R}_x(k)$ presenti dei massimi per k multiplo del periodo della sinusoida, effetto della *sincronizzazione* tra il segnale e la sua copia traslata.

Intercorrelazione Lo stesso concetto di similitudine legato ad uno scorrimento temporale è tanto più valido qualora il prodotto scalare¹¹ sia calcolato tra due *diversi* segnali $x(t)$ ed $y(t)$; in tal caso l'operazione prende il nome di integrale di *intercorrelazione*, che per segnali *di energia* ha espressione:

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (7.7)$$

mentre per quelli *di potenza* è definito come $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt$.

Nel caso in cui $\mathcal{R}_{xy}(\tau) = 0$ per qualsiasi τ i segnali sono detti *ortogonali*, con riferimento allo spazio dei segnali per il quale $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$ è un prodotto scalare, ma anche *incorreali*, con riferimento all'aspetto statistico (7.2) per segnali a media nulla.

Legame con la convoluzione Le espressioni (7.6) e (7.7) sono anche indicate come *funzioni di autocorrelazione* e *intercorrelazione*, e dato che il loro argomento è un tempo (l'intervallo tra due campioni) $\mathcal{R}_x(\tau)$ e $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$ possono essere anche viste come *segnali* (funzione di τ anziché di t). Nello studio abbiamo già incontrato un integrale (di convoluzione) il cui risultato è una funzione del tempo; la somiglianza tra i due è più profonda di una semplice analogia, in quanto risulta essere¹²

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt = x^*(-\tau) * y(\tau) \quad (7.8)$$

in cui $*$ è il consueto simbolo di convoluzione.

¹¹In effetti in base alle definizioni date al § 2.4.3 risulta $\langle \bar{a}(t), \bar{b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) b^*(t) dt$ in cui è il *secondo* segnale ad essere coniugato, e non il *primo* come per la (7.7): dunque quest'ultima espressione corrisponde (in termini di prodotto scalare) a

$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt = \langle y(t + \tau), x(t) \rangle = \langle y(t), x(t - \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) x^*(t - \tau) dt$ equivalente alla (7.7) in quanto anziché anticipare $y(t)$, viene ritardato $x(t)$. Si preferisce comunque la definizione (7.7) per la sua somiglianza *formale* a quella di una convoluzione.

¹²Il risultato (7.8) si basa sul cambio di variabile $\theta = t + \tau$ che permette di scrivere

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\theta - \tau) y(\theta) d\theta = x^*(-\tau) * y(\tau)$$

Costruzione grafica L'ultima osservazione invita a realizzare la costruzione grafica di fig. 7.4, che illustra la procedura per il calcolo di un valore dell'integrale di autocorrelazione di $x(t) = \text{rect}_{2T}(t)$, molto simile a quella già illustrata per la convoluzione (vedi § 3.4.3), con la differenza che ora *non si effettuano* ribaltamenti di asse, e la traslazione è *all'indietro* (anticipo temporale) anziché in avanti. Per un rettangolo reale risulta $x(t) = x^*(-t)$, e dunque l'operazione equivale a calcolare $x(t) * x(t)$, ma a differenza della convoluzione alla seconda riga di fig. il termine $x(t + \tau)$ per $\tau > 0$ si trasla *a sinistra*. Alla terza riga è mostrato il prodotto dei segnali soprastanti, di cui l'integrale calcola l'area, fornendo il valore di $\mathcal{R}_x(\tau)$ *a destra*, come in figura.

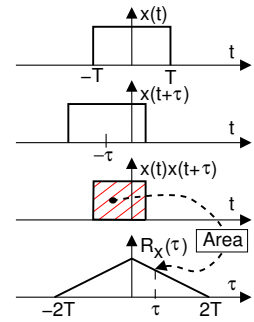


Figura 7.4: Autocorrelazione di un rettangolo

Per un esempio *animato*, vedi l'ultimo link della nota 22 a pag. 72.

7.1.5 Proprietà dell'autocorrelazione

Dedichiamoci ora ad approfondire alcuni aspetti che caratterizzano la funzione di autocorrelazione, fondamentali per meglio comprendere le indicazioni che $\mathcal{R}_x(\tau)$ può fornire a riguardo del segnale $x(t)$.

Invarianza rispetto alle traslazioni temporali Le funzioni di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ ed $\mathcal{R}_y(\tau)$ di due segnali $x(t)$ e $y(t) = x(t + \theta)$ sono identiche¹³. Notando ora che i due segnali hanno uguale modulo $|X(f)| = |Y(f)|$ e spettro di fase che differisce per un termine lineare (pag. 66), osserviamo che l'invarianza rispetto alle traslazioni è un aspetto di un risultato più generale, ossia

l'autocorrelazione non tiene conto dell'informazione legata allo spettro di fase dei segnali

In effetti $x(t)$ e $y(t)$ hanno anche la stessa densità spettrale di energia $\mathcal{E}_x(f) = \mathcal{E}_y(f) = |X(f)|^2$, come approfondiremo tra breve al § 7.2.1.

Estensione temporale L'autocorrelazione di un segnale di durata limitata è anch'essa di durata limitata, di estensione doppia rispetto a quella del segnale originario, come mostrato in fig. 7.4. Nel caso di un segnale di energia a durata illimitata, dato che per ottenere $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$ occorre che $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, $\mathcal{R}_x(\tau)$ tende a zero allo stesso modo.

Nel caso infine di un segnale di potenza, come per un membro di processo ergodico in cui la $\mathcal{R}_x(\tau)$ (7.5) eguaglia la media di insieme $m_{XX}^{(1,1)}(\tau)$, dato che quest'ultima tende a zero per $\tau \rightarrow \infty$, lo stesso avviene anche per $\mathcal{R}_x(\tau)$, ad eccezione dei due casi seguenti di segnale periodico, oppure a media non nulla.

¹³Infatti otteniamo

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) y(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t + \theta) x(t + \theta + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(a) x(a + \tau) da = \mathcal{R}_x(\tau)$$

Segnali periodici L'autocorrelazione di un segnale periodico di periodo T è anch'essa periodica, con lo stesso periodo. Infatti per $\tau = nT$ il secondo fattore integrando in (7.5) è traslato di un numero intero di periodi. Pertanto non occorre calcolare l'integrale su tutto l'asse dei tempi, e l'autocorrelazione dei segnali periodici è definita come

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x^T(\tau - nT) \quad \text{in cui} \quad \mathcal{R}_x^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (7.9)$$

Componente continua Qualora un segnale di potenza $x(t)$, od un processo stazionario, possa essere scritto come $x(t) = x_0(t) + a$ in cui $E\{x_0(t)\} = 0$ ed a una costante, troviamo che $m_x = a$, e che¹⁴ $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2$: dunque in questo caso l'autocorrelazione non si annulla per $t \rightarrow \infty$, ma tende al valore m_x^2 .

Massimo nell'origine Per una autocorrelazione risulta $\mathcal{R}_x(0) = \max_{\tau} \{\mathcal{R}_x(\tau)\}$, ovvero il suo valore per $\tau = 0$ è *il massimo* rispetto a qualunque altro τ . In particolare, $\mathcal{R}_x(0)$ è uguale all'energia del segnale $x(t)$, od alla sua potenza se $x(t)$ è di potenza, ossia

$$\mathcal{R}_x(0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}_x > |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di energia} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \mathcal{P}_x \geq |\mathcal{R}_x(\tau \neq 0)| & \text{se } x(t) \text{ è di potenza} \end{cases}$$

Notiamo inoltre che se $x(t)$ è periodico, l'ultimo segno \geq è una eguaglianza per τ multiplo di un periodo.

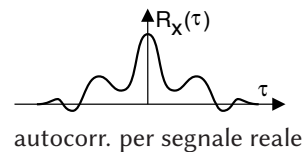
Simmetria coniugata E' possibile verificare¹⁵ che risulta

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_x^*(-\tau) \quad (7.10)$$

e ciò consente (vedi § 3.3) di affermare che $\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ è reale. Per l'intercorrelazione si ottiene un risultato simile, ovvero

$$\mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathcal{R}_{yx}^*(-\tau)$$

Nel caso in cui $x(t)$ sia reale, si ottiene $\mathcal{R}_x(-\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$, ovvero l'autocorrelazione di un segnale reale è *reale pari*, alla stregua (come mostreremo ora) della sua trasformata di Fourier.



¹⁴Adottando la notazione adatta al caso di un processo, in virtù della stazionarietà possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= E\{(x_0(t) + a)(x_0(t + \tau) + a)\} = \\ &= E\{x_0(t)x_0(t + \tau)\} + aE\{x_0(t)\} + aE\{x_0(t + \tau)\} + a^2 = \\ &= \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + 2a \cdot 0 + a^2 = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2 \end{aligned}$$

¹⁵Iniziamo con il riscrivere l'espressione $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt$ operando il cambio di variabile $t + \tau = \alpha$, da cui $t = \alpha - \tau$ e $dt = d\alpha$, ottenendo

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\alpha - \tau) x(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha) x^*(\alpha - \tau) d\alpha = \mathcal{R}_x^*(-\tau)$$

mentre il risultato per $\mathcal{R}_{xy}(\tau)$ si ottiene in modo simile.

7.2 Spettro di densità di potenza

Siamo finalmente in grado di caratterizzare questa densità spettrale sia per caso dei processi che per gli altri tipi di segnale, di potenza, periodico, o di energia. Lo strumento che lo consente è il...

7.2.1 Teorema di Wiener

Si enuncia senza troppe complicazioni¹⁶:

Lo spettro di densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ (o di energia $\mathcal{E}_x(f)$) di un segnale $x(t)$ certo o aleatorio è pari alla trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione, ovvero $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$

La dimostrazione del teorema per segnali di energia è straordinariamente semplice:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) X(f) e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f) X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_x(f)\}\end{aligned}$$

in cui abbiamo prima applicato il teorema di Parseval (pag. 64), poi la proprietà di traslazione nel tempo, e quindi (vedi § 3.2) riconosciuta $X^*(f) X(f)$ come la densità di energia $\mathcal{E}_x(f)$.

Come anticipato, il teorema è valido anche per segnali di potenza, per i quali la funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ da cui partire è quella espressa dalla (7.5) (¹⁷). Nel caso di processi ergodici, ogni membro del processo possiede la stessa $\mathcal{P}_x(f)$, che dunque può essere calcolata a partire dalla $\mathcal{R}_x(\tau)$ di uno qualunque di essi. Nel caso di processi stazionari almeno in senso lato, infine, l'autocorrelazione da cui partire¹⁸ è il momento misto $m_{XX}^{(1,1)}(\tau) = E\{x(t) x(t+\tau)\}$ calcolato come media di insieme dalla (7.4), e rappresenta il modo più generale di procedere, come applicato al § 7.7.4 per il caso di un segnale dati.

Discussione Il teorema di Wiener è (nella sua semplicità) uno strumento molto potente che può costituire una *strada alternativa* per verificare ed estendere risultati noti.

¹⁶In realtà le attribuzioni di questo risultato sono molteplici, comprendendo anche *Khinchin, Einstein e Kolmogorov* - fonte https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Wiener-Khinchin

¹⁷In tal caso una stima della densità di potenza può essere ottenuta mediante periodogramma (§ 7.3.1) calcolato su di un segmento di segnale $x_T(t)$ di durata T estratto da $x(t)$, e facendo tendere $T \rightarrow \infty$, ovvero $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$. Dato che $|X_T(f)|^2$ è proprio la densità di energia $\mathcal{E}_{x_T}(f)$ di $x_T(t)$, per il teorema di Wiener la sua anti-trasformata corrisponde alla funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_{x_T}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{E}_{x_T}(f)\}$ di $x_T(t)$, come definita dalla (7.6). Operando il passaggio al limite, si ottiene che

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{E}_{x_T}(f) \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathcal{R}_{x_T}(\tau)$$

corrispondente alla autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$ dell'intero segnale, come espressa dalla (7.5).

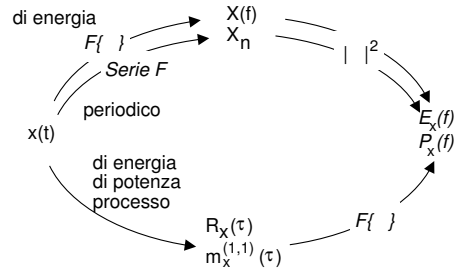
¹⁸La dimostrazione del caso dei processi viene svolta al § 7.7.3; la sua validità è vincolata a processi per i quali $\int |\tau \cdot m_{XX}^{(1,1)}(\tau)| d\tau < \infty$, ed è basata sulla considerazione che se la $\mathcal{P}_x^\theta(f)$ di un particolare membro θ è valutabile come $\mathcal{P}_x^\theta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T^\theta(f)|^2$, allora la sua media di insieme può scriversi come

$$\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_\Theta \left\{ |X_T^\theta(f)|^2 \right\}.$$

Ad esempio, la proprietà di massimo nell'origine per l'autocorrelazione $\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{P}_x$ può ora essere ricavata da quella del valore iniziale eq. (3.8):

$$\mathcal{R}_x(0) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_x(f) \} \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) df = \mathcal{P}_x$$

D'altra parte, la validità del teorema anche per segnali periodici e di energia consente di intraprendere per essi *due percorsi alternativi* per il calcolo delle corrispondenti $\mathcal{P}_x(f)$ e $\mathcal{E}_x(f)$, come illustrato nella figura a lato.



Dato che in virtù del teorema di Wiener è ora possibile definire una $\mathcal{P}_x(f)$ anche per processi e segnali di potenza, molto spesso nel testo ci si riferirà alle densità di potenza o di energia anziché alle trasformate dei segnali, in modo da applicare i risultati a tutti i casi possibili.

Applichiamo ora ad alcuni casi notevoli di segnale certo e processo aleatorio la relazione tra $\mathcal{P}_x(f)$ e $\mathcal{R}_x(\tau)$ espressa dal teorema di WIENER.

7.2.2 Segnale periodico

In questo caso $x(t)$ con periodo T può essere espresso mediante la relativa serie di Fourier (2.7) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ riferita alla frequenza fondamentale $F = 1/T$ (o prima armonica), e sviluppando in tal senso¹⁹ la (7.9) si ottiene che l'autocorrelazione di $x(t)$ ha espressione $\mathcal{R}_x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n F \tau}$, ovvero può essere espressa in serie di Fourier, e quindi è a sua volta periodica, come già osservato. La relativa densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ risulta dunque pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \delta(f - nF) \tag{7.11}$$

che costituisce una conferma del teorema di Parseval (2.13). A pag. 229 sono riportati alcuni esempi di autocorrelazione e densità di potenza per segnali periodici.

Componente continua Come osservato a pag. 196, se il segnale può essere scritto come $x(t) = x_0(t) + a$ in cui $E \{ x_0(t) \} = 0$ ed a è una costante, si ottiene $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_{x_0}(\tau) + a^2$ e dunque $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \} = \mathcal{P}_{x_0}(f) + a^2 \delta(f)$, ossia la relativa densità spettrale presenta un impulso nell'origine di area a^2 . Ovvero, dal punto di vista *opposto*,

¹⁹Partendo dalla (7.9) $\mathcal{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t+\tau) dt$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* e^{-j2\pi n F t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m e^{j2\pi m F (t+\tau)} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_n^* X_m \frac{1}{T} e^{j2\pi m F \tau} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi (m-n) F t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n F \tau} \end{aligned}$$

in cui l'ultima uguaglianza è frutto della proprietà di ortogonalità degli esponenziali (2.3).

un impulso nell'origine di $\mathcal{P}_x(f)$ indica la presenza di una componente continua in $x(t)$.

7.2.3 Processo armonico

Si tratta del segnale sinusoidale introdotto a pag. 163 e la cui fase iniziale è aleatoria, espresso come

$$x(t, \theta) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta) \tag{7.12}$$

in cui il parametro θ è una v.a. con d.d.p. uniforme tra $-\pi$ e π , ovvero $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \text{rect}_{2\pi}(\theta)$. In tal caso $x(t, \theta)$ costituisce un processo ergodico (vedi § 6.3.7), la cui d.d.p.

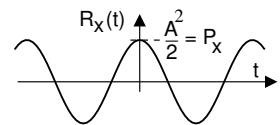
$$p_X(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}$$

è graficata a pagina 163.

Dato che a ciascuna realizzazione del processo armonico (ad esempio quella con $\theta = 0$) corrisponde la medesima²⁰ densità di potenza²¹ $\mathcal{P}_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$, possiamo ottenere l'autocorrelazione $\mathcal{R}_x(t)$ (7.12) senza dover svolgere l'integrale (7.9), e neanche la media di insieme (7.4). Infatti, per il teorema di Wiener si ha

$$\mathcal{R}_x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_x(f) \} = \frac{A^2}{4} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 t)$$

Questo risultato conferma che l'autocorrelazione di un segnale periodico è periodica; riflettiamo dunque sulla circostanza che anche un seno, od un coseno con qualunque altra fase, avrebbe avuto la stessa $\mathcal{R}_x(t)$. Ciò è d'altra parte evidente, avendo tutti questi segnali uguale densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$.



7.2.4 Processo gaussiano bianco limitato in banda

Un processo $n(t)$ è chiamato *bianco* quando la densità di potenza è *costante* in frequenza, ovvero quando si esprime come

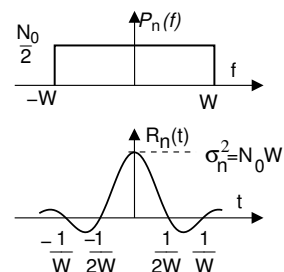
$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2W}(f)$$

in cui W è l'occupazione di banda a frequenze positive. Per questo caso l'autocorrelazione vale

$$\mathcal{R}_n(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_n(f) \} = N_0 W \text{sinc}(2Wt) \tag{7.13}$$

e possiamo pertanto constatare che si ottiene

$$\mathcal{R}_n(0) = \mathcal{P}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_n(f) df = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} df = N_0 W = \sigma_n^2$$



²⁰Infatti le diverse realizzazioni (7.12) al variare di θ differiscono solo per una traslazione temporale, a cui in frequenza corrisponde un termine di fase lineare, che non incide sulla $\mathcal{P}_x(f)$.

²¹Il risultato si ottiene applicando la (7.11) all'unica armonica presente, e considerando che la potenza totale $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$ si distribuisce per metà a frequenza positiva e per metà negativa.

in cui l'ultima eguaglianza sussiste (vedi eq. (6.9) a pag. 152) in quanto l'assenza di impulsi nell'origine per $\mathcal{P}_n(f)$ corrisponde ad un $n(t)$ a media nulla. Inoltre, dato che $\mathcal{R}_n(t)$ si azzerava per $t = k/2W$, osserviamo che campionando $n(t)$ con periodo $T_c = 1/2W$ si ottengono valori *incorrelati*, e se il processo è gaussiano, anche statisticamente indipendenti (vedi § 6.5.1). Questo risultato giustifica, almeno da un punto di vista teorico, una ipotesi che viene spesso fatta: quella di trovare, sovrapposti ai campioni di un segnale limitato in banda, dei campioni di rumore *statisticamente indipendenti*.

All'aumentare di W , $\mathcal{R}_n(t)$ tende a zero più rapidamente, cosicché il rumore si mantiene correlato per un tempo sempre minore, ovvero due campioni separati da uno stesso intervallo temporale t hanno una correlazione sempre minore. Un risultato simile vale anche più in generale, in quanto l'autocorrelazione $\mathcal{R}_x(t)$ di un qualsiasi processo a media nulla (tranne nel caso periodico, riconducibile ad una combinazione di processi armonici) tende a 0 con $t \rightarrow \infty$, ovvero da un certo t in poi la correlazione è trascurabile.

Infine, se immaginiamo il rumore bianco limitato in banda come il risultato del transito di un processo gaussiano a banda infinita (quindi, con $\mathcal{R}_n(t) = \delta(t)$) attraverso un filtro passa basso ideale con $H(f) = \text{rect}_{2W}(f)$ (vedi § 15.4.1), ci accorgiamo che la correlazione (7.13) tra campioni di rumore in uscita presi ad istanti diversi ($t \neq 0$) è una diretta conseguenza della memoria introdotta dalla risposta impulsiva $h(t) = 2W \text{sinc}(2Wt)$ sul segnale in transito, dato che l'operazione di convoluzione tra $n(t)$ e $h(t)$ rende i valori in uscita una *combinazione lineare* di quelli (passati) in ingresso (vedi § 3.4.3).

Esercizio Sia dato un processo gaussiano ergodico a media nulla e con densità di potenza

$$\mathcal{P}_x(f) = P_x \frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2} \text{ in cui } \beta = 0.2 \text{ e } P_x = 5.$$

1. Esprimere la relativa funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau)$;
2. esprimere la d.d.p. $p_X(x)$ di una v.a. x estratta dal processo ad un istante casuale;
3. esprimere vettore medio \mathbf{m}_x e matrice di covarianza Σ_x di una coppia di v.a. x_1 e x_2 estratte con un intervallo τ , ovvero $x_1 = x(t)$ e $x_2 = x(t + \tau)$, per un valore di $\tau = 10$.

Svolgimento In base alla tabella al § 3.8.8 risulta che $\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2} \right\} = e^{-\beta|t|}$, dunque

1. $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_x(f) \} = P_x e^{-\beta|\tau|} = 5 \cdot e^{-0.2|\tau|}$;
2. abbiamo evidentemente a che fare con una v.a. gaussiana, dunque $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ in cui $\sigma_x^2 = P_x = 5$ in quanto a media nulla, e pari al massimo di $\mathcal{R}_x(\tau)$ per $\tau = 0$;
3. la coppia $x_1 x_2$ è un vettore aleatorio gaussiano bidimensionale, il cui valor medio è nullo in base alla stazionarietà ed all'essere il processo a media nulla, mentre Σ_x è una matrice 2×2 sulla cui diagonale compare $\mathcal{R}_x(0) = \sigma_x^2$ mentre nelle altre due posizioni compare la covarianza $\sigma_{x_1 x_2} = m_{x_1 x_2}^{(1,1)}(\tau = 5) = \mathcal{R}_x(\tau = 5) = 5 \cdot e^{-0.2 \cdot 10} = 0.68$, dunque $\mathbf{m}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\Sigma_x = \begin{bmatrix} 5 & 0.68 \\ 0.68 & 5 \end{bmatrix}$.

7.2.5 Processo di segnale dati

Al § 15.1.2 descriveremo un generico segnale numerico come una somma di repliche di una funzione $g(t)$, ognuna moltiplicata per un diverso valore a_n rappresentativo delle informazioni da trasmettere:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT + \theta) \quad (7.14)$$

La presenza della variabile aleatoria θ a distribuzione uniforme tra $\pm \frac{T}{2}$ (per cui $p_{\theta}(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$), rende $x(t)$ un processo ergodico (vedi pag. 164).

Si mostrerà in appendice (§ 7.7.4) che, nelle ipotesi in cui le ampiezze a_n siano determinazioni di variabili aleatorie *indipendenti ed identicamente distribuite*, a *media nulla* e varianza σ_A^2 ⁽²²⁾, la densità spettrale di potenza del processo (7.14) risulta

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_g(f)}{T} \quad (7.15)$$

mentre nel caso in cui gli a_n siano *statisticamente dipendenti*, e/o a *media non nulla*, il risultato è più complesso (vedi eq. (7.43)). Limitandoci ad *interpretare* il risultato *semplice* espresso dalla (7.15), notiamo che $\mathcal{E}_g(f)$ è la densità di energia di una singola replica di $g(t)$, la cui ripetizione, con periodo T , fornisce una densità di potenza *media* $\frac{\mathcal{E}_g(f)}{T}$. Se ogni replica di $g(t)$ è moltiplicata per una v.a. indipendente a media nulla e varianza (potenza) σ_A^2 , la densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ aumenta di egual misura (vedi § 7.5.3).

7.3 Stima spettrale

Il teorema di Wiener (§ 7.2.1) ci aiuta qualora si desideri conoscere la densità di potenza per un processo ergodico, e se ne conosca l'autocorrelazione $m_X^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_X(\tau)$. Ma si ha spesso che fare con processi di cui, pur ricorrendo le ipotesi di ergodicità, si ignorano le statistiche di insieme: un approccio può allora essere quello di *stimare* $\mathcal{R}_X(\tau)$ a partire dalle realizzazioni, come mostrato al § 7.5.4, e da quella ottenere $\mathcal{P}_x(f)$. Un diverso caso tipico è quello di un segnale che, seppur rappresentativo di molti altri, presenta caratteristiche spettrali variabili nel tempo, e sono proprio queste *variazioni* a convogliare informazione²³. In tal caso conviene allora stimare direttamente $\mathcal{P}_x(f)$ senza passare dall'autocorrelazione, a partire da un segmento temporale del segnale. Esistono al riguardo tecniche differenti, come ad es. quella riportata al § 10.1.2; per ora ci limitiamo ad un caso *semplice* ma di rilievo teorico.

²²Media m_A e varianza σ_A^2 sono qui riferite ai valori multilivello a^k (con $k = 1, 2, \dots, L$) che un generico simbolo a_n può assumere, pesati con le rispettive probabilità p_k , ossia

$$m_A = \sum_{k=1}^L p_k a^k \quad \text{e} \quad \sigma_A^2 = \sum_{k=1}^L p_k (a^k - m_A)^2$$

²³Un esempio può essere un segnale sonoro, ad esempio una voce recitante, per il quale vogliamo studiare le caratteristiche spettrali *dei diversi suoni* della lingua (i fonemi), per confrontarle con quelle di un altro individuo, o per ridurre la quantità di dati necessaria a trasmettere il segnale in forma numerica (vedi § 10.1.2), o per realizzare un dispositivo di riconoscimento vocale.

7.3.1 Periodogramma

Data una realizzazione $x(t, \theta_i)$ di un processo, individuamo un intervallo temporale T su cui definire un segnale a durata limitata $x_T(t) = x(t, \theta_i) \text{rect}_T(t)$. Questo segnale è di energia, con trasformata $X_T(f)$ e densità di energia $\mathcal{E}_{x_T}(f) = |X_T(f)|^2$, e sotto le ipotesi di stazionarietà, da questo si può ottenere una stima $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ della densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ dell'intero segnale, semplicemente dividendo $\mathcal{E}_{x_T}(f)$ per la durata del segmento, ovvero

$$\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{P}_{x_T}(f) = \frac{|X_T(f)|^2}{T} \quad (7.16)$$

ottenendo una funzione della frequenza indicata come *periodogramma*, nome legato all'uso che ne fu inizialmente fatto, per scoprire tracce di periodicità in un segnale *rumoroso*. Al tendere di T ad ∞ , la (7.16) tende alla *vera* densità di potenza $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} = \mathcal{P}_x(f)$ della realizzazione $x_T(t, \theta_i)$ e, se questa appartiene ad un processo ergodico²⁴, a quella di un qualunque altro membro.

Polarizzazione e risoluzione spettrale Nel caso reale in cui T non tende ad infinito, si può mostrare²⁵ che usando $\mathcal{P}_{x_T}(f)$ (eq. (7.16)) come una *stima* $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ della vera densità $\mathcal{P}_x(f)$ del processo, si ottiene al suo posto

$$\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{P}_x(f) * T (\text{sinc}(fT))^2 \quad (7.17)$$

ossia una distorsione della stessa natura di quella osservato al § 3.8.4 a riguardo del procedimento di *finestratura temporale*, e che mostra come lo stimatore è *polarizzato*²⁶, e caratterizzato da una *risoluzione spettrale*²⁷ (§ 3.8.4) dell'ordine di $1/T$ Hz.

²⁴Nel caso contrario in cui $x(t, \theta)$ non sia ergodico, la sua densità spettrale può essere definita come $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left\{\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right\}$.

²⁵Per una determinata frequenza f_0 , il valore $\mathcal{P}_{x_T}(f_0) = \frac{|X_T(f_0)|^2}{T}$ è una variabile aleatoria (dipende infatti da θ), il cui valore atteso $m_T = E_\theta\{\mathcal{P}_{x_T}(f_0)\}$ vorremmo fosse pari alla vera densità $\mathcal{P}_x(f_0)$, e la cui varianza $\sigma_T^2 = E_\theta\{(\mathcal{P}_{x_T}(f_0) - \mathcal{P}_x(f_0))^2\}$ vorremmo che diminuisse al crescere di T . Per verificare se tali proprietà siano soddisfatte, valutiamo innanzitutto il *valore atteso* del periodogramma, a partire dalle relazioni fornite dal teorema di Wiener applicato ad $X_T(f)$, e cioè $|X_T(f)|^2 = \mathcal{E}_{x_T}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_T}(\tau)\}$:

$$\begin{aligned} E_\theta\{\mathcal{P}_{x_T}(f)\} &= E_\theta\left\{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t, \theta) \text{rect}_T(t) x(t + \tau, \theta) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\}\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} E_\theta\{x(t, \theta) x(t + \tau, \theta)\} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\} = \\ &= \mathcal{F}\left\{\mathcal{R}_x(\tau) \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}_T(t) \text{rect}_T(t + \tau) dt\right\} = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) \cdot \text{tri}_{2T}(\tau)\} = \\ &= \mathcal{P}_x(f) * T (\text{sinc}(fT))^2 \end{aligned}$$

Osserviamo quindi come una finestra di segnale rettangolare ne produca una triangolare sull'autocorrelazione. Ma c'è comunque di buono che all'aumentare di T lo stimatore tende al valore vero, dato che $\lim_{T \rightarrow \infty} T (\text{sinc}(fT))^2$ tende ad un impulso.

²⁶Quando il valore atteso di uno stimatore tende al valore vero si dice (vedi § 6.6.3) che lo stimatore è *non polarizzato* (o *unbiased*); se poi aumentando la dimensione del campione, la varianza della stima tende a zero, lo stimatore è detto *consistente*. Ci consola verificare che, come commentato alla nota precedente, per $T \rightarrow \infty$ la polarizzazione tende a scomparire, rendendo la stima *asintoticamente non polarizzata*.

²⁷La risoluzione spettrale in questo caso dipende dalla larghezza del lobo principale della densità di energia della funzione finestra applicata a $\mathcal{R}_x(\tau)$, che nel caso del $\text{tri}_{2T}(\tau)$ risulta $(\text{sinc}(fT))^2$, il cui lobo

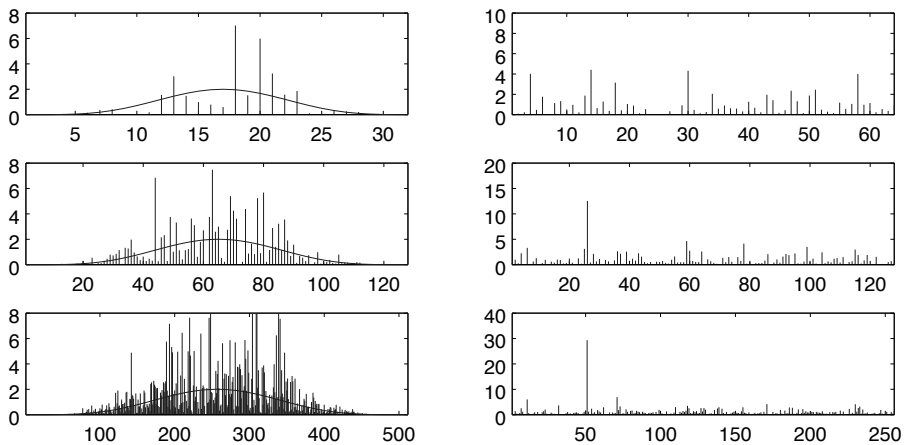


Figura 7.5: Periodogramma calcolato via fft per rumore colorato (a sinistra) e per sinusoide immersa nel rumore (a destra), su intervalli di segnale di durata (o numero di punti) crescente (dall'alto in basso)

Varianza della stima Come discusso, la stima $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ tende al vero $\mathcal{P}_x(f)$ per T che aumenta, migliorando allo stesso tempo il potere di risoluzione in frequenza; d'altra parte però i valori di $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ per una determinata f sono pur sempre delle v.a., e la loro varianza... *non diminuisce* all'aumentare di T , rendendo lo stimatore *inconsistente!* Riprendendo la notazione della nota (25), si può infatti dimostrare²⁸ che la varianza σ_T^2 della stima (7.16) è pari al valore di $\mathcal{P}_x(f)$ stesso, ossia per ogni valore di frequenza, la deviazione standard del valore di $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ è pari a $\sqrt{\mathcal{P}_x(f)}$, indipendentemente da quanto sia grande T . Anche se la teoria prevede che la varianza di uno stimatore diminuisca con l'aumentare dei dati a disposizione (vedi (6.30) a pag. 174), questo non avviene. Il motivo può essere spiegato considerando che in una implementazione numerica mediante DFT (§ 4.5), all'aumentare di T aumenta anche il numero di valori in frequenza che sono calcolati, e dunque non si determina un reale *accumulo* di dati per uno stesso valore stimato.²⁹

Esempio Approfondiamo il senso di quanto illustrato con l'aiuto di fig. 7.5, in cui mostriamo l'esito del calcolo del periodogramma ottenuto mediante una FFT (§ 4.5.2) su di un numero variabile di punti, indicati in ascissa. Sul lato sinistro della figura, il processo $x(t, \theta_i)$ è costituito da un *rumore colorato* con $\mathcal{P}_x(f) = (1 - \cos(4\pi f T_c))^2$, che pure è mostrato in figura: come anticipato, il valore stimato $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ si discosta da quello atteso $\mathcal{P}_x(f)$ in modo tanto maggiore quanto più $\mathcal{P}_x(f)$ è grande, per qualunque durata di osservazione.

principale è appunto ampio $1/T$. Anche la risoluzione, quindi, migliora all'aumentare di T .

²⁸Vedi ad es. http://risorse.dei.polimi.it/dsp/courses/ens_11/books/libro07secondaparte.pdf

²⁹Esistono diverse soluzioni a questo problema, tutte legate ad una riduzione della risoluzione spettrale. La prima è quella di *smussare* il $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ ottenuto, mediando i valori su frequenze vicine: tale operazione corrisponde ad un *filtraggio in frequenza*. Un secondo metodo prevede di suddividere l'intervallo di osservazione in diversi sottointervalli, calcolare il periodogramma su ciascuno di essi, e mediare i risultati.

Viceversa, la colonna di destra di fig. 7.5 mostra l'effettiva utilità del periodogramma per individuare segnali a banda stretta immersi nel rumore. In questo caso una senoide con frequenza $f_0 = \frac{f_c}{10}$ e potenza $\frac{1}{2}$ è stata sommata ad un rumore gaussiano bianco con $\sigma_n^2 = 4$, ottenendo così un SNR pari a $\frac{1}{8}$, ovvero -9 dB. Utilizzando (in alto a destra) una FFT a 128 punti (e dunque se ne mostrano la metà, vedi pag. 116), il tono presente appare difficilmente distinguibile dai valori su cui può oscillare la stima per il rumore bianco. Ma è sufficiente raddoppiare (e quadruplicare) il numero di campioni per migliorare la situazione: mentre l'ampiezza della riga alla frequenza della senoide raddoppia (ma non la varianza della sua stima), il livello di rumore si mantiene costante (notare la diversa scala orizzontale). Ecco dunque spiegato il motivo del suo nome ☺

7.4 Filtraggio di segnali e processi

Il teorema di WIENER § 7.2.1 ha fornito un approccio unificato alla definizione di spettro di potenza in virtù del suo legame con la funzione di autocorrelazione per tutti i tipi di segnale, compresi i processi. Riprendiamo quindi l'analisi iniziata al § 3.5.1 estendendola alla classe dei segnali aleatori, per arrivare a descrivere dal punto di vista spettrale e statistico l'uscita di un filtro con risposta impulsiva $h(t)$, ovvero ad $y(t) = x(t) * h(t)$, per i casi di segnale in ingresso di energia, periodico od aleatorio.

7.4.1 Densità spettrale in uscita da un filtro

Valutiamo innanzitutto il risultato per la densità di energia $\mathcal{E}_y(f)$ di uscita (e la rispettiva energia \mathcal{E}_y) per ingresso di energia, oppure $\mathcal{P}_y(f)$ e \mathcal{P}_y qualora in ingresso sia presente un segnale $x(t)$ di tipo periodico, di potenza, od un processo.

Segnali di energia Sappiamo che per il teorema di Parseval risulta $\mathcal{E}_y(f) = Y(f) Y^*(f)$; dato poi che $Y(f) = X(f) H(f)$, allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y(f) &= X(f) H(f) X^*(f) H^*(f) = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = \\ &= \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$

e dunque la densità di energia dell'uscita è pari al prodotto tra quella in ingresso e $|H(f)|^2$. A questo punto, eseguendo l'antitrasformata di Fourier di ambo i membri e ricordando la (3.22), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{E}_y(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 \} = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau) \end{aligned}$$

ovvero

l'autocorrelazione dell'uscita di un filtro è pari alla convoluzione tra l'autocorrelazione dell'ingresso e quella della risposta impulsiva

Anticipiamo che questo risultato è valido (nei rispettivi termini) anche per i casi di segnale periodico ed aleatorio. Quindi, notiamo che $|H(f)|^2$ può essere anche vista come la densità di energia del filtro, ovvero $|H(f)|^2 = \mathcal{E}_h(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_h(\tau) \}$.

A corollario sussistono le seguenti uguaglianze³⁰, tutte equivalenti ai fini del calcolo

³⁰La quarta uguaglianza sussiste in virtù del teorema di Parseval associato a quello di Wiener, mentre

dell'energia totale:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_y &= \mathcal{R}_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}_x(f) |H(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h^*(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (7.18)$$

Segnali periodici In questo caso il segnale di ingresso $x(t)$ si può esprimere nei termini di una serie di Fourier

$$x(t) = \sum_n X_n e^{j2\pi n F t}$$

a cui corrisponde una trasformata $X(f) = \sum_n X_n \delta(f - nF)$ (vedi eq. (3.12) a pag. 69) ed una densità di potenza $\mathcal{P}_x(f) = \sum_n |X_n|^2 \delta(f - nF)$ (vedi eq. (7.11)).

Anche il segnale di uscita $y(t)$ è periodico³¹, ed i suoi coefficienti di Fourier Y_n possono esprimersi nei termini di quelli dell'ingresso X_n e dei valori della risposta in frequenza (vedi § 3.5.1) come $Y_n = X_n H(nF)$, ovvero in modulo e fase come

$$|Y_n| = |X_n| |H(nF)|; \quad \arg(Y_n) = \arg(X_n) + \arg(H(nF))$$

Dato che la densità di potenza di $y(t)$ risulta pari a $\mathcal{P}_y(f) = \sum_n |Y_n|^2 \delta(f - nF)$, si ottiene

$$\mathcal{P}_y(f) = \sum_n |X_n|^2 |H(nF)|^2 \delta(f - nF) = |H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f)$$

Di nuovo, antitrasformando si ottiene $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$.

Esercizio Sia dato il filtro in figura con

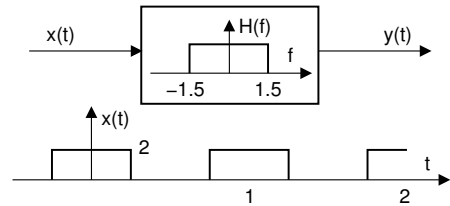
$$H(f) = \text{rect}_3(f)$$

ed al cui ingresso viene posto il segnale

$$x(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\frac{1}{2}}(t - n)$$

Calcolare:

- 1) la potenza in ingresso \mathcal{P}_x ,
- 2) la potenza in uscita \mathcal{P}_y ,
- 3) l'espressione di $y(t)$.



Risposte

- 1) Calcoliamo la media temporale: $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-1/4}^{1/4} 2^2(t) dt = \frac{4}{2} = 2$, dato che $T = 1$;
- 2) Sappiamo che $\mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df$, in cui $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2$, ed essendo $x(t)$ periodico, si ha $\mathcal{P}_x(f) = \sum_n |X_n|^2 \delta(f - nF)$. Per determinare i coefficienti della serie X_n , calcoliamo

$$X(f) = \mathcal{F}\{2\text{rect}_{\tau}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\} = 2\tau \cdot \text{sinc}(f\tau) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T})$$

ed essendo $\tau = \frac{1}{2}$ e $T = 1$, risulta

$$X(f) = \text{sinc}\left(\frac{f}{2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - n)$$

con $X_n = \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$. Dunque, dato che gli unici impulsi che cadono entro la risposta in frequenza $H(f)$ sono quelli per $f = -1, 0$ e 1 , si ha:

l'ultima è valida se $\mathcal{R}_H(\tau)$ è reale, ossia se $h(t)$ è idealmente realizzabile e dunque reale, vedi il § 1.6.

³¹Tenendo conto della natura *lineare e permanente* del filtro, l'uscita è la combinazione degli effetti degli ingressi, che per un segnale periodico corrispondono alle armoniche.

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \sum_{n=-1}^1 |X_n|^2 |H(n)|^2 \delta(f-n)$$

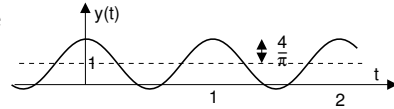
e pertanto si ottiene

$$\mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df = \left(\frac{\sin-\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{2}}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1 + 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

3) Considerando nuovamente che $T = 1/F = 1$, e che risulta $X_n = \left\{\frac{2}{\pi}, 1, \frac{2}{\pi}\right\}$, si ottiene

$$y(t) = \sum_{n=-1}^1 X_n H(n) e^{j2\pi n t} = 1 + \frac{2}{\pi} (e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos 2\pi t$$

Notiamo come il filtro lasci passare solamente la componente continua e la prima armonica.



Processi ergodici e segnali di potenza Anche in questo caso (in appendice 7.7.5) si verifica che $m_Y^{(1,1)}(\tau) = m_X^{(1,1)}(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$, e dunque

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 \tag{7.19}$$

Il risultato ovviamente si applica a qualunque membro del processo, per i quali come noto risulta $m_X^{(1,1)}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$, e dunque la (7.19) è valida anche per un qualunque segnale di potenza.

Esercizio Un processo gaussiano bianco con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$ attraversa un filtro causale con $h(t) = e^{-at}$. Determinare la $\mathcal{P}_y(f)$ in uscita.

Svolgimento Sebbene al § 3.8.8 sia riportato che per questo caso risulta $|H(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + 4(\pi f)^2}$ e dunque $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2a^2 + 8(\pi f)^2}$, verifichiamo di ottenere lo stesso risultato passando per la $\mathcal{R}_h(\tau)$, che risulta pari³² a $\frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}$, da cui di nuovo otteniamo³³ $|H(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_h(\tau)\} = \frac{1}{a^2 + 4(\pi f)^2}$.

Guadagno di potenza E' il nome con cui viene più spesso indicato (vedi § 8.2.1) il rapporto

$$|H(f)|^2 = \frac{\mathcal{P}_y(f)}{\mathcal{P}_x(f)} \tag{7.20}$$

³²Essendo $h(t)$ reale sappiamo che $\mathcal{R}_h(\tau)$ è reale pari (pag. 196), dunque è sufficiente calcolarla solamente per $\tau \geq 0$; inoltre, essendo $h(t) = 0$ per $t < 0$ l'estremo inferiore di integrazione parte da zero, ottenendo

$$\mathcal{R}_h(\tau) \Big|_{\tau > 0} = \int_0^{\infty} h(t) h(t+\tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = e^{-a\tau} \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = e^{-a\tau} \cdot \left. \frac{e^{-2at}}{-2a} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}$$

e dunque $\mathcal{R}_h(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a|\tau|}$

³³Tralasciando il termine $\frac{1}{2a}$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-a|\tau|}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|\tau|} e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j2\pi f)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(a+j2\pi f)\tau} d\tau = \left. \frac{e^{(a-j2\pi f)\tau}}{a-j2\pi f} \right|_{-\infty}^0 + \left. \frac{e^{-(a+j2\pi f)\tau}}{-(a+j2\pi f)} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{a-j2\pi f} + \frac{1}{a+j2\pi f} = \frac{a+j2\pi f + a-j2\pi f}{(a-j2\pi f)(a+j2\pi f)} = \frac{2a}{a^2 - (j2\pi f)^2} = \frac{2a}{a^2 + 4(\pi f)^2} \end{aligned}$$

ovvero $|H(f)|^2 = \frac{\mathcal{E}_y(f)}{\mathcal{E}_x(f)}$ nel caso di segnali di energia. La $|H(f)|^2$ ripropone in termini energetici il legame ingresso-uscita rappresentato da $H(f)$ (vedi § 3.5.1). Altre volte $|H(f)|^2$ è anche indicato come *risposta in potenza*, od anche *densità spettrale della risposta in potenza*, mentre la sua identificazione con la *densità di energia del filtro* $\mathcal{E}_h(f)$ usata a pag. 204 è una mia definizione *originale* (che io sappia).

7.4.2 Caratteristiche statistiche in uscita da un filtro

Approfondiamo ora lo studio della caratterizzazione statistica dell'uscita di un filtro quando in ingresso è presente un membro di un processo ergodico, per quanto riguarda la media, la varianza, e la d.d.p. del processo in uscita.

Media è pari a quella dell'ingresso moltiplicata per il *guadagno in continua* $H(0)$ del filtro, in quanto

$$\begin{aligned} m_y &= E\{y(t)\} = E\{x(t) * h(t)\} = E\{x(t)\} * h(t) = \\ &= m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = m_x H(0) \end{aligned}$$

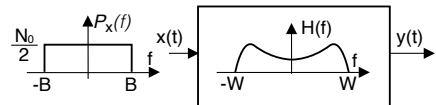
Varianza la condizione di ergodicità consente di scrivere $\mathcal{P}_y = \overline{y^2(t)} = E\{y^2\} = m_y^{(2)}$ e dunque, ricordando l'eq. (6.9), si ha

$$\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - (m_y)^2 = \mathcal{P}_y - (m_y)^2$$

in cui per valutare \mathcal{P}_y si può far uso di relazioni analoghe alle (7.18):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_y &= \mathcal{R}_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_x(\tau) \mathcal{R}_h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Esempio In ingresso ad un filtro $H(f)$ viene posto un processo $x(t)$ bianco con $m_x = 0$ e banda B , ovvero $\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{2B}(f)$ e quindi $\mathcal{R}_x(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(2Bt)$.



Essendo il processo a media nulla, per la varianza di uscita si ottiene

$$\sigma_y^2 = \mathcal{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-B}^B |H(f)|^2 df \leq \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_h(0)$$

con il segno di uguale se la *larghezza di banda* W di $H(f)$ è minore di B ³⁴. Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza $\mathcal{P}_y(f)$ di uscita si applica la (7.19), ottenendo $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$ con $|f| \leq B$: dunque il relativo processo $y(t)$ di uscita *non è più bianco*, ed in questo caso si dice *colorato*. A ciò corrisponde anche una modifica della funzione di autocorrelazione, che non è più un sinc, ma ora vale $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(2Bt) * \mathcal{R}_h(\tau)$. Ciò significa che mentre prima del filtro (per il processo bianco) due valori estratti in istanti multipli di $1/2B$ erano incorrelati, l'operazione di filtraggio ha introdotto *un legame* tra i valori estratti a tali intervalli³⁵.

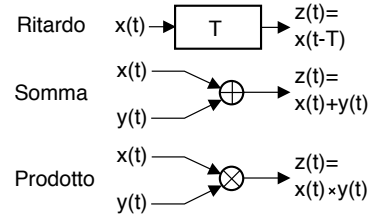
³⁴Infatti in tal caso $\int_{-W}^W |H(f)|^2 df$ è proprio pari all'energia della $h(t)$; se viceversa $W > B$ una parte di $|H(f)|^2$ cade *al di fuori* degli estremi di integrazione $(-B, B)$, e non contribuisce al risultato.

³⁵Questo risultato può essere analizzato ricordando che l'integrale di convoluzione calcola i singoli valori in uscita da un filtro, come dipendenti da tutti gli ingressi passati, ognuno pesato con il valore della risposta impulsiva relativo al ritardo tra ingresso passato ed uscita presente (vedi § 3.4.3). Pertanto, anche

Densità di probabilità A riguardo della $p_Y(y)$ del processo di uscita non si può dire nulla di generale, tranne che evidentemente dipende dalla $p_X(x)$ di ingresso e dalle operazioni compiute dal filtro; la sua espressione esatta va però determinata di volta in volta. Ad esempio, nel caso di un filtro trasversale (§ 5.2.1) possono applicarsi le regole di cambio variabile (§ 6.4). Un caso a parte è quello dei processi gaussiani, che se posti in ingresso ad un filtro, producono in uscita un processo anch'esso gaussiano³⁶.

7.5 Operazioni elementari sui segnali

Al § 5.2 abbiamo visto come gli elementi filtranti possano essere realizzati mediante una combinazione delle tre operazioni elementari mostrate in figura, ovvero *ritardo*, *somma* e *prodotto*. Prima di proseguire, approfondiamo dunque il risultato della combinazione di segnali certi ed aleatori mediante gli operatori introdotti. Iniziamo osservando che per i due casi di somma e prodotto si possono verificare le seguenti combinazioni:



- $x(t)$ segnale certo e $y(t)$ processo aleatorio: il risultato è (*in generale*) un processo *non stazionario*, infatti ora le medie d'insieme dipendono, istante per istante, dal valore che il segnale certo assume in quell'istante;
- $x(t)$ segnale periodico e $y(t)$ processo aleatorio: si ottiene un processo detto *ciclostazionario*, in quanto anche se le statistiche variano nel tempo, esse assumono valori *identici* con periodicità uguale a quella del segnale certo;
- $x(t)$ segnale costante pari ad a e $y(t)$ processo aleatorio: $z(t)$ è un processo della stessa natura di $y(t)$, con media m_z pari alla somma (od il prodotto) tra m_y ed a , potenza $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_y + a^2$ (oppure $\cdot a^2$), e autocorrelazione $\mathcal{R}_z(\tau) = \mathcal{R}_y(\tau) \cdot a^2$ (o $+a^2$).

Notiamo inoltre che spesso si può trattare un segnale periodico alla stregua di un processo, semplicemente ipotizzando per lo stesso una fase uniforme nell'arco di un periodo, in modo da ricondursi al caso del processo armonico, vedi § 7.2.3. Dunque, nel seguito trattiamo solo il caso dei processi.

se i singoli valori in ingresso sono statisticamente indipendenti, quelli di uscita (distanti tra loro per meno della durata della risposta impulsiva) condividono una porzione di storia comune, e quindi i loro valori non sono più incorrelati.

³⁶Questo risultato è una diretta conseguenza della proprietà di invarianza dei processi gaussiani rispetto alle trasformazioni lineari discussa al § 6.5.2. Infatti, riscrivendo l'operazione di convoluzione $y(t) = \int x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ in forma approssimata come una somma di infiniti termini $y(t) = \sum_i x(\tau_i) h(t-\tau_i) \Delta\tau_i$ appare evidente come, nel caso in cui $x(t)$ sia un processo gaussiano, l'uscita sia costituita da una combinazione lineare di v.a. gaussiane, e dunque anch'essa gaussiana.

7.5.1 Ritardo

Questo costituisce un caso particolare di canale perfetto (pag. 231), ed analiticamente corrisponde alla convoluzione con un impulso traslato $z(t) = x(t) * \delta(t - T)$. Pertanto, l'unica cosa che si modifica³⁷ in uscita è lo spettro di fase, in cui compare un termine lineare, ovvero $Z(f) = X(f) \cdot e^{-j2\pi fT}$, mentre valor medio, autocorrelazione e densità di potenza/energia restano invariate, così come non cambiano la varianza e la d.d.p. per il caso di processi.

7.5.2 Somma tra segnali aleatori

Procediamo nel calcolo delle grandezze rappresentative avvalendoci (a parte per il valor medio) della ipotesi di indipendenza statistica tra $x(t)$ e $y(t)$:

Valore medio

$$m_z = E\{x(t) + y(t)\} = E\{x(t)\} + E\{y(t)\} = m_x + m_y$$

Notiamo che questo risultato è valido anche in assenza di indipendenza statistica³⁸.

Potenza totale

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z &= E\{(x(t) + y(t))^2\} = E\{x^2(t)\} + E\{y^2(t)\} + 2E\{x(t) \cdot y(t)\} = \\ &= \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + 2m_x m_y \end{aligned}$$

dato che per processi statisticamente indipendenti la d.d.p. congiunta $p_{XY}(x, y)$ si fattorizza nel prodotto delle marginali $p_X(x) p_Y(y)$, così come si fattorizza il valore atteso del prodotto³⁹; anche i prossimi risultati valgono unicamente sotto l'ipotesi di *indipendenza statistica*.

Varianza Dalle due relazioni precedenti otteniamo

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\{(z(t) - m_z)^2\} = \mathcal{P}_z - (m_z)^2 = \mathcal{P}_x + \mathcal{P}_y + 2m_x m_y - (m_x + m_y)^2 = \\ &= \mathcal{P}_x - (m_x)^2 + \mathcal{P}_y - (m_y)^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned}$$

Autocorrelazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\tau) &= E\{z(t) z(t + \tau)\} = E\{(x(t) + y(t))(x(t + \tau) + y(t + \tau))\} = \\ &= E\{x(t) x(t + \tau)\} + E\{y(t) y(t + \tau)\} + E\{x(t) y(t + \tau)\} + E\{x(t + \tau) y(t)\} = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) + \mathcal{R}_y(\tau) + 2m_x m_y \end{aligned}$$

³⁷Vedi §§ 3.3 e 3.4.4.

³⁸Infatti in virtù della proprietà distributiva è possibile la saturazione di una v.a. alla volta, ovvero

$$\begin{aligned} \int \int (x + y) p(x, y) dx dy &= \int \int x \cdot p(x, y) dx dy + \int \int y \cdot p(x, y) dx dy = \\ &= \int x \cdot p(x) dx + \int y \cdot p(y) dy \end{aligned}$$

³⁹Infatti risulta

$$\begin{aligned} E\{x(t) \cdot y(t)\} &= \int \int x \cdot y \cdot p(x, y) dx dy = \int x \cdot p(x) dx \cdot \int y \cdot p(y) dy = \\ &= E\{x(t)\} E\{y(t)\} = m_x m_y \end{aligned}$$

dato che per processi indipendenti, stazionari e congiuntamente ergodici⁴⁰ risulta $E\{x(t)y(t+\tau)\} = \mathcal{R}_{xy}(\tau)$ pari cioè al prodotto delle medie $m_x m_y$, vedi eq. (7.2). Osserviamo anche come per $\tau = 0$ si ritrovi il valore della potenza totale \mathcal{P}_z .

Spettro di densità di potenza

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_z(\tau)\} = \mathcal{P}_x(f) + \mathcal{P}_y(f) + 2m_x m_y \delta(f)$$

e rimarchiamo ancora una volta che in caso di processi *non indipendenti* il risultato *non* è valido.

Densità di probabilità Nel caso di $x(t)$ ed $y(t)$ indipendenti si ottiene che il processo somma è caratterizzato da una densità di ampiezza pari a⁴¹

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\theta) p_Y(z - \theta) d\theta = p_X(x) * p_Y(y) \quad (7.21)$$

Tale risultato conferma quello già ottenuto al § 6.2.5 e relativo alla somma di variabili aleatorie, ovvero che la d.d.p. di una somma di v.a. indipendenti si ottiene per *convoluzione* tra le densità dei termini della somma.

Notiamo infine che se vengono sommati due processi gaussiani il risultato è ancora gaussiano, come discusso al § 6.5.2: infatti la convoluzione tra funzioni gaussiane è ancora una gaussiana, con media pari alla somma delle medie, e varianza alla somma delle varianze.

7.5.3 Prodotto tra segnali aleatori

Anche per il prodotto tra segnali valgono le considerazioni svolte al § 7.5. Qualora i fattori $x(t)$ ed $y(t)$ del prodotto $z(t)$ siano processi statisticamente indipendenti, stazionari e congiuntamente ergodici, si ha

Valor medio

$$m_z = E\{z(t)\} = E\{x(t)y(t)\} = E\{x(t)\}E\{y(t)\} = m_x \cdot m_y$$

dato che come già osservato risulta $p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ permettendo così la fattorizzazione del valore atteso del prodotto, ossia $\iint x y p(x, y) dx dy = \int x p(x) dx \cdot \int y p(y) dy$.

Potenza totale

$$\mathcal{P}_z = E\{z^2(t)\} = E\{x^2(t)y^2(t)\} = E\{x^2(t)\}E\{y^2(t)\} = \mathcal{P}_x \cdot \mathcal{P}_y$$

⁴⁰La proprietà di ergodicità congiunta corrisponde a verificare le condizioni ergodiche anche per i momenti misti $m_{XY}^{(1,1)}(x, y)$ relativi a coppie di valori estratti da realizzazioni di due differenti processi.

⁴¹Dimostriamo la (7.21) con un ragionamento forse poco ortodosso ma efficace. Dalla definizione di d.d.p. abbiamo che $z = x + y$ risulta compresa tra z e $z + dz$ con probabilità $p_Z(z) dz$, ma affinché ciò accada è necessario che, per ogni possibile valore di x , risulti $y = z - x$; per l'ipotesi di indipendenza statistica tra x ed y ciò avviene con probabilità congiunta $p_X(x) dx \cdot p_Y(z - x) dz$. Per ottenere $p_Z(z) dz$ occorre quindi sommare la probabilità congiunta su tutti i possibili valori di x , ovvero $p_Z(z) dz = \int_{\Omega_X} p_X(x) p_Y(z - x) dx dz$ in cui Ω_X è lo spazio campione per la v.a. x . Pertanto in definitiva si ottiene $p_Z(z) = \int_{\Omega_X} p_X(x) p_Y(z - x) dx$ che corrisponde alla convoluzione espressa nel testo.

Varianza

$$\sigma_z^2 = E \{ (z(t) - m_z)^2 \} = \mathcal{P}_z - (m_z)^2 = \mathcal{P}_x \cdot \mathcal{P}_y - (m_x \cdot m_y)^2$$

Funzione di autocorrelazione

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_z(\tau) &= E \{ z(t) z(t + \tau) \} = E \{ x(t) y(t) x(t + \tau) y(t + \tau) \} = \\ &= E \{ x(t) x(t + \tau) \} E \{ y(t) y(t + \tau) \} = \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \mathcal{R}_y(\tau) \end{aligned}$$

In particolare, notiamo che l'incorrelazione di uno dei due processi, per un certo valore di τ , provoca l'incorrelazione del prodotto, allo stesso istante τ .

Spettro di densità di potenza

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_z(\tau) \} = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \mathcal{R}_y(\tau) \} = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_y(f)$$

ossia è pari alla convoluzione tra le densità spettrali dei fattori. Notiamo quindi che la densità di potenza del prodotto presenta una occupazione di banda maggiore di quella dei singoli fattori.

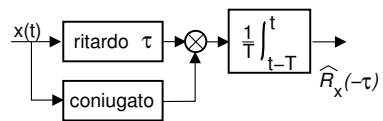
Densità di probabilità Si calcola con le regole per il cambiamento di variabile, illustrate al § 6.4. Nel caso in cui i due processi x e y siano statisticamente indipendenti, il risultato è⁴²

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(\theta) p_Y\left(\frac{z}{\theta}\right) \frac{d\theta}{|\theta|} \tag{7.22}$$

7.5.4 Stima della autocorrelazione

Come primo esempio dell'uso degli operatori elementari, la figura che segue mostra l'architettura di uno schema di elaborazione idoneo a effettuare una stima⁴³ $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ della funzione di autocorrelazione (§ 7.1.4) di un segnale $x(t)$ per un *anticipo* τ assegnato: infatti calcola $\widehat{\mathcal{R}}_x(-\tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x^*(t) x(t - \tau) dt$ per $\tau \geq 0$, da cui $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ si ottiene applicando l'eq. (7.10). Il blocco integratore è un filtro passa-basso con una $h(t) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$.

Variando τ si ottiene $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ per i diversi valori dell'argomento, e se $x(t)$ è stazionario possiamo calcolare $\widehat{\mathcal{P}}_x(f) = \mathcal{F} \{ \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \}$; se infine $x(t)$ è un



⁴²Dimostriamo la (7.22) ricorrendo al metodo illustrato al § 6.4.2, scrivendo il sistema (6.24) come $\begin{cases} z = xy \\ w = y \end{cases}$ in modo che la trasformazione inversa risulti $\begin{cases} x = z/w \\ y = w \end{cases}$. A questo punto si ottiene la

matrice Jacobiana $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix}$ come $\begin{bmatrix} 1/w & z/w^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a cui corrisponde il modulo del determinante (jacobiano) $|\det(J)| = \frac{1}{|w|}$. Dunque la d.d.p. congiunta di z e w si ottiene come $p_{ZW}(z, w) = |\det(J)| \cdot p_{XY}(x, y = f(z, w)) = \frac{1}{|w|} \cdot p_{XY}\left(\frac{z}{w}, w\right) = \frac{1}{|w|} \cdot p_X\left(\frac{z}{w}\right) p_Y(w)$ in virtù della indipendenza statistica tra x e y . Non resta quindi che saturare la $p_{ZW}(z, w)$ rispetto a w , ovvero $p_Z(z) = \int \frac{1}{|w|} \cdot p_X\left(\frac{z}{w}\right) p_Y(w) dw$, che corrisponde alla (7.22) qualora avessimo posto $\theta = x$ anziché $w = y$.

⁴³Si tratta di una stima (vedi § 6.6.3) in quanto l'intervallo di integrazione T è limitato.

membro di un processo ergodico, $\widehat{\mathcal{P}}_x(f)$ rappresenta una stima della densità di potenza per una qualunque realizzazione.

7.6 Filtro adattato

Dopo aver illustrato le trasformazioni subite da un segnale generico che attraversa un filtro generico, affrontiamo lo studio di un caso in cui il filtro viene *progettato* per essere al servizio di uno *specifico segnale*.

Allo scopo di anticipare *come va a finire*, diciamo subito che questa tecnica è un modo per calcolare l'intercorrelazione $\mathcal{R}_{yg}(\tau)$ tra il segnale (rumoroso) in ingresso $y(t)$ e quello $g(t)$ che ci aspettiamo di ricevere in assenza di rumore. Tale compito è svolto mediante un filtro⁴⁴ detto appunto *adattato* a $g(t)$ e posto all'ingresso ad un *detettore di impulso*, ovvero un dispositivo che deve decidere per la presenza o l'assenza di una forma d'onda *nota* immersa nel rumore, in modo da rendere minima la probabilità di sbagliare. Un problema simile verrà affrontato al § 14.4.2 in relazione alla detezione *incoerente* di sinusoidi, mentre ora ci riferiamo ad una *detezione coerente*, ovvero in cui il segnale è completamente specificato, compresa la sua temporizzazione o fase.

Schema di trasmissione

Indichiamo il segnale trasmesso come $x(t)$, ottenuto facendo transitare un impulso $\delta(t)$ attraverso un filtro con risposta impulsiva $h_T(t) = g(t)$, con durata limitata $0 < t < T$. Viene

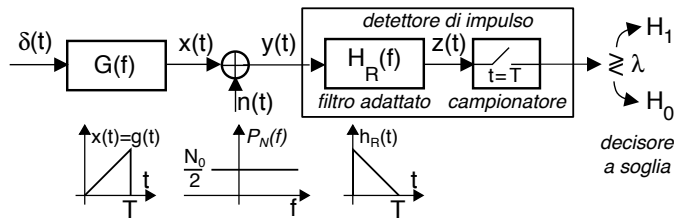


Figura 7.6: Detezione di impulso mediante filtro adattato

ricevuto il segnale $y(t)$, somma di $x(t)$ (*presente o meno*) e di un processo gaussiano bianco a media nulla $n(t)$, indicato come rumore, con densità spettrale $\mathcal{P}_N(f) = \frac{N_0}{2}$.

Decisore a soglia Un ricevitore basato sul filtro adattato effettua una decisione di *massima verosimiglianza* (vedi § 6.6.2.1) a riguardo della presenza (ipotesi H_1) o assenza (ipotesi H_0) del segnale $x(t)$ in base all'osservazione della grandezza $z(T)$ ottenuta (vedi figura 7.6) campionando all'istante $t = T$ l'uscita $z(t)$ del filtro di ricezione $H_R(f)$, che opera sul segnale ricevuto $y(t)$. Il valore osservato per $z(T)$ è quindi confrontato con *una soglia* λ , determinando la decisione per H_1 o H_0 a seconda se λ sia superata o meno, e commettendo *errore* sia nel decidere per H_1 in assenza di segnale, sia decidendo per H_0 in sua presenza⁴⁵.

Legame tra i filtri di trasmissione e ricezione A pag. 214 si dimostra che la probabilità di errore del decisore viene resa *minima* se $H_R(f)$ è realizzato in modo che

⁴⁴Sfruttando le analogie tra integrale di convoluzione e calcolo dell'intercorrelazione, vedi § 7.1.4.

⁴⁵Indicando rispettivamente con P_{e0} e P_{e1} i due tipi di errore, pari a (vedi fig. 7.7)

$$P_{e0} = \int_{\lambda}^{\infty} p_Z(z/H_0) dz \quad e \quad P_{e1} = \int_{-\infty}^{\lambda} p_Z(z/H_1) dz$$

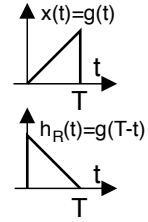
la probabilità di errore complessiva vale $P_e = P_{e0}P_0 + P_{e1}P_1$, in cui $P_0 = Pr(H_0)$ e $P_1 = Pr(H_1)$.

risultati

$$H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi fT} \quad (7.23)$$

a cui corrisponde una risposta impulsiva $h_R(t)$ esprimibile come⁴⁶

$$h_R(t) = g^*(T-t) \quad (7.24)$$



risultato che, nel caso di $g(t)$ reale come in fig. 7.6, corrisponde ad una $h_R(t)$ ottenuta ribaltando $g(t)$ rispetto all'asse delle ordinate, e ritardando il risultato di T , in modo da pervenire ad una $h_R(t)$ causale.

Prima di individuare il valore da utilizzare per la soglia λ , valutiamo le caratteristiche statistiche dei possibili valori per $z(T)$ in uscita da $h_R(t)$, che a causa della presenza del rumore, è una realizzazione di variabile aleatoria.

Segnale assente In questo caso (ipotesi H_0) nel segnale ricevuto è presente solo rumore, ovvero $y(t) = n(t)$, e dunque la grandezza di decisione $z(T)$ è una v.a. gaussiana⁴⁷ il cui valore si calcola come

$$z^{H_0}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\tau) y(T-\tau) d\tau = \int_0^T g^*(T-\tau) n(T-\tau) d\tau = \mathcal{R}_{GN}(0)$$

ossia è pari all'intercorrelazione (eq. 7.7) calcolata nell'origine tra $g(t)$ ribaltata ed una finestra di una realizzazione del processo $n(t)$. Indicando con $m_{z(T)}^{H_0}$ il valore atteso di $z(T)$, troviamo⁴⁸ che $m_{z(T)}^{H_0} = 0$, mentre la varianza di $z(T)$ vale⁴⁹ $\sigma_{z(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$, in cui \mathcal{E}_G è l'energia dell'impulso $g(t)$.

Segnale presente Se invece il segnale è presente (ipotesi H_1) allora $y(t) = g(t) + n(t)$, e si ottiene

$$\begin{aligned} z^{H_1}(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_R(\tau) y(T-\tau) d\tau = \int_0^T g^*(T-\tau) [g(T-\tau) + n(T-\tau)] d\tau = \\ &= \int_0^T g^*(T-\tau) g(T-\tau) d\tau + \int_0^T g^*(T-\tau) n(T-\tau) d\tau = \\ &= \mathcal{R}_G(0) + \mathcal{R}_{GN}(0) = \mathcal{E}_G + \mathcal{R}_{GN}(0) \end{aligned}$$

⁴⁶Potendo scrivere $G_T^*(f) e^{-j2\pi fT} = (G(f) e^{j2\pi fT})^*$ e ricordando la proprietà (3.11) espressa a pag. 68 $\mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = x^*(-t)$, dalla (7.23) otteniamo

$$\begin{aligned} h_R(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_R(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{G^*(f) e^{-j2\pi fT}\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\left(G(f) e^{j2\pi fT}\right)^*\right\} = \\ &= g^*(\theta+T)|_{\theta=-t} = g^*(T-t) \end{aligned}$$

⁴⁷Ricordiamo (vedi § 7.4.2) che l'uscita di un filtro al cui ingresso è posto un processo gaussiano, è anch'essa gaussiana.

⁴⁸Infatti

$$m_{z(T)}^{H_0} = E\{z(T) / H_0\} = E\{\mathcal{R}_{GN}(0)\} = E\left\{\int_0^T g^*(t) n(t) dt\right\} = \int_0^T g^*(t) E\{n(t)\} dt$$

pari a zero se $E\{n(t)\} = 0$.

⁴⁹Dato che $m_{z(T)}^{H_0} = 0$, risulta $\sigma_{z(T)}^2 = E\{z^2(T)\} = \mathcal{R}_Z(\tau)|_{\tau=0}$. Sappiamo inoltre che

$$\mathcal{R}_Z(\tau) = \mathcal{R}_N(\tau) * \mathcal{R}_{H_R}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * \mathcal{R}_{H_R}(\tau) = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(\tau)$$

pertanto

$$\sigma_{z(T)}^2 = \mathcal{R}_Z(\tau)|_{\tau=0} = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(0) = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_R^*(t) h_R(t) dt = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$$

dato che $h_R(t)$ ha la stessa energia di $g(t)$.

producendo ancora una grandezza di decisione $z(T)$ gaussiana, con la stessa $\sigma_{z(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ (dovuta al rumore) ma con valor medio $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G \neq 0$, dovuto alla presenza di segnale⁵⁰. Notiamo esplicitamente che $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G$ non dipende dalla particolare $g(t)$ adottata, né dalla sua durata T , ma solo dalla sua energia, proprio in virtù dell'aver adottato in ricezione un filtro *adattato* a quello di trasmissione.

Soglia di decisione La figura 7.7 mostra l'esito dei nostri calcoli nella forma della d.d.p. della v.a. $z(T)$ nelle ipotesi H_0 ed H_1 , e pertanto il criterio di massima verosimiglianza (vedi § 6.6.2.1) individua come soglia di decisione ottima il valore $\lambda = \frac{\mathcal{E}_G}{2}$, a cui compete una probabilità di errore P_e minima qualora $Pr(H_0) = Pr(H_1)$, ovvero se la probabilità a priori delle due ipotesi è uguale, vedi nota 45.

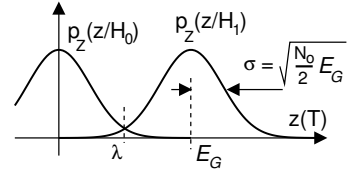


Figura 7.7: D.d.p. condizionate e soglia di decisione

Ottimalità Mostriamo ora che il risultato ottenuto permette la migliore separazione tra le d.d.p. condizionate alle due ipotesi, nel senso che qualsiasi altra scelta per $H_R(f) \neq G^*(f) e^{-j2\pi fT}$ con energia $\mathcal{E}_{H_R} = \mathcal{E}_G$ avrebbe prodotto delle d.d.p. più ravvicinate. La separazione tra le gaussiane è legata⁵¹ al rapporto $m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)}$ che viene reso massimo⁵² dalla scelta (7.23), che porta a $m_{z(T)}^{H_1} = \mathcal{E}_G = \max$. Il quadrato $(m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)})^2$ del rapporto suddetto viene indicato anche come *rapporto segnale rumore* all'istante di decisione⁵³,

⁵⁰Infatti, ora risulta $m_{z(T)}^{H_1} = E\{\mathcal{R}_G(0) + \mathcal{R}_{GN}(0)\} = \mathcal{E}_G + E\{\mathcal{R}_{GN}(0)\}$ in cui il secondo termine è nullo come già osservato, mentre il primo è un valore certo, pari all'energia $\mathcal{E}_G = \mathcal{R}_G(0)$ dell'impulso $g(t)$.

Per ciò che riguarda $\sigma_{z(T)}^2$, osserviamo che $z^{H_1}(T) = \mathcal{E}_G + z^{H_0}(T)$, dunque le v.a. *centrate* sono le stesse, e così la varianza $\sigma_{z^{H_1}(T)}^2 = \sigma_{z^{H_0}(T)}^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$: infatti la componente aleatoria dell'uscita è dovuta al solo $n(t)$.

⁵¹Il rapporto $m_{z(T)}^{H_1}/\sigma_{z(T)}$ confronta l'uscita attesa $m_{z(T)}^{H_1} = E\{\mathcal{R}_{GH_R}(0)\}$ di H_R per $t = T$ nell'ipotesi H_1 , che dipende dall'energia mutua tra $g(t)$ ed $h_R(t)$, con la sua deviazione standard $\sigma_{z(T)} = \frac{N_0}{2} \mathcal{R}_{H_R}(0)$ dovuta al rumore.

⁵²Consideriamo il caso di avere una $H_R(f)$ generica. In presenza di solo segnale, si ottiene

$$|z(T)|^2 = |F^{-1}\{Z(f)\}|_{t=T}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H_R(f) G(f) e^{j2\pi fT} df \right|^2$$

A questa espressione può essere applicata la disuguaglianza di Schwartz (a pag. 50 si enuncia la relazione $|\int_{-\infty}^{\infty} a(\theta) b^*(\theta) d\theta|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |a(\theta)|^2 d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta$, con l'eguaglianza solo se $a(\theta) = k \cdot b(\theta)$), qualora si faccia corrispondere $H_R(f)$ ad $a(\theta)$, e $G(f) e^{j2\pi fT}$ a $b^*(\theta)$, ottenendo così

$$|z(T)|^2 = \left(m_{z(T)}^{H_1}\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$$

con l'eguaglianza solo se $H_R(f) = kG^*(f) e^{-j2\pi fT}$, ovvero se $h_R(t) = kg(T-t)$ (eqq. (7.23) e (7.24)), ossia se $H_R(f)$ è *adattata* a $G(f)$. Scegliendo $k = 1$, i due integrali a prodotto hanno lo stesso valore, pari a \mathcal{E}_G , e dunque $\left(m_{z(T)}^{H_1}\right)^2 = |z(T)|^2 = \mathcal{E}_G^2$.

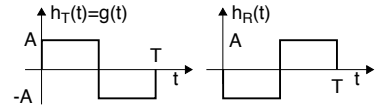
⁵³In effetti la (7.25) non è adimensionale ma è esprimibile come [sec], dunque non è un vero e proprio SNR, ma dato che il termine rende l'idea, questa accezione è entrata nell'uso comune.

e qualora $H_R(f)$ sia adattato vale

$$SNR_{FA} = \frac{(\mathcal{E}_G)^2}{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G} = \frac{2\mathcal{E}_G}{N_0} \tag{7.25}$$

Anticipiamo subito la (7.25) è valida solo in presenza di rumore bianco, mentre se questo è *colorato*, l' SNR diminuisce, ed il filtro ottimo va determinato nel modo specificato poco più avanti.

Esempio Applichiamo i risultati fin qui ottenuti al caso in cui si utilizzi la $g(t)$ mostrata a lato, in cui poniamo $A = 2$ e $T = 10^{-1}$.

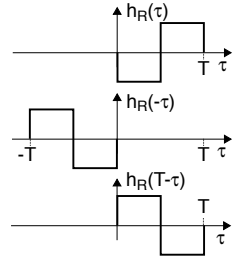


Un decisore a filtro adattato sarà allora caratterizzato dalla risposta impulsiva $h_R(t)$ mostrata a fianco di $g(t)$. Se campioniamo l'uscita $z(t)$ di h_R all'istante $t = T$, nel caso di *assenza* di rumore e *presenza* di segnale, si ottiene il valore

$$m_z = z(t)|_{t=T} = g(t) * h_R(t)|_{t=T} = \int_0^T g(\tau) h_R(T - \tau) d\tau$$

Dato che $h_R(T - \tau) = g(\tau)$, come rappresentato nella figura a lato, allora $m_z = \int_0^T [g(\tau)]^2 d\tau = \mathcal{E}_G$, pari a

$$\mathcal{E}_G = \int_0^T [g(t)]^2 dt = A^2 \int_0^T dt = A^2 T = 4 \cdot 10^{-1}.$$



Il valore di $m_z = \mathcal{E}_G$ rappresenta il contributo di segnale all'uscita, indipendente dal rumore.

Consideriamo ora in ingresso a h_R anche un processo di rumore gaussiano ergodico bianco, a media nulla, e densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2} 10^{-1}$. Il *valore atteso* $m_z^{H_1}$ dell'uscita campionata rimane lo stesso $m_z = \mathcal{E}_G$, ma ora ad esso si sovrappone la componente aleatoria dovuta al rumore, anch'essa gaussiana e caratterizzata da una varianza pari a $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G = \frac{N_0}{2} A^2 T = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 10^{-2}$. Le d.d.p. condizionate mostrate in fig. 7.7 hanno dunque espressione

$$p(z/H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}} \quad p(z/H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

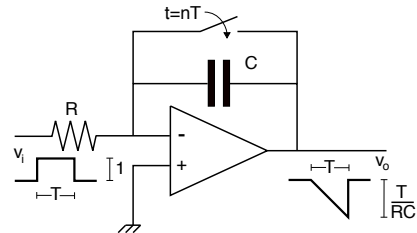
in cui $\sigma_z = \sqrt{\sigma_z^2} = \sqrt{0.02} = 1.41 \cdot 10^{-1}$, $m_z = \mathcal{E}_G = 4 \cdot 10^{-1}$, mentre per la soglia di decisione, si trova il valore $\lambda = \mathcal{E}_G/2 = 2 \cdot 10^{-1}$.

Integrate and dump Si tratta di una soluzione circuitale⁵⁴ in grado di conseguire le prestazioni di detezione del filtro adattato nel caso di un $g(t) = \text{rect}_T(t)$, a cui corrisponde una $h_R(t)$ anch'essa rettangolare.

Infatti, il segnale in uscita vale

$$v_o(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^t v_i(t) dt + v_o(0)$$

in cui $v_o(0)$ può essere reso nullo e quindi, a parte il segno ed il fattore $\frac{1}{RC}$, il valore $v_o(T)$ corrisponde a quello che si trova allo stesso istante in uscita



⁵⁴Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Op_amp_integrator

da un filtro adattato⁵⁵ alla $g(t)$ rettangolare. L'interruttore che scarica (*dump*) la capacità C per $t = nT$ ha lo scopo di azzerare la $v_o(0)$ prima della ricezione di un successivo impulso, rendendo possibile l'uso dello schema per la detezione ottima di flussi binari a velocità $f_b = 1/T$.

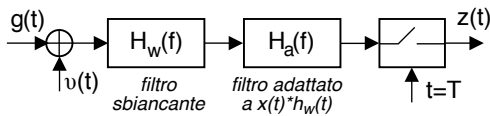
Rumore colorato Nel caso in cui $\mathcal{P}_N(f)$ non sia pari ad una costante, la condizione per massimizzare (7.25) non è più la (7.23), bensì deve risultare⁵⁶

$$H_R(f) = \frac{G^*(f) e^{-j2\pi fT}}{\mathcal{P}_N(f)} \tag{7.26}$$

in modo che $H_R(f)$, oltre ad *esaltare* le frequenze per le quali lo spettro del segnale è maggiore, riesce anche ad *attenuare* quelle per le quali la potenza di rumore è più grande. Riscrivendo la (7.26) come

$$H_R(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}} \frac{G^*(f)}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}} e^{-j2\pi fT} = H_w(f) H_a(f)$$

si può giungere alla interessante interpretazione illustrata in figura: il segnale ricevuto, in cui è presente sia il segnale $g(t)$ che il rumore colorato $v(t)$, attraversa innanzitutto



un *filtro sbiancante*⁵⁷ con risposta in frequenza $H_w(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}}$ e risposta impulsiva $h_w(t)$, così chiamato perché ha lo scopo di rendere il rumore *bianco*. Quindi, viene attraversato il filtro adattato all'impulso *sbiancato*, ossia alla forma d'onda

$g_w(t) = g(t) * h_w(t)$ con trasformata $G_w(f) = \frac{G(f)}{\sqrt{\mathcal{P}_N(f)}}$, risultato del transito di $g(t)$ attraverso $H_w(f)$.

Assenza di rumore Qualora non sia presente rumore, l'andamento dell'uscita del filtro adattato è proprio pari (a meno del ritardo T) alla funzione di autocorrelazione di $g(t)$, che viene campionata in corrispondenza del suo massimo.

⁵⁵Il circuito non lineare mostrato non è un filtro adattato, dato che per $t > T$ non produce la stessa uscita (vedi <http://dsp.stackexchange.com/questions/9094/understanding-matched-filter>).

⁵⁶La condizione (7.26) si ottiene anche in questo caso imponendo la massimizzazione di $SNR = (m_{z(T)}^{H_1})^2 / \sigma_{z(T)}^2 = \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} H_R(f) G(f) e^{j2\pi fT} df|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 \mathcal{P}_N(f) df}$ il cui denominatore tiene conto che $\sigma_{z(T)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_Z(f) df$ è dovuta al solo rumore. Appliciamo ora a SNR la disuguaglianza di Schwartz posta nella forma

$$\frac{|\int_{-\infty}^{\infty} a(\theta) b^*(\theta) d\theta|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |a(\theta)|^2 d\theta} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta$$

e identifichiamo $a(\theta)$ con $H_R(f) \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$ e $b^*(\theta)$ con $G(f) e^{j2\pi fT} / \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$. Imponendo di nuovo la condizione $a(\theta) = k \cdot b(\theta)$ con $k = 1$, otteniamo il massimo SNR come $SNR = \int_{-\infty}^{\infty} |b(\theta)|^2 d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(f)|^2}{\mathcal{P}_N(f)} df$, e quindi scrivendo $a(\theta) = b(\theta)$ ossia $H_R(f) \sqrt{\mathcal{P}_N(f)} = G^*(f) e^{-j2\pi fT} / \sqrt{\mathcal{P}_N(f)}$ si ottiene il risultato (7.26).

⁵⁷Detto *whitening filter* in inglese.

Probabilità di errore Tornando al caso di rumore bianco, in base al ragionamento esposto alla nota 45 nel caso di equiprobabilità delle due ipotesi H_1 e H_0 , la P_e è pari alla probabilità che una v.a. gaussiana con media nulla e varianza $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$ sia maggiore di $\frac{\mathcal{E}_G}{2}$; tale valore può essere calcolato applicando l'eq. (6.11) a pag. 154, in modo da ottenere $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\mathcal{E}_G/2}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\}$.

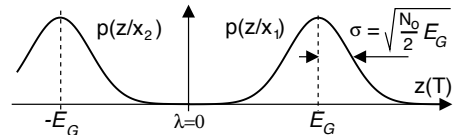
Esempio con i dati riportati nell'esempio di pag. 215, per la probabilità di errore nel caso di H_0 e H_1 equiprobabili si ottiene $P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-1}}{10^{-1}}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \{1\} \simeq 1.5 \cdot 10^{-1}$ (si utilizzi la fig. 6.2 a pag. 154).

Ma questa non è la *minima* P_e conseguibile, che si ottiene invece nel caso di *segnalazione antipodale*, molto più indicata nel caso in cui lo scopo del ricevitore non sia di individuare un solo impulso isolato, ma una sequenza simbolica binaria.

7.6.1 Segnalazione antipodale

Volendo distinguere tra due possibili messaggi (ad es, x_1 ed x_2), la scelta *ottima* per rendere minima la probabilità di errore consiste nell'adottare $x_1(t) = g(t)$, $x_2(t) = -x_1(t)$, e di porre in ingresso al ricevitore un filtro adattato a $g(t)$.

In questo modo l'uscita del filtro all'istante di campionamento rappresenta una v.a. gaussiana z con media $m_z = \pm \mathcal{E}_G$ (a seconda se sia stato trasmesso x_1 o x_2) e varianza $\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$. Pertanto ora la soglia di decisione è pari a *zero*, e nel caso di simboli equiprobabili, in base alla nota 45, la probabilità di errore P_e corrisponde a quella di eccedere \mathcal{E}_G per una v.a. gaussiana a media nulla: in conseguenza del risultato (6.11) di pag. 154 si ottiene quindi



$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\mathcal{E}_G}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G}} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{\mathcal{E}_G}{N_0}} \right\} \quad (7.27)$$

che, come vedremo all'eq. (15.18), rappresentano anche le prestazioni ottenibili per un segnale dati binario a banda minima.

7.6.2 Segnalazione ortogonale

Dovendo trasmettere N diversi messaggi (x_1, x_2, \dots, x_N), possiamo associare ad ognuno di essi una forma d'onda $x_i(t)$ tale che $\int x_i(t) x_j(t) dt = 0$ con $i \neq j$, ovvero in modo che i segnali $x_i(t)$ siano *ortogonali*. In tal caso il ricevitore ottimo è costituito da un *banco* di filtri, ognuno adattato ad una diversa $x_i(t)$, in modo che, in assenza di rumore, la ricezione di una delle forme d'onda $x_i(t)$ non produca nessuna uscita sui filtri del banco per $j \neq i$. In presenza di rumore, la decisione su cosa sia stato trasmesso viene presa valutando quale dei filtri presenti il valore massimo in corrispondenza dell'istante di campionamento, realizzando così un *ricevitore a correlazione* (vedi § 16.5 a pag. 510).

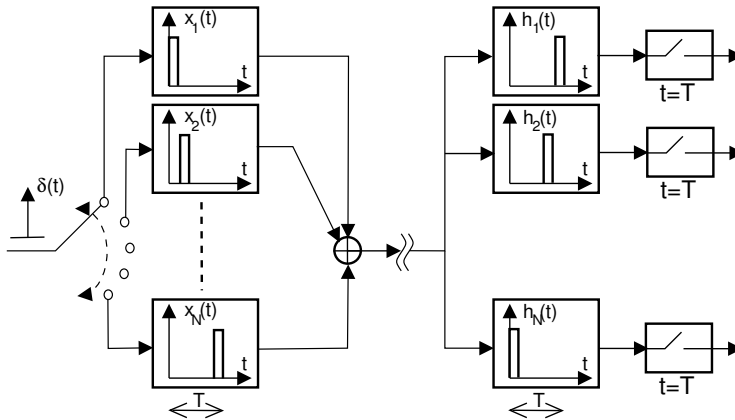
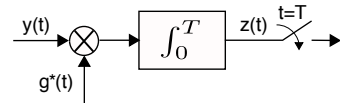


Figura 7.8: Schema di ricevitore a correlazione

Esempio L'impulso $\delta(t)$ entra in uno di filtri mostrati nella figura 7.8, le cui risposte impulsive $x_i(t)$ realizzano una famiglia di funzioni ortogonali, dato che le rispettive forme d'onda non si sovrappongono nel tempo. In ricezione, solo uno dei filtri adattati con risposta impulsiva $h_i(t)$ produce una uscita diversa da zero per $t = T$, come verificabile ricordando la costruzione grafica dell'operazione di convoluzione mostrata a pag. 72.

Multiplazione a divisione di codice La trasmissione mediante forme d'onda ortogonali può essere applicata alla tecnica di accesso multiplo a divisione di codice o CDMA⁵⁸, qualora ogni utente usi una forma d'onda ortogonale a quella degli altri, ed il ricevitore usi un filtro adattato programmabile in modo da discriminare uno solo tra tutti i codici ricevuti contemporaneamente.

Correlatore Si tratta di un modo alternativo di realizzare un filtro adattato, derivante dall'osservazione che il suo ruolo essenzialmente si riduce al calcolo della *intercorrelazione* (eq. (7.7)) tra il segnale ricevuto e quello atteso. Tale funzione può essere realizzata anche ricorrendo allo schema in figura, dove un integratore (implementato ad es. mediante il circuito *integrate and dump*, pag. 215) opera sul prodotto tra il segnale in arrivo ed una copia locale del coniugato⁵⁹ della forma d'onda trasmessa. Un caso di applicazione di questo schema si trova al § 16.5.1 a proposito del ricevitore FSK ortogonale, mentre una variante idonea a stimare l'*autocorrelazione* di $y(t)$ è proposta al § 7.5.4.



7.7 Appendici

Un capitolo così ad ampio respiro non può che ospitare una serie di appendici altrettanto variate!

⁵⁸(vedi § 11.1.1.3, § 16.9.2.5)

⁵⁹Anche se nel caso di banda base il segnale trasmesso è reale, volendo applicare la teoria esposta ad un involuppo complesso (§ 11.2.1) si rende necessario tener conto dell'operazione di coniugato.

7.7.1 Regressione lineare

Riprendiamo il modello accennato a pag. 191 per approfondire il metodo di predizione del valore atteso di una v.a. y a partire dalla conoscenza di una seconda v.a. x (il *regressore*) correlata alla prima, in base alla relazione

$$y = ax + b + \varepsilon \tag{7.28}$$

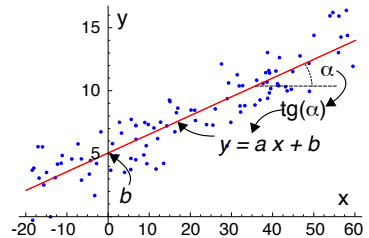
in cui ε rappresenta un errore additivo anch'esso aleatorio, a media nulla e statisticamente indipendente sia da x che da y . Per determinare il valore dei parametri del modello a e b , si imposta un problema di minimizzazione a carico della varianza dell'errore $\sigma_\varepsilon^2 = E \{(y - ax - b)^2\}$ risolvibile eguagliando a zero le derivate di σ_ε^2 rispetto ad a e b . ovvero

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{da} &= \frac{d}{da} E \{(y - ax - b)^2\} = 2E \{(y - ax - b) (-x)\} = \\ &= 2E \{-xy + ax^2 - bx\} = 2(-m_{xy} + am_x^{(2)} + bm_x) = 0 \\ \frac{d\sigma_\varepsilon^2}{db} &= 2E \{(y - ax - b) (-1)\} = 2(-m_y + am_x + b) = 0 \end{aligned} \tag{7.29}$$

Dalla seconda delle (7.29) otteniamo $b = m_y - am_x$ che sostituito nella prima dopo pochi passaggi permette di ottenere $a[m_x^{(2)} - (m_x)^2] = m_{xy} - m_x m_y$. Sostituendo ora $[m_x^{(2)} - (m_x)^2]$ con σ_x^2 (vedi eq. (6.9)), e $m_{xy} - m_x m_y$ con σ_{xy} (eq. (7.3)), si ottiene per a l'espressione riportata sotto, che a sua volta sostituita nella seconda delle (7.29) produce

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \text{e} \quad b = m_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} m_x \tag{7.30}$$

che sono i valori da utilizzare nella *retta di regressione* $y = ax + b$ esemplificata nella figura a lato assieme ad una *nuvola* (o meglio *set*) di coppie (x_i, y_i) di misurazioni sperimentali, che vengono utilizzate per effettuare una *stima campionaria* (vedi § 6.6.3.1)



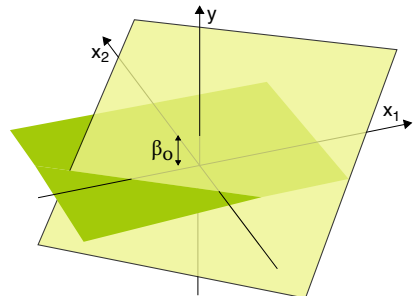
$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \hat{m}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \hat{m}_x^{(2)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad \text{e} \quad \hat{m}_{x,y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

delle correlazioni che compaiono in (7.30).

Regressione multipla Costituisce una versione *vettoriale* del precedente problema esteso al caso in cui i regressori siano più di uno, ovvero qualora al posto della (7.28) si supponga una relazione del tipo

$$y = \beta_0 + \sum_{h=1}^p \beta_h x_h + \varepsilon \tag{7.31}$$

in modo che per $p = 2$ la retta di regressione divenga un *piano* con β_0 pari all'intercetta sull'asse delle quote y quando i regressori x sono nulli, mentre per $p > 2$ si ha un *iperpiano*. L'individuazione dei coefficienti $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ (detti ora *predittori*) viene nuovamente affidato al criterio di



minimizzare il valore quadratico atteso della grandezza di errore, ovvero cercando

$$\boldsymbol{\beta}^* = \arg \min \{E \{ \varepsilon^2 \} \} \quad (7.32)$$

in cui

$$E \{ \varepsilon^2 \} = E \left\{ (y - \sum_{h=0}^p \beta_h x_h)^2 \right\} = E \{ (y - \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta})^2 \} \quad (7.33)$$

avendo aggiunto un regressore *fittizio* $x_0 = 1$, ovvero adottato un vettore *aumentato* di regressori $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)$.

Azzerando le derivate parziali di (7.33) rispetto ai predittori β_k si ottiene il sistema di $p + 1$ equazioni in $p + 1$ incognite⁶⁰ simile a quello di § 18.4.2:

$$\mathbf{R}_x \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{R}_{yx} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0p} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p0} & r_{p1} & r_{p2} & \cdots & r_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{yx_0} \\ r_{yx_1} \\ \vdots \\ r_{yx_p} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

in cui \mathbf{R}_x è la matrice *simmetrica* $(p + 1) \times (p + 1)$ delle correlazioni tra i regressori x_h ed x_k con elementi $r_{hk} = r_{kh} = m_{x_h x_k}^{(1,1)}$ ed \mathbf{R}_{yx} è il vettore delle intercorrelazioni tra i regressori ed il valore y , con elementi $r_{yx_h} = m_{y x_h}^{(1,1)}$.

La matrice di progetto Prima di continuare formalizziamo la notazione con cui descrivere i dati da utilizzare nella stima delle correlazioni \mathbf{R}_x e \mathbf{R}_{yx} . Pensiamo cioè di collezionare N coppie (y_i, \mathbf{x}_i) con $N \gg p$, in cui y_i è la variabile di osservazione ed \mathbf{x}_i è il vettore $(1, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ dei regressori osservati congiuntamente, e di allineare i vettori \mathbf{x}_i in altrettante righe di una matrice \mathbf{X} di formato $N \times (p + 1)$, in modo da poter scrivere la (7.31) (priva del termine di errore ε) nella forma di un sistema

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N0} & x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

⁶⁰Osserviamo infatti che

$$\frac{\partial}{\partial \beta_k} E \{ \varepsilon^2 \} = 2E \left\{ (y - \sum_{h=0}^p \beta_h x_h) (-x_k) \right\} = -2E \{ y x_k \} + 2 \sum_{h=0}^p \beta_h E \{ x_h x_k \} = -2m_{yx_k} + 2 \sum_{h=0}^p \beta_h m_{x_h x_k} = 0$$

che per $k = 0, 1, \dots, p$ danno luogo al sistema

$$\begin{cases} \beta_0 m_{x_0 x_0} + \beta_1 m_{x_1 x_0} + \cdots + \beta_p m_{x_p x_0} = m_{yx_0} \\ \beta_0 m_{x_0 x_1} + \beta_1 m_{x_1 x_1} + \cdots + \beta_p m_{x_p x_1} = m_{yx_1} \\ \cdots \\ \beta_0 m_{x_0 x_p} + \beta_1 m_{x_1 x_p} + \cdots + \beta_p m_{x_p x_p} = m_{yx_p} \end{cases}$$

di N equazioni nelle $p + 1$ incognite $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$. Con questa notazione, le stime $\hat{\mathbf{R}}_x$ e $\hat{\mathbf{R}}_{yx}$ degli elementi che compaiono nella (7.34) può essere espressa come

$$\hat{m}_{x_h x_k}^{(1,1)} = \hat{r}_{hk} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ih} x_{ik} \quad e \quad \hat{m}_{y x_h}^{(1,1)} = \hat{r}_{y x_h} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i x_{ih} \quad (7.36)$$

In modo da ottenere un valore per β^* ottimo pari a

$$\beta^* = \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \cdot \hat{\mathbf{R}}_{yx} \quad (7.37)$$

Metodo dei minimi quadrati⁶¹ Affronta la stima dei predittori β adottando il criterio di minimizzare la norma quadratica $\|\epsilon\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \beta\|^2$ della differenza tra i due membri di (7.35), ovvero tra il vettore delle osservazioni \mathbf{y} e quello delle relative predizioni sulla base dei regressori. In questo caso scriviamo pertanto

$$\beta^* = \arg \min \|\mathbf{y} - \mathbf{X} \cdot \beta\|^2 \quad (7.38)$$

Questa espressione si presta ad una interessante interpretazione geometrica, che consente di arrivare in modo agevole allo stesso risultato già trovato (7.37).

Errore ortogonale alla predizione Indicando con $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X} \cdot \beta^*$ il vettore ottenuto applicando il risultato (7.38) alla relazione (7.35), osserviamo che $\hat{\mathbf{y}}$ è vincolato a giacere nell'iper-piano \mathcal{X} generato dalle (sole) $(p + 1)$ colonne ξ_h di \mathbf{X} , combinate linearmente dai predittori β^* , potendo scrivere

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{h=0}^p \beta_h^* \xi_h$$

mentre \mathbf{y} può variare in uno spazio di dimensione $N \gg p$. Dunque scrivere

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \epsilon$$

significa che il vettore di errore ϵ spiega ciò che non può essere descritto da una combinazione lineare delle colonne ξ_h , ovvero ha *proiezione nulla* in \mathcal{X} , ossia giace in uno spazio *ortogonale* ad \mathcal{X} in cui è costretto a stare $\hat{\mathbf{y}}$. Come conseguenza si ottiene che ϵ è ortogonale a *tutte* le colonne ξ_h ovvero possiamo scrivere $\mathbf{X}^T \cdot \epsilon = \mathbf{0}$, il che ci viene comodo perché se premoltiplichiamo ambo i membri di

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \epsilon = \mathbf{X} \cdot \beta^* + \epsilon$$

per \mathbf{X}^T si ottiene $\mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \cdot \beta^* + \mathbf{X}^T \epsilon = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \cdot \beta^*$ e dunque

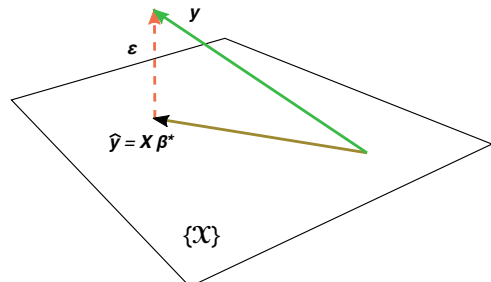
$$\beta^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \quad (7.39)$$

in cui $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ prende il nome di *pseudoinversa* in quanto pur NON essendo \mathbf{X} quadrata e dunque invertibile, oltre ad essere il sistema (7.35) *sovradeterminato* avendo più equazioni che incognite, permette di giungere comunque ad una soluzione a *minima distanza*⁶² (7.38).

⁶¹https://it.wikipedia.org/wiki/Metodo_dei_minimi_quadrati

⁶²Per approfondimenti vedere

https://it.wikipedia.org/wiki/Regressione_lineare#Regressione_lineare_multipla



Unicità della soluzione Mostriamo ora che il valore di β^* ottenuto con la (7.39) in base al criterio (7.38) è esattamente lo stesso di quello ottenuto dalla (7.37) con il criterio (7.32). A tal fine notiamo che le (7.37) e (7.39) sono equivalenti tra loro, in quanto l'applicazione delle regole del prodotto tra matrici porta alle stesse espressioni (7.36), a meno di un fattore N che poi si elide, potendo dunque scrivere

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \quad e \quad \hat{\mathbf{R}}_{yx} = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

come anche illustrato alla figura seguente.

$$\begin{array}{c} (p+1) \times N \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}^T \end{array} \right] \end{array} \cdot \begin{array}{c} N \times (p+1) \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{X} \end{array} \right] \end{array} = N \begin{array}{c} (p+1) \times (p+1) \\ \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{R}}_x \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{c} (p+1) \times N \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{X}^T \end{array} \right] \end{array} \cdot \begin{array}{c} N \times 1 \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{Y} \end{array} \right] \end{array} = N \begin{array}{c} (p+1) \times 1 \\ \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{R}}_{yx} \end{array} \right] \end{array}$$

7.7.2 Coefficiente di correlazione di Pearson

I diagrammi di esempio presentati alla fig. 7.2 basano la valutazione di quanto una coppia di v.a. x ed y siano correlate anche sul calcolo del *coefficiente di correlazione*⁶³ ρ_{xy} , che ha valori compresi tra $+1$ e -1 , ed è definito come

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

In tal modo, si opera una normalizzazione del valore della covarianza σ_{xy} , rispetto alle deviazioni standard σ_x e σ_y delle due v.a., rendendo così il valore di ρ indipendente dalla dinamica dei valori assunti da x ed y .

Anche il coefficiente ρ si presta ad una interessante interpretazione geometrica, una volta messe in relazione la deviazione standard σ_x con la norma $\|\bar{x}\|$ di x (vedi § 2.4), e la covarianza σ_{xy} con il prodotto scalare $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ tra x ed y ⁶⁴. In tale contesto possiamo definire due v.a. come *ortogonali* se risulta $\sigma_{xy} = \rho_{xy} = 0$, mentre un valore $\rho_{xy} = \pm 1$ indica che una delle due v.a. è sempre proporzionale all'altra, con un fattore costante. Ricordiamo che l'ortogonalità $\rho_{xy} = 0$ esprime unicamente l'assenza di legami di tipo *lineare* tra x ed y , come esemplificato dal caso F) di fig. 7.2.

Citiamo inoltre l'estensione formale del risultato noto come *disuguaglianza di Schwartz* (pag. 50), una volta che al coefficiente di correlazione ρ_{xy} sia stato associato il concetto di coseno tra x ed y : una tale identificazione deriva dall'essere $-1 < \rho_{xy} < 1$, e permette di asserire che $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$.

⁶³Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Indice_di_correlazione_di_Pearson

⁶⁴L'analogia non è poi troppo *peregrina*, considerando che se x è estratta da un processo ergodico a media nulla, la sua varianza σ_x^2 coincide con la potenza del segnale da cui è estratta, mentre se x ed y sono estratte da segnali congiuntamente ergodici, la covarianza σ_{xy} coincide con la funzione di intercorrelazione (eq. (7.7)), ovvero con la loro *potenza mutua*.

7.7.3 Teorema di Wiener per processi

Sviluppiamo qui la dimostrazione⁶⁵ che $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ anche se $x(t)$ rappresenta un generico membro di un processo, nelle condizioni espresse alla nota 18. Considerando un segmento $x_T(t) = x(t) \text{rect}_T(t)$ di durata T estratto da un membro del processo, iniziamo dalla definizione (§ 7.3.1) $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E\{|X_T(f)|^2\}$ in cui $X_T(f) = \mathcal{F}\{x_T(t)\}$, e dunque

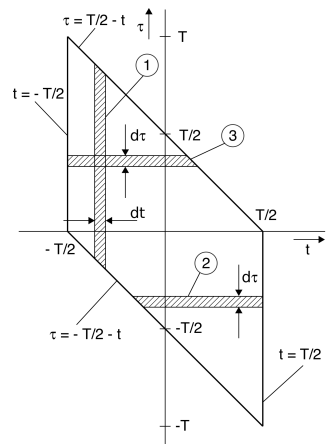
$$\begin{aligned} E\{|X_T(f)|^2\} &= E\left\{\left|\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt\right|^2\right\} = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} E\{x^*(t_1) x(t_2)\} e^{j2\pi ft_1} e^{-j2\pi ft_2} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (7.40)$$

dove riconosciamo $E\{x^*(t_1) x(t_2)\}$ essere pari al momento misto (7.1), che indichiamo per uniformità come $\mathcal{R}_x(t_1, t_2)$ ovvero come $\mathcal{R}_x(t, t + \tau)$ dopo aver posto l'istante t_1 pari ad un generico valore t , ed aver espresso t_2 come $t_2 = t + \tau$. Con la nuova notazione, l'espressione (7.40) diviene⁶⁶

$$\underbrace{\int_{t=-T/2}^{t=T/2} \int_{\tau=-T/2-t}^{\tau=T/2-t} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau dt}_{\textcircled{1}}$$

Teniamo ora in considerazione il dominio di integrazione mostrato a lato, dove l'area $\textcircled{1}$ rappresenta quella dell'integrale interno, per il differenziale dt : se scambiamo l'ordine di integrazione, suddividendo l'integrale su τ in due parti, per le quali $\tau < 0$ e $\tau > 0$, e corrispondenti alle aree $\textcircled{2}$ e $\textcircled{3}$ in figura, otteniamo

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_{-T}^0 \left[\int_{t=-T/2-\tau}^{t=T/2} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f\tau} dt \right] d\tau}_{\textcircled{2}} + \\ &\underbrace{\int_0^T \left[\int_{t=-T/2}^{t=T/2-\tau} \mathcal{R}_x(t, t + \tau) e^{-j2\pi f\tau} dt \right] d\tau}_{\textcircled{3}} \end{aligned}$$



Considerando ora il processo stazionario, scriviamo $\mathcal{R}_x(t, t + \tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$, che portiamo

⁶⁵Tratta da D. Leon, W. Couch, *Fondamenti di telecomunicazioni*, 2004 Apogeo

⁶⁶Per quanto riguarda i nuovi estremi di integrazione, osserviamo che se $\tau = t_2 - t$, allora per $t_2 = \pm T/2$, τ vale $\pm T/2 - t$. Inoltre, la somma degli esponenti risulta pari a $-j2\pi f(t_2 - t) = -j2\pi f\tau$.

fuori dall'integrale su t :

$$\begin{aligned} E \{|X_T(f)|^2\} &= \int_{-T}^0 \left[\int_{-T/2-\tau}^{T/2} dt \right] \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^T \left[\int_{-T/2}^{T/2-\tau} dt \right] \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^0 (T + \tau) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \int_0^T (T - \tau) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^T (T - |\tau|) \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

dato che per $\tau < 0$ risulta $\tau = -|\tau|$. Sostituiamo l'ultimo risultato nell'espressione $\mathcal{P}_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \{|X_T(f)|^2\}$, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{T - |\tau|}{T} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-T}^T \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{|\tau|}{T} \mathcal{R}_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned}$$

in cui il secondo termine si annulla se $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau \mathcal{R}_x(\tau)| d\tau < \infty$, e ciò dimostra il teorema discusso al § 7.2.1.

7.7.4 Densità spettrale per onda PAM

L'acronimo PAM sta per *Pulse Amplitude Modulation* (pag. 438), e individua una classe di segnali realizzati ripetendo indefinitivamente uno stesso impulso elementare $g(t)$ con periodo T , ognuno moltiplicato (o *modulato in ampiezza*) per un diverso coefficiente a_n . Sebbene in questa definizione possa rientrare anche il caso in cui gli a_n siano campioni di un segnale analogico (§ 4.1), focalizziamo la trattazione al caso in cui rappresentino invece *i simboli* di una trasmissione numerica con periodo di simbolo T , a valori reali nel caso di banda base (§ 15.1.2), o complessi nel caso di una modulazione numerica⁶⁷, mentre $g(t)$ rappresenta un *impulso dati*, del tipo a banda infinita (§ 15.2.1) oppure di Nyquist (§ 15.2.2.2).

Scriviamo pertanto l'onda PAM nella forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT - \theta) \quad (7.41)$$

in cui θ è una v.a. aleatoria uniformemente distribuita tra $\pm \frac{T}{2}$ in modo che la (7.41) rappresenti un membro di un processo stazionario ergodico (vedi pag. 164), e verifichiamo il risultato *semplice* riportato al § 7.2.5, ossia che nel caso in cui i valori discreti a_n siano realizzazioni di v.a. statisticamente indipendenti, a media nulla, identicamente distribuite e con varianza⁶⁸ $\sigma_A^2 = E \{a_n^2\}$, il segnale dati è a media nulla, e ad esso

⁶⁷In tal caso i valori degli a_n corrispondono ai *punti di una costellazione* nel piano dell'involuppo complesso, vedi cap. 16.

⁶⁸Considerando gli a_n come elementi di una sequenza aleatoria stazionaria ergodica A , con valori a^i appartenenti ad un alfabeto finito di cardinalità L , ovvero $i = 1, 2, \dots, L$, si definisce per essi

- un valor medio $m_A = E_A \{a^i\} = \sum_{i=1}^L p_i a^i$ ed
- una varianza $\sigma_A^2 = E_A \{(a^i - m_A)^2\} = \sum_{i=1}^L p_i (a^i - m_A)^2$

corrisponde uno spettro di densità di potenza pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T} \quad (7.42)$$

Allo scopo di arrivare ad un risultato più generale, sviluppiamo i calcoli rimuovendo le ipotesi restrittive di indipendenza statistica e media nulla per gli a_n , per poi riapplicarle una alla volta.

Valor medio Essendo $x(t)$ membro di un processo ergodico, il valor medio di una sua realizzazione può essere calcolato come valore atteso rispetto alle fonti di aleatorietà, ossia i simboli a_n ed il ritardo θ

$$m_X = E_{A,\Theta} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT - \theta) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_A \{a_n\} E_{\Theta} \{g(t - nT - \theta)\}$$

avendo assunto l'indipendenza statistica tra A e Θ . Ponendo $E_A \{a_n\} = m_A$, sviluppando il valore atteso di $g(\cdot)$, e ricordando che $p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{T} \text{rect}_T(\theta)$, otteniamo

$$\begin{aligned} m_X &= m_A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - nT - \theta) p_{\Theta}(\theta) d\theta = \\ &= \frac{m_A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} g(t - nT - \theta) d\theta = \frac{m_A}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nT-T/2}^{t-nT+T/2} g(u) du = \\ &= \frac{m_A}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) du = \frac{m_A}{T} G(0) \end{aligned}$$

avendo posto al terzo passaggio⁶⁹ $u = t - nT - \theta$, ad avendo notato al penultimo che gli estremi di integrazione entro la sommatoria sono contigui ed abbracciano tutto il dominio di integrazione. Una prima osservazione che traiamo è che anche se la sequenza degli a_n non fosse a media nulla, è possibile ottenere $m_X = 0$ adottando una $g(t)$ ad area nulla, come ad esempio per un codice Manchester o differenziale (pag. 444), o per le forme d'onda adottate nell'FSK ortogonale incoerente (§ 16.12.1).

Spettro di densità di potenza In accordo al teorema di Wiener (§ 7.2.1), procediamo con il calcolo del momento misto $\mathcal{R}_X(\tau) = E \{x(t) x(t + \tau)\}$ e quindi ne effettuiamo la trasformata di Fourier. Anche qui l'indipendenza statistica tra Θ ed A permette di

in cui p_i rappresenta la probabilità dell' i -esimo valore. Qualora $m_A = 0$, si ottiene $\sigma_A^2 = E_A \{(a^i)^2\}$.

⁶⁹Risultando $d\theta = -du$, gli estremi di integrazione si invertono; quando poi $\theta = T/2$ si ha $u = t - nT - T/2$, mentre a $\theta = -T/2$ corrisponde $u = t - nT + T/2$.

scrivere

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_X(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{a_n a_m\} E\{g(t-nT-\theta)g(t+\tau-mT-\theta)\} = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(m-n) \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t-nT-\theta)g(t+\tau-mT-\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \int_{-T/2}^{T/2} g(t-nT-\theta)g(t+\tau-(k+n)T-\theta) d\theta = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t-nT-T/2}^{t-nT+T/2} g(u)g(u+\tau-kT) du = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \int_{-\infty}^{\infty} g(u)g(u+\tau-kT) du = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) \mathcal{R}_G(\tau-kT)
 \end{aligned}$$

in cui al secondo passaggio si è sfruttata la stazionarietà della sequenza a_n per cui $E\{a_n a_m\} = \mathcal{R}_A(m-n)$, al terzo si è posto $k = m-n$, al quarto si è posto $u = t-nT-\theta$, al penultimo si sono riuniti gli infiniti integrali su domini contigui in uno solo, ed all'ultimo si è riconosciuto l'integrale come quello che definisce l'autocorrelazione (traslata) di $g(t)$, indicata come $\mathcal{R}_G(\tau-kT)$. La trasformata di Fourier del risultato finale produce

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) |G(f)|^2 e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (7.43)$$

in cui $|G(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_G(\tau)\}$ è lo spettro di densità di energia dell'impulso $g(t)$, ed il termine $e^{-j2\pi f k T}$ consegue dalla traslazione temporale di $\mathcal{R}_G(\tau)$. L'espressione

$$\mathcal{P}_A(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_A(k) e^{-j2\pi f k T} \quad (7.44)$$

rappresenta la DTFT (§ 4.4) di $\mathcal{R}_A(k)$ e prende il nome di *spettro del codice*, mostrando come le caratteristiche statistiche degli a_n contribuiscano a determinare la densità spettrale per il segnale dati associato.

Simboli incorrelati Iniziamo a semplificare il risultato (7.43) considerando il caso in cui i simboli a_n siano statisticamente indipendenti, ma a media non nulla. In questo caso si ottiene⁷⁰

$$\mathcal{R}_A(k) = \begin{cases} m_A^2 + \sigma_A^2 & k = 0 \\ m_A^2 & k \neq 0 \end{cases}$$

⁷⁰Se la sequenza a_n è stazionaria ed a simboli indipendenti, per $k \neq 0$ si ottiene

$$\mathcal{R}_A(k) = E\{a_n a_{n+k}\} = E\{a_n\} E\{a_{n+k}\} = m_A^2$$

mentre per $k = 0$ si ha

$$\mathcal{R}_A(0) = E\{(a_n)^2\} = m_A^{(2)} = m_A^2 + \sigma_A^2$$

come mostrato dalla (6.9) a pag. 152.

e quindi la (7.44) diviene

$$\mathcal{P}_A(f) = \sigma_A^2 + m_A^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f k T} = \sigma_A^2 + \frac{m_A^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (7.45)$$

avendo sfruttato il risultato (3.31) a pag. 81 relativo alla trasformata di un treno di impulsi⁷¹. Sostituendo ora la (7.45) nella (7.44) e quindi in (7.43), per quest'ultima si ottiene

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \left[\sigma_A^2 + m_A^2 \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right] \quad (7.46)$$

che evidenzia la presenza nello spettro di una componente *continua*, assieme ad una componente *a righe* sulle frequenze armoniche di quella di simbolo $f_s = \frac{1}{T}$, descritta agli impulsi di area $\frac{m_A^2}{T^2} |G(f)|^2$; scegliendo dunque un impulso dati tale che $G(f)$ si annulli per $f = \frac{k}{T}$, tali righe possono essere eliminate. E' per questo motivo che (ad es.) la segnalazione di tipo RZ (vedi § 15.2.1) presenta la componente ad $f = f_s$, vedi l'esercizio seguente.

Simboli a valor medio nullo Nel caso in cui la sequenza a_n oltre ad essere incorrelata presenti anche un valor medio nullo, ovvero $m_A = 0$, la (7.46) si semplifica ulteriormente e fornisce il risultato *semplice* già noto:

$$\mathcal{P}_X(f) = \frac{\sigma_A^2}{T} |G(f)|^2$$

Esempio Applichiamo i risultati a cui siamo pervenuti ai *codici di linea* discussi al § 15.2.1, come ad esempio il codice RZ, che adotta un impulso $g(t) = \text{Arect}_\tau(t)$ con $\tau < T$, per il quale risulta $|G(f)|^2 = (A\tau)^2 \text{sinc}^2(f\tau)$. Se i simboli trasmessi a_n sono equiprobabili, incorrelati, ed a valori binari 0 od 1, si ottiene che

$$\begin{aligned} m_A &= E\{a\} = 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 0 = 1/2 \\ \sigma_A^2 &= E\{(a - m_A)^2\} = 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/4 \end{aligned}$$

Pertanto la (7.46) fornisce

$$\mathcal{P}_{RZ}(f) = \frac{(A\tau)^2 \text{sinc}^2(f\tau)}{T} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right]$$

Nel caso in cui risulti $\tau = T/2$, la sommatoria presenta termini non nulli per i soli indici dispari, con area degli impulsi pari a $\text{sinc}^2(k/2) = (2/k\pi)^2$, dunque si ottiene

$$\mathcal{P}_{RZ}(f) = \frac{A^2 T}{16} \left(\text{sinc}^2\left(f \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ dispari}}}^{\infty} \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \right)$$

⁷¹Infatti, applicando la proprietà di traslazione nel tempo scriviamo

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \mathcal{F}\{\sum_k \delta(t - kT)\} = \sum_k e^{-j2\pi f k T}$$

ma in base alla (3.31) di pag. 81 risulta

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right), \text{ e dunque } \sum_k e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

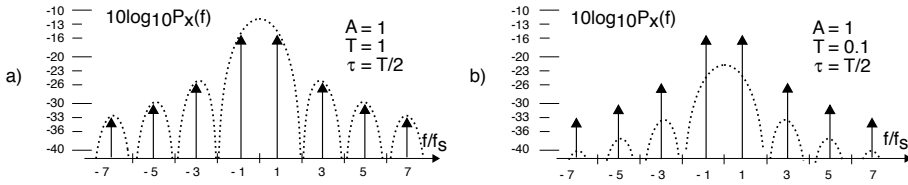


Figura 7.9: Densità di potenza per segnale RZ simmetrico: a) $T = 1$; b) $T = 0.1$

che presenta impulsi per $f = 1/T, 3/T, 5/T \dots$. Il risultato ottenuto è mostrato in fig. 7.9, in cui si è adottata una scala delle frequenze normalizzata, mentre per le ampiezze si è scelta una rappresentazione in dB (§ 8.1) allo scopo di evidenziare come, all'aumentare della frequenza di simbolo $f_s = 1/T$, la componente a righe tende a *prevalere* rispetto a quella continua, dato che al diminuire di T la durata di $g(t)$ è sempre minore, e così la sua energia. Notiamo inoltre che essendo i simboli *equiprobabili*, si può ottenere $m_A = 0$ e la conseguente scomparsa delle righe spettrali semplicemente scegliendo i valori degli a_n come $+1$ (ad esempio per l'uno) e -1 (per lo zero), ovvero adottando una segnalazione *antipodale* (§ 7.6.1).

Facendo tendere $\tau \rightarrow T$, l'impulso si trasforma in NRZ, per il quale $|G(f)|^2 = (AT)^2 \text{sinc}^2(fT)$, che si azzerava esattamente ai multipli della frequenza di simbolo in cui sono centrati gli impulsi, annullando quindi tutti i termini della sommatoria, indipendentemente dalla scelta degli a_n , e dando luogo al risultato $\mathcal{P}_{NRZ}(f) = \frac{A^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT)$, in accordo alla (7.42).

7.7.5 Autocorrelazione di un processo in uscita da un filtro

Al § 7.4.1 si è affermato che, quando un processo stazionario almeno in senso lato attraversa un filtro, il processo di uscita è caratterizzato da una autocorrelazione $\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)$. Mostriamo che è vero.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = \\ &= E\left\{\int h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha \int h(\beta)x(t+\tau-\beta)d\beta\right\} = \\ &= \int \int h(\alpha)h(\beta)E\{x(t-\alpha)x(t+\tau-\beta)\}d\alpha d\beta = \\ &= \int h(\alpha) \int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta d\alpha = \end{aligned} \tag{7.47}$$

$$= \int h(\alpha)\mathcal{R}_{xy}(\tau+\alpha)d\alpha = \mathcal{R}_{xy}(\tau) * h(-\tau) \tag{7.48}$$

dato che $\int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta$ che compare nella (7.47) è pari alla convoluzione tra $h(t)$ e $\mathcal{R}_x(t)$ calcolata per $t = \tau + \alpha$, ovvero $\int h(\beta)\mathcal{R}_x(\tau+\alpha-\beta)d\beta = \mathcal{R}_x(t) * h(t)|_{t=\tau+\alpha}$, che (vedi l'eq. (7.8) a pag. 194) a sua volta può essere espressa come

$$\mathcal{R}_x(t) * h(t) = x^*(-t) * x(t) * h(t) = x^*(-t) * y(t) = \mathcal{R}_{xy}(t) \tag{7.49}$$

dove all'ultimo passaggio si è applicata la definizione della intercorrelazione (7.7), oltre che la (7.8), ottenendo così la (7.48).

Per arrivare al risultato desiderato, osserviamo ora che applicando la (7.49) alla (7.48), quest'ultima può essere riscritta come

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_{xy}(\tau) * h(-\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

che, una volta \mathcal{F} -trasformata, equivale a

$$\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{P}_x(f) \cdot H(f) \cdot H^*(f) = \mathcal{P}_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau) * \mathcal{R}_h(\tau)\} \quad (7.50)$$

Osserviamo infine che se il processo di ingresso oltre ad essere stazionario è anche ergodico, l'antitrasformata della (7.50) si riscrive come $m_y^{(1,1)} = m_x^{(1,1)} * \mathcal{R}_h(\tau)$.

7.7.6 Grafici di esempio

Di seguito sono riportati i grafici della forma d'onda, dell'autocorrelazione, della densità spettrale e della densità di probabilità, per alcuni segnali tipici.

Segnale	Forma d'onda	Autocorrelazione	Densità spettrale	Densità di probabilità
Sinusoide				
Onda quadra				
Impulso rettangolare				
Triangolare				
Dente di sega				
Rumore gaussiano bianco				
Rumore gaussiano limitato in banda				

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti e future.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>