

Distorsione e rumore

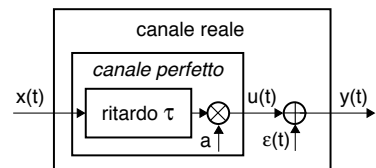
DESCRIVIAMO la natura del peggioramento, o *distorsione*, subito da un segnale che attraversa un sistema fisico, e caratterizziamo quest'ultimo al fine di quantificare l'entità della distorsione introdotta. Questa analisi serve a valutare la qualità di un segnale dopo che ha attraversato circuiti (cap. 18), linee trasmissive (§ 19.2) od amplificatori, oltre che a sviluppare criteri di progetto che tentano di migliorare le prestazioni del sistema, in termini di probabilità di errore (cap. 15) e/o di rapporto segnale/rumore (cap. 14). La natura della distorsione subita da un segnale rientra in una o più delle seguenti categorie:

- distorsione *lineare* quando prodotta da un sistema lineare come un filtro;
- distorsione *non lineare*, causata da mezzi trasmissivi come la fibra ottica o dispositivi come gli amplificatori, che possono presentare comportamenti non lineari;
- distorsione dovuta a *disturbi additivi* come interferenza, quantizzazione e rumore termico, e che a differenza dei precedenti casi *non dipende* dal segnale, ma semplicemente vi si somma.

Osserviamo poi che per distorsione si intende un effetto *indesiderato*, mentre se invece il segnale viene “manipolato” di proposito, si dice che questo è *elaborato*¹.

Segnale utile, disturbo, canale perfetto ed SNR Può essere preferibile trattare i tre fenomeni esposti in modo unificato, definendo la distorsione come un *disturbo* additivo che si sovrappone ad una componente di segnale *utile* presente nel segnale ricevuto. Tale impostazione si basa sulla considerazione che ricevere un segnale identico a quello trasmesso, tranne che per un fattore di scala ed un ritardo temporale, non altera né forma né sostanza del messaggio: pertanto, un canale che presenti una risposta impulsiva

$$h(t) = a\delta(t - \tau)$$



¹Elaborazione di segnale è la traduzione di SIGNAL PROCESSING, e così il segnale risultante viene anche detto *processato*.

viene indicato come *canale perfetto*, ed il segnale ricevuto $y(t) = u(t) = ax(t - \tau)$ è *tutto utile*. Se invece viene ricevuto qualcosa di diverso, la differenza $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau) = y(t) - u(t)$ viene chiamata *disturbo additivo*. Noti² $u(t)$ e $\varepsilon(t)$, se ne può valutare la rispettiva potenza, e caratterizzare la qualità del segnale ricevuto nei termini del rapporto $\frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_\varepsilon}$ tra la potenza del segnale utile e quella del disturbo, indicato come *rapporto segnale rumore* o *SNR*: ovviamente, la qualità è tanto migliore quanto più *SNR* è elevato³.

Canale rumoroso e attenuazione Il modello di canale costituito dalla sua componente perfetta e da un disturbo additivo si presta bene a rappresentare, oltre alle cause di distorsione lineare e *non*, anche quelle più propriamente additive, come il *rumore termico* la cui natura è descritta al § 8.4.2. In tal caso il disturbo $\varepsilon(t)$ si manifesta in ricezione, con una potenza \mathcal{P}_ε indipendente da quella \mathcal{P}_u del segnale. Allo stesso tempo, al diminuire del fattore di scala a che caratterizza il canale perfetto, la potenza del segnale utile diminuisce con a^2 , e l'*SNR* di pari misura.

La riduzione della potenza del segnale ricevuto ($a < 1$) è indicata come *attenuazione* o *affievolimento* e, pur se in presenza di un canale perfetto ovvero privo di distorsione, produce un peggioramento dell'*SNR* ovvero della qualità del segnale ricevuto. Questo è il caso, ad esempio, dei collegamenti radio (cap. 20), in cui oltre alla attenuazione di natura deterministica legata alla distanza, intervengono ulteriori cause di attenuazione di tipo aleatorio come quelle di natura atmosferica (pioggia o nebbia), quelle dovute al movimento, e quelle dovute alla casualità delle condizioni di propagazione in condizioni di non visibilità (§ 20.4.4).

L'approccio da seguire per valutare il peggioramento dovuto a diverse cause di distorsione che si verificano contemporaneamente è rinviato al § 8.4.1, mentre le cause di distorsione lineare e *non* lineare sono affrontate ai §§ 8.2 e 8.3. Di seguito si

²Nella pratica, i valori a e τ non si conoscono, mentre invece possiamo disporre di coppie di segnali $(x(t), y(t))$. Tali valori vengono quindi valutati come quelli che *rendono SNR massimo* ovvero \mathcal{P}_ε minimo. Considerando segnali di potenza reali, ossia processi stazionari ergodici, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau) &= E \{ (y(t) - ax(t - \tau))^2 \} = E \{ y^2(t) \} + a^2 E \{ x^2(t) \} - 2aE \{ y(t)x(t - \tau) \} = \\ &= \mathcal{P}_y + a^2 \mathcal{P}_x - 2a\mathcal{R}_{xy}(\tau) \end{aligned}$$

in cui si è operata la sostituzione $E \{ y(t)x(t - \tau) \} = \mathcal{R}_{yx}(-\tau) = \mathcal{R}_{xy}^*(\tau) = \mathcal{R}_{xy}(\tau)$. Il valore di a che rende minimo $\mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau)$ si ottiene eguagliandone a zero la derivata: $\frac{\partial}{\partial a} \mathcal{P}_\varepsilon(a, \tau) = 2a\mathcal{P}_x - 2\mathcal{R}_{xy}(\tau) = 0$ e dunque $a_{opt} = \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x}$, che sostituita nell'espressione di \mathcal{P}_ε fornisce

$$\mathcal{P}_\varepsilon(\tau) = \mathcal{P}_y + \left(\frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x} \right)^2 \mathcal{P}_x - 2 \frac{\mathcal{R}_{xy}(\tau)}{\mathcal{P}_x} \mathcal{R}_{xy}(\tau) = \mathcal{P}_y - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x} = \mathcal{P}_y \left(1 - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y} \right)$$

Il valore di \mathcal{P}_ε evidentemente è minimo per quel valore di $\tau = \tau_{opt}$ che rende massima $(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2$, ovvero per quella traslazione temporale che rende "più simili" i segnali di ingresso ed uscita.

³Una volta individuati i valori di a e τ , è possibile valutare $\mathcal{P}_u = E \{ (ax(t - \tau))^2 \} = a^2 \mathcal{P}_x$, mentre per \mathcal{P}_ε è valido il risultato di cui alla precedente nota, fornendo in definitiva

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_\varepsilon} = \frac{a^2 \mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_y \left(1 - \frac{(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y} \right)} = \frac{a^2 \mathcal{P}_x^2}{\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y - (\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2}$$

che tende ad infinito qualora $\varepsilon(t)$ sia nullo, ovvero $(\mathcal{R}_{xy}(\tau))^2 = \mathcal{P}_x \mathcal{P}_y$, mentre si azzerava se $a = 0$.

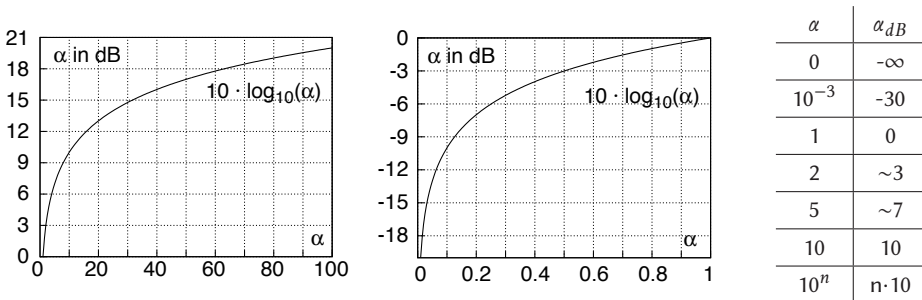


Figura 8.1: Curva di conversione da lineare a decibel, e valori tipici

approfondisce invece il significato della scala di misura logaritmica, in cui spesso sono espresse potenze di segnale, valori di attenuazione o di guadagno, ed SNR , anche se l'uso principale che faremo dello "strumento" dB non avverrà che al capitolo 19.

8.1 Misure di potenza in decibel

Ci sono almeno due buoni motivi per misurare le grandezze in unità logaritmiche: il primo è che in tal modo si rappresentano in maniera compatta grandezze dalla dinamica molto elevata, ed il secondo è che prodotti e rapporti si trasformano in somme e sottrazioni. Inoltre, c'è almeno un buon motivo *psicofisico*⁴, basato sulla conoscenza che l'intensità con cui percepiamo gli stimoli attraverso i nostri organi di senso segue naturalmente una *legge logaritmica*, in quanto per produrre una sensazione che aumenta linearmente, è necessario uno stimolo che aumenta in progressione geometrica. Ciò posto, va anche detto che l'esperienza di insegnamento mostra come, anche se le misure in dB sono qui per aiutarci nei calcoli, esse sono anche uno degli argomenti in cui lo studente medio tende più facilmente a perdersi. Proviamo quindi a fare un po' di ordine!

La misura logaritmica Data una qualsiasi grandezza α , la sua misura in decibel⁵ è definita come

$$\alpha_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \alpha \quad (8.1)$$

e descrive le relazioni mostrate nella figura 8.1, a sinistra per valori $\alpha > 1$, ed a destra per $\alpha < 1$, a cui corrispondono rispettivamente valori in decibel positivi e negativi. Inoltre, sempre in fig. 8.1 è mostrata una tabella con alcune corrispondenze che possono comunemente ricorrere: ad esempio, dato che $\log_{10} 2 = 0.30102\dots$, un valore α pari a 2 equivale a circa 3 dB.

Nota una grandezza espressa in dB, si può risalire al suo valore naturale mediante l'ovvia relazione inversa

$$\alpha = 10^{\frac{\alpha_{dB}}{10}}$$

⁴Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Weber-Fechner

⁵Dunque un decibel, per come è definito, è la decima parte del Bel, ovvero $\alpha_{Bel} = \log_{10} \alpha$. Chissà, forse dopo che definirono il Bel, si accorsero che era troppo grande ? :-)

Misura relativa dei rapporti Per esprimere un rapporto $R = \frac{\alpha}{\beta}$ molto grande o molto piccolo, si ricorre spesso alla *scala logaritmica* definita dai dB, calcolando direttamente il rapporto in tali termini, ovvero eseguendo la differenza tra le grandezze α e β espresse in dB, in quanto

$$R_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \frac{\alpha}{\beta} = 10 \cdot \log_{10} \alpha - 10 \cdot \log_{10} \beta = \alpha_{dB} - \beta_{dB} \quad (8.2)$$

Se le due grandezze α e β sono omogenee, come ad esempio due potenze di segnale \mathcal{P}_x e \mathcal{P}_y espresse in V^2 , o due potenze \mathcal{W}_x e \mathcal{W}_y espresse in *Watt*, allora il loro rapporto è un *numero puro*, e la sua misura in dB esprime *di quanti dB* il numeratore è maggiore (o minore) del denominatore. Conoscendo una delle due grandezze, ed il valore del loro rapporto, si può ovviamente risalire al valore dell'altra, ovvero ad esempio

$$\alpha_{dB} = \beta_{dB} + R_{dB} \quad (8.3)$$

ma, perché questa ovvia relazione possa avere una utilità pratica, occorre sapere *cosa rappresenta* β , dopodiché potremo concludere che α rappresenta la stessa cosa⁶, ma R_{dB} decibel più grande. Per questo, si definisce la

Misura assoluta delle grandezze La (8.1) può essere usata per esprimere il *valore assoluto* di una grandezza, assieme alla sua unità di misura, se viene pensata come una applicazione della (8.2), ponendo il denominatore pari *all'unità di misura stessa*. Così ad esempio una potenza \mathcal{W}_x di α *Watt* (⁷) viene espressa come

$$\mathcal{W}_x (dBW) = 10 \cdot \log_{10} \frac{\alpha_{Watt}}{1_{Watt}} [dBW] \quad (8.4)$$

ovvero, misurandola in dB *sopra il Watt*. Quindi, una potenza misurata in *dBW* può ricondursi alla corrispondente potenza in *Watt*, calcolando

$$\beta_{Watt} = 10^{\frac{\beta_{dBW}}{10}}$$

ed allo stesso modo si può finalmente applicare la (8.3) per ottenere una grandezza effettiva:

$$\alpha_{dBW} = \beta_{dBW} + R_{dB}$$

Conversione tra unità di misura Se invece che in *Watt* il valore β risulta espresso in *milliWatt* ($1 \text{ mW} = 10^{-3} \text{ Watt}$) la corrispondente misura logaritmica viene indicata come *dBm* (dB riferiti al mWatt), valutato come $\beta_{dBm} = 10 \cdot \log_{10} \beta_{mWatt}$. Pertanto, essendo $\beta_{mW} = 10^3 \cdot \beta_W$, possiamo scrivere

$$\beta_{dBm} = 10 \cdot \log_{10} \beta_{Watt} \cdot 10^3 = 10 \cdot \log_{10} \beta_{Watt} + 10 \cdot \log_{10} 10^3 = \beta_{dBW} + 30 \text{ dB}$$

e dunque per passare da una unità di misura ad un'altra, esprimendo le stesse in dB, occorre sommare (o sottrarre) il relativo fattore di scala, anch'esso espresso in dB.

Esempio Zero *dBW* equivalgono a 30 *dBm*, dato che $1 \text{ Watt} = 10^3 \text{ mW}$.

⁶ Ad esempio volt², oppure watt.

⁷ Al cap. 18 verrà approfondita la differenza tra potenza di segnale, espressa in volt² o ampere², e potenza assorbita, dissipata o trasmessa, espressa in watt.

Misura delle densità Qualora la grandezza da esprimere in unità logaritmiche non sia la potenza *totale* di un segnale, bensì la relativa *densità di potenza* espressa in $\frac{V^2}{Hz}$ o $\frac{W}{Hz}$ (a seconda se si tratti di potenza *di segnale* o *fisica*), ovvero dai multipli e sottomultipli dando luogo a densità di potenza espresse in $\frac{mW}{Hz}$ o $\frac{W}{MHz}$ o $\frac{mW}{MHz}$, è ancora possibile applicare la (8.1) purché intesa nel senso della (8.4), ossia indicando l'unità di misura di partenza, individuando così valori di densità di potenza espressi in termini *assoluti* come $\frac{dBV^2}{Hz}$, $\frac{dBW}{Hz}$, $\frac{dBW}{MHz}$, $\frac{dBm}{MHz}$...

Esempio

- Una densità di potenza $\mathcal{P}(f) = 15 \frac{W}{MHz}$ corrisponde a $\mathcal{P}(f) \approx 1.18 \frac{dBW}{MHz}$
- $-60 \frac{dBW}{Hz}$ equivalgono a $-30 \frac{dBm}{Hz}$, dato che $1 W = 10^3 mWatt$;
- $20 \frac{dBW}{MHz}$ equivalgono a $-40 \frac{dBW}{Hz}$, dato che $1 MHz = 10^6 Hz$, ed i MHz sono a denominatore.

Tali unità di misura torneranno utili in sede di valutazione del *bilancio di collegamento*, affrontato al cap. 19.

8.2 Distorsione lineare

Individua il peggioramento subito dal segnale $x(t)$ a seguito dell'attraversamento di un sistema lineare e permanente (o filtro, pag. 25) che *non* è un canale perfetto: verifichiamo dunque innanzitutto che, in presenza di un canale perfetto, *non* si verifica distorsione lineare.

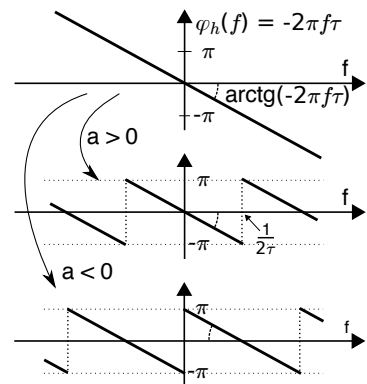
Canale perfetto In questo caso la risposta impulsiva ha la forma $h(t) = a\delta(t - \tau)$ (vedi pag. 231), e dunque per esso risulta $H(f) = |H(f)| e^{j\varphi_h(f)} = \mathcal{F}\{a\delta(t - \tau)\} = ae^{-j2\pi f\tau}$, ovvero

$$|H(f)| = |a| \quad e \quad \varphi_h(f) = \arg\{H(f)\} = \begin{cases} -2\pi f\tau & \text{con } a > 0 \\ -2\pi f\tau + \pi \operatorname{sgn}(f) & \text{con } a < 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

e quindi la risposta in frequenza ha *modulo costante* ($|H(f)| = |a|$) e *fase lineare*⁸: osserviamo infatti che l'espressione $\varphi_h(f) = -2\pi f\tau$ corrisponde a quella di una retta passante per zero⁹ e con coefficiente angolare $-2\pi\tau$, e come fatto notare a pag. 66, ciò determina che tutte le componenti frequenziali presentano *lo stesso ritardo*, e quindi la forma d'onda in transito *non subisce* deformazioni. Infatti, per un canale perfetto si ottiene

$$Y(f) = X(f) H(f) = X(f) \cdot ae^{-j2\pi f\tau}$$

e dunque, antitrasformando, $y(t) = ax(t - \tau)$.



⁸Il secondo caso per $\varphi_h(f)$ nella (8.5) tiene conto del fatto che la formula di Eulero (2.3) permette di scrivere $-1 = e^{j\pm\pi}$, ed il prodotto per $\operatorname{sgn}(f)$ rende la fase una funzione *dispari* di f .

⁹Anche se, tenendo conto che un angolo α è indistinguibile da un altro $\beta = \alpha \pm 2\pi$, per convenzione quando $|\varphi_h(f)| > \pi$, la stessa viene fatta *ruotare* di 2π .

Canale reale Viceversa, ad un canale *non perfetto* corrisponde $|H(f)| \neq \text{cost}$, e/o $\varphi_h(f) \neq -2\pi f\tau$, e dunque $y(t)$ non è la copia ritardata di $x(t)$. In questo caso il segnale di uscita viene detto affetto da *distorsione lineare* e per esso si riscontra una *modifica* della forma d'onda, dato che le componenti frequenziali del segnale di uscita

$$Y(f) = |Y(f)| e^{j\varphi_y(f)} \quad \text{in cui} \quad \begin{cases} |Y(f)| = |X(f)| |H(f)| \\ \varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f) \end{cases}$$

dipendono oltre che da quelle di ingresso, anche dai valori di $H(f)$, come descritto a pag. 74. La distorsione risultante è detta *lineare* in quanto risultato di una operazione *lineare* come è la convoluzione, alla quale si applica il principio di *sovrapposizione degli effetti*, e dunque la distorsione risultato di una combinazione di cause è la combinazione dei singoli effetti.

Banda di segnale Se consideriamo segnali a banda limitata le condizioni per l'assenza di distorsione lineare sono un po' meno stringenti, dato che in tal caso le (8.5) devono essere soddisfatte solamente nella regione di frequenza individuata dalla banda di segnale, mentre laddove il segnale è assente, il filtro può avere risposta in frequenza qualsiasi.

Equalizzazione In linea di principio consiste nel passaggio di un segnale $y(t)$ affetto da distorsione lineare attraverso un filtro (di *equalizzazione*) con risposta in frequenza $G(f) = 1/H(f)$, in modo da ottenere di nuovo il segnale originario $x(t)$, *invertendo* l'effetto della distorsione lineare - a patto di riuscire a sintetizzare il filtro $G(f)$! L'argomento è trattato ai §§ 13.1.1 per le trasmissioni modulate, 15.3 per quelle in banda base, e 18.4 per gli approcci *adattativi* nel caso di modulazione numerica.

Distorsione di ampiezza e di fase Osserviamo infine che, risultando

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \quad \text{e} \quad \varphi_y(f) = \varphi_x(f) + \varphi_h(f)$$

è possibile descrivere il fenomeno della distorsione lineare considerando separatamente il modulo $|H(f)|$ e la fase $\varphi_h(f)$ della risposta in frequenza, adottando quindi per esse delle rappresentazioni particolarmente utili a descrivere in modo sommario l'entità delle distorsioni stesse.

8.2.1 Distorsione di ampiezza

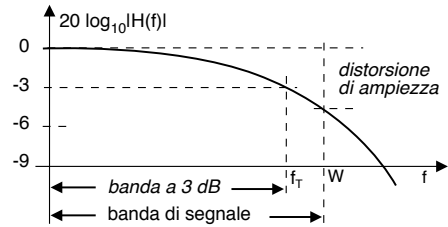
Misura in modo approssimato l'entità della distorsione lineare limitandosi a considerare quella legata allo spettro *di ampiezza*. A questo scopo la definizione di misura in *decibel* introdotta al § 8.1 viene applicata al guadagno di potenza (pag. 206) $|H(f)|^2$, definendo in questo modo il

Guadagno di potenza in dB Espresso da

$$G_{dB}(f) = 10 \log_{10} |H(f)|^2 = 20 \log_{10} |H(f)| \quad (8.6)$$

consente di apprezzare il reale andamento di $|H(f)|^2$ anche per valori molto piccoli. Ad esempio l'applicazione di (8.6) alla $|H(f)|$ di un filtro passa basso produce un

risultato simile a quello mostrato a lato, in cui alla *frequenza di taglio* f_T (pag. 121) per cui $|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} |H_{Max}|^2$ corrisponde un valore di 3 dB inferiore al massimo, che per un passa basso si trova nell'origine: per questo alla f_T viene dato nome di *banda a 3 dB*, intendendo con questo che la potenza delle componenti



frequenziali del segnale che rientrano in tale banda subirà al massimo un dimezzamento. Qualora invece il segnale in transito occupi una banda maggiore, ad es. W , il valore di $G_{dB}^{Max} - G_{dB}(f)|_{f=W}$ costituisce una misura della *distorsione di ampiezza* subita dal segnale, ovvero la differenza di guadagno tra le sue componenti frequenziali più (e meno) attenuate.

Infine, qualora si desideri che la massima distorsione di ampiezza non sia maggiore di una quantità preassegnata, mediante il grafico si individua la banda entro la quale $G_{dB}(f)$ si mantiene all'interno della massima variazione (in dB) prevista, ottenendo così il valore della banda di segnale per cui la distorsione non supera quella desiderata.

8.2.2 Distorsione di fase

Consideriamo ora un canale privo di distorsione di ampiezza, descritto da una risposta in frequenza $H(f) = e^{j\varphi(f)}$, con $\varphi(f) \neq -2\pi f\tau$. In tal caso il segnale in uscita subisce alterazioni della *forma d'onda*, a causa del diverso ritardo subito dalle frequenze in esso presenti, come già illustrato nell'esempio di pag. 66; tale alterazione può anche produrre una notevole variazione della dinamica del segnale, nel caso in cui i diversi ritardi producano un *somma coerente* delle frequenze presenti.

Ritardo di fase Per illustrare questo concetto, poniamo $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ in ingresso al canale e consideriamo assente la distorsione di modulo: l'uscita sarà allora pari a¹⁰ $y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi(f_0)) = \cos\left(2\pi f_0 \left(t + \frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0}\right)\right) = \cos(2\pi f_0 (t - \tau_f(f_0)))$ in cui

$$\tau_f(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \quad (8.7)$$

è indicato come *ritardo di fase* e misura il tempo che intercorre tra ingresso ed uscita per una specifica frequenza f . E' immediato verificare che, nel caso in cui $\varphi(f) = -2\pi f\tau$, si ottiene $\tau_f(f) = \tau$, ovvero il ritardo è lo stesso a qualsiasi frequenza. Viceversa se τ_f dipende da f in modo *non lineare*, un segnale di ingresso costituito da due o più frequenze (come le armoniche di un segnale periodico) subisce per ognuna di esse un ritardo differente, ed il segnale uscente $y(t)$ manifesta una *deformazione* della forma d'onda.

Ritardo di gruppo Nel caso più generale di un segnale dallo *spettro continuo*, l'analisi viene svolta¹¹ scomponendo la banda del segnale in piccole regioni di frequenza, per

¹⁰Vedi la nota 24 a pag. 75.

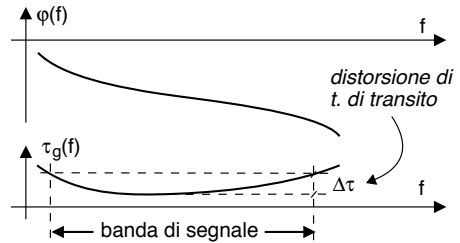
¹¹Tale analisi è rimandata al § 13.1.3.

ognuna delle quali il tempo di attraversamento del filtro è espresso dal *ritardo di gruppo* pari a

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f) \tag{8.8}$$

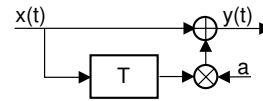
in cui f corrisponde al *centro* della regione (o *gruppo*) di frequenze, e $\tau_g(f)$ tiene conto della *inclinazione* di $\varphi(f)$ per ogni f : i diversi valori di τ_g nella banda di segnale danno quindi una *misura* della dispersione temporale subita dai diversi *gruppi* di frequenze presenti nel segnale. Anche per questo caso, se $\varphi(f) = -2\pi f\tau$ allora $\tau_g(f) = \tau_f(f) = \tau$ è costante, e non si verifica distorsione di fase.

Prendiamo ad esempio l'andamento di $\tau_g(f)$ mostrato in figura, e poniamo che in ingresso al filtro sia presente un suono percussivo, di breve durata e quindi esteso in frequenza. Mentre le frequenze nella regione centrale della banda subiscono un ritardo tra loro simile, quelle agli estremi arrivano con un ritardo maggiore, causandone la *dispersione temporale*



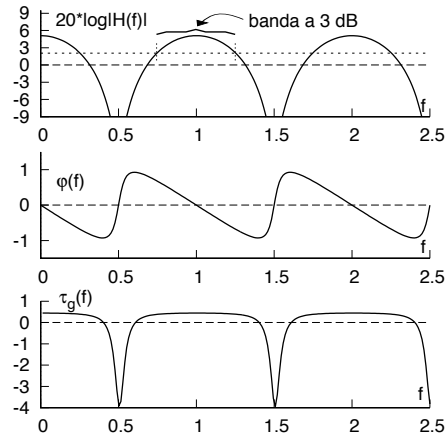
che snaturerà la qualità del suono. Per questo, la differenza $\Delta\tau_g = \tau_g^{max} - \tau_g^{min}$ viene presa come misura dell'entità della *distorsione di tempo di transito*.

Esempio Il filtro trasversale in figura rappresenta un collegamento radio in cui si verifica una eco dovuta a riflessione (vedi 20.3.3). Per esso il guadagno di potenza e la risposta di fase risultano pari



$$|H(f)|^2 = 1 + a^2 + 2a \cos 2\pi fT \quad \text{e} \quad \varphi(f) = \arctan \frac{-a \sin 2\pi fT}{1 + a \cos 2\pi fT}$$

e dunque è presente sia distorsione di ampiezza che di fase. Come noto $H(f)$ è periodica con periodo $f = \frac{1}{T}$, dunque lo sono il modulo, la fase, e τ_g , mostrati tutti in figura, per $a = .8$ e $T = 1$. In base ad $|H(f)|_{dB}^2$ viene individuata la banda a 3 dB, entro la quale la fase si mantiene abbastanza lineare, e τ_g varia relativamente poco. Viceversa, in corrispondenza delle regioni attenuate sono evidenti rapide variazioni di φ e τ_g .

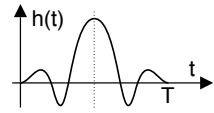


Può destare legittima sorpresa osservare regioni di frequenza per le quali $\tau_g < 0$, che sembrerebbero indicare una violazione del principio di causalità. Al § 13.4.1 si mostra come la (8.8) si ottenga grazie ad una approssimazione che arresta uno sviluppo in serie di potenze al primo termine, ma che nel caso in cui $|H(f)|$ non sia costante e/o la fase cambi rapidamente pendenza non è più lecita: pertanto si tratta solo di una inesattezza del

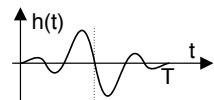
¹²L'espressione di $|H(f)|^2$ è stata ricavata al § 5.2.3. La fase si ottiene come $\varphi(f) = \arctan \frac{\Im\{H(f)\}}{\Re\{H(f)\}}$, in cui $H(f) = 1 + ae^{-j2\pi fT}$.

modello analitico, e l'anticausalità è solo apparente. D'altra parte, alcuni esperimenti mostrano che qualora $\tau_g < 0$, il filtro assume un comportamento *predittivo*¹³.

Filtro a fase lineare Può essere interessante chiedersi se esistano delle condizioni *sufficienti* ad assicurare che un filtro presenti risposta di fase lineare. La risposta è positiva, e la condizione è che la risposta impulsiva esibisca *simmetria pari* rispetto a metà della sua durata T , ovvero $h(t)|_{0 < t < T/2} = h(T-t)|_{0 < t < T/2}$, come esemplificato in figura. Infatti in tal caso considerando un secondo filtro con risposta impulsiva $g(t) = h(t + T/2)$ ottenuta anticipando $h(t)$ di metà durata, $g(t)$ ha simmetria *pari* rispetto a $t = 0$, e dunque ad esso corrisponde ad una $G(f)$ *reale* (vedi pag. 65): invertendo ora la traslazione temporale operata sulla risposta impulsiva, otteniamo che $H(f) = G(f) e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$, ossia una fase lineare $\varphi(f) = -\pi f T$. La condizione esposta è facilmente realizzabile mediante un *filtro trasversale*, vedi § 5.2.1.



Fase additiva In effetti è possibile ottenere un ritardo di gruppo $\tau_g(f)$ (8.8) costante anche qualora nella risposta di fase sia presente un termine additivo, ovvero $\varphi(f) = -2\pi f T - \theta$; in particolare nel caso in cui $\theta = \frac{\pi}{2}$ ciò comporta che ad un segnale di ingresso $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ne corrisponda (pag. 74) uno di uscita $y(t) = \cos(2\pi f_0 (t - T) - \frac{\pi}{2}) = \sin(2\pi f_0 (t - T))$, mentre si può dimostrare che in tal caso la risposta impulsiva del filtro presenta una simmetria *dispari* rispetto a metà durata, come mostrato in figura. Qualche dettaglio in più per capire meglio cosa accade viene fornito al § 13.1.2.



Caso del filtro adattato La linearità di fase non viene ricercata sempre e comunque, come nel caso del filtro adattato (§ 7.6) in cui non è per nulla tenuta in considerazione, dato che in tal caso l'unico requisito è posto nella forma $H_R(f) = G^*(f) e^{-j2\pi f T}$ in quanto lo scopo *non* è preservare la forma d'onda in transito, ma calcolare l'intercorrelazione tra segnale in ingresso e risposta impulsiva adattata.

8.2.3 Effetto della distorsione lineare sui segnali

La distorsione lineare introdotta su di un segnale ad opera di un filtro produce effetti che dipendono dalla natura del segnale, e dal suo utilizzo.

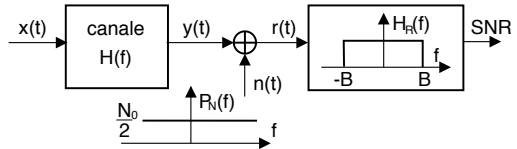
Segnale audio Sebbene l'orecchio umano non sia sensibile allo spettro di fase per quanto riguarda i segnali periodici¹⁴, come già osservato la variazione del ritardo di gruppo $\Delta\tau_g$ nella banda di segnale determina una *dispersione temporale* dei suoni brevi e ricchi di contenuto spettrale, e dunque la modifica del loro effetto percettivo; d'altro canto, la presenza di una distorsione di fase non altera l'intelligibilità del parlato, ma

¹³In questo caso l'uscita *sembra* precedere l'ingresso, tranne qualora il segnale di ingresso presenti una brusca discontinuità temporale, e quindi non sia più predicibile. In tal caso, l'effetto torna ad essere conseguenza della causa: vedi <https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee123/sp14/NegativeGroupDelay.pdf>

¹⁴Ascolta ad esempio https://www.youtube.com/watch?v=_xgurzL92Lc

causa comunque un effetto percepibile. Viceversa, le alterazioni del modulo di $H(f)$ modificano il *timbro* dei suoni, alterandone la distribuzione della potenza $\mathcal{P}_y(f)$.

Effetto sull'SNR Se il segnale $y(t)$ viene ricevuto in presenza di disturbi additivi con densità di potenza $\mathcal{P}_N(f) = N_0/2$, il ricevitore provvede innanzitutto ad eliminare le componenti di rumore esterne alla banda di segnale B mediante un filtro passabasso $H_R(f)$, vedi § 15.4.1.



Dato che l'attraversamento del canale con $|H(f)| \neq cost$ ha modificato la densità $\mathcal{P}_y(f)$ del segnale ricevuto rispetto a quella di $\mathcal{P}_x(f)$, la valutazione dell'SNR in ricezione deve tenere conto dell'effetto filtrante introdotto dal canale, ossia:

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_y}{\mathcal{P}_N} = \frac{\int_B \mathcal{P}_y(f) df}{\int_B \mathcal{P}_N(f) df} = \frac{\int_B \mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2 df}{N_0 B}$$

Allo stesso tempo, l'SNR modifica la propria dipendenza dalla frequenza, ossia

$$SNR(f) = \frac{\mathcal{P}_x(f) |H(f)|^2}{N_0/2}$$

Sebbene i due casi che seguono non siano ancora stati esattamente definiti, sono comunque inserite qui le considerazioni riassuntive al loro riguardo.

Segnale numerico Questo tipo di segnale è introdotto al cap. 15 e poi ripreso al cap. 16. Per esso la *linearità di fase* è di fondamentale importanza allo scopo di evitare fenomeni di *interferenza intersimbolica* (§ 15.1.2.2), che come vedremo sono conseguenza diretta dei fenomeni di dispersione temporale, dato che questi ultimi *scombussolano* le condizioni di Nyquist (§ 15.2.2.2) su cui l'impulso $g(t)$ adottato dal codificatore di linea (§ 15.1.2) è fondato.

Segnale modulato Indicando con $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$ e $\underline{h}(t)$ l'involuppo complesso (§ 11.2.1) di ingresso, uscita, e della risposta impulsiva di un canale, al § 13.1.1 si mostra che risulta $\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t)$, e dunque per le componenti analogiche di bassa frequenza di $\underline{y}(t)$ si manifesta un fenomeno indicato come *intermodulazione* delle c. a. di b. f., che consiste nelle relazioni

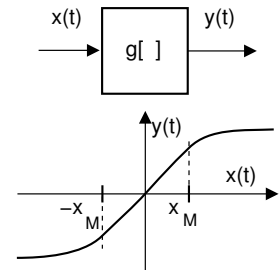
$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) - x_s(t) * h_s(t)] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_s(t) * h_c(t) + x_c(t) * h_s(t)] \end{cases} \quad (8.9)$$

Qualora $H(f)$ presenti simmetria coniugata rispetto ad f_0 si ottiene $h_s(t) = 0$, riducendo l'effetto dell'intermodulazione a quanto si otterrebbe filtrando ciascuna delle c.a. di b.f. mediante $h_c(t)$. D'altra parte, anche quest'ultimo tipo di distorsione può essere evitato qualora $\underline{h}(t)$ rappresenti un canale perfetto, a cui in questo caso corrisponde la condizione che, oltre a risultare $|H(f)| = cost$, il ritardo di gruppo $\tau_g(f)$ sia *costante* nella banda di segnale, o in modo equivalente $\varphi(f)$ sia *lineare* attorno alla portante f_0 , cioè $\varphi(f) = \varphi_0 - 2\pi(f - f_0)\tau$. Ulteriori approfondimenti ai §§ 13.1.2.4 e 13.2.

8.3 Distorsione di non linearità

Si tratta di un fenomeno che *non dipende* da un effetto memoria o dalla frequenza, come avviene nel caso della distorsione lineare. Al contrario, quella non lineare consiste nell'effetto prodotto su di un segnale dall'attraversamento di un dispositivo la cui caratteristica ingresso-uscita *istantanea* descrive un comportamento *non lineare*, per il quale cioè la relazione ingresso-uscita è del generico tipo $y(t) = g[x(t)] \neq ax(t) + b$, ovvero ogni valore di uscita dipende unicamente da quello di ingresso al medesimo istante, secondo una relazione appunto *non lineare*.

Saturazione Un tipico caso di distorsione non lineare si verifica quando un amplificatore¹⁵ è alimentato da un segnale di ingresso con dinamica troppo elevata. Indicando con x_M il massimo valore di ingresso per cui l'amplificatore mantiene un comportamento lineare, valori di $|x(t)| > x_M$ provocano il fenomeno della *saturazione*, caratterizzato dalla curva ingresso-uscita dalla forma *ad s* mostrata in figura.



Comparsa di nuove frequenze E' forse la conseguenza più appariscente della distorsione di non linearità. Prima di addentrarci in un modello analitico del fenomeno, può essere istruttivo riflettere sul risultato sperimentale mostrato in fig. 8.2. Un segnale sinusoidale a frequenza 5 Hz viene campionato con $f_c = 100$ Hz ottenendo 256 campioni di cui si valuta la densità di energia tramite DFT, con l'esito mostrato su di una scala in dB alla prima colonna, riproducendo in pratica la situazione di fig. 4.11, compreso l'effetto della finestra rettangolare. Lo stesso segnale viene quindi fatto passare attraverso una non linearità del tipo di quella mostrata sopra, causando la lieve distorsione della forma d'onda mostrata al centro di fig. 8.2: osserviamo in tal caso la comparsa di una componente a frequenza tripla, seppure con energia di 30 dB (pari a un millesimo) inferiore. L'ultima colonna mostra infine il risultato di una saturazione *più ripida*, al punto che la forma d'onda diviene quasi squadrata, producendo un numero più elevato (e più intenso) di armoniche, sempre dispari. In definitiva, sappiamo già (§ 2.2.2) che un'onda quadra ha solo armoniche dispari!

¹⁵come ad esempio è il caso dei TWTA introdotti a pag. 863

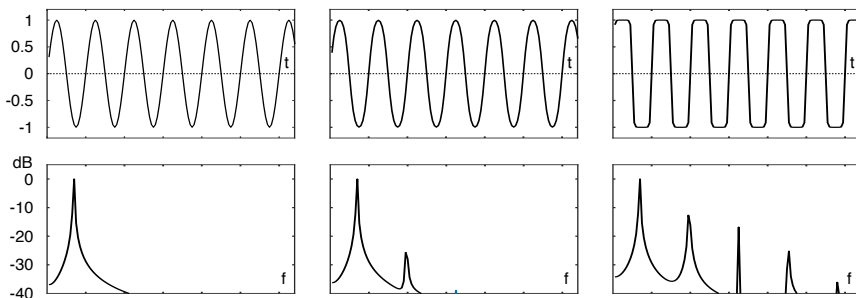


Figura 8.2: Sinusoide finestrata (a ds.), e dopo distorsione non lineare, con la comparsa di armoniche

Dato che in presenza di fenomeni non lineari decade il principio di sovrapposizione degli effetti, per descrivere il fenomeno in forma analitica si procede studiando prima il caso di un semplice segnale sinusoidale, e quindi si accenna ai risultati ottenibili per processi gaussiani. In entrambi i casi, l'analisi si basa sullo sviluppo di $g [x (t)]$ in serie di potenze arrestato al terzo ordine, in modo da poter scrivere¹⁶

$$y (t) = G [x (t) + \alpha x^2 (t) + \beta x^3 (t)] \tag{8.10}$$

in cui $G = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0}$ rappresenta il guadagno dell'amplificatore, ed i coefficienti

$$\alpha = \frac{1}{2G} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{6G} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0}$$

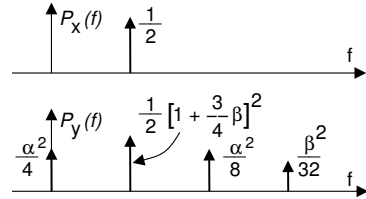
tengono conto degli effetti di secondo e terzo ordine. Notiamo anche come il termine legato a β sia quello che tiene conto dell'effetto della saturazione, in virtù della simmetria *dispari* di x^3 .

8.3.1 Ingresso sinusoidale

Ponendo $x (t) = A \cos \omega_0 t$ la (8.10) si riscrive come¹⁷

$$\begin{aligned} y (t) &= G [A \cos \omega_0 t + \alpha A^2 \cos^2 \omega_0 t + \beta A^3 \cos^3 \omega_0 t] = \\ &= GA \left[\frac{\alpha A}{2} + \left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2 \right) \cos \omega_0 t + \frac{\alpha A}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{\beta A^2}{4} \cos 3\omega_0 t \right] \end{aligned} \tag{8.11}$$

Ricordando ora che la potenza di una cosinusoide di ampiezza A è pari ad $\frac{A^2}{2}$, alla (8.11) corrisponde lo spettro di densità di potenza disegnato a lato, detta *spettro unilatero* in quanto non tiene conto delle frequenze negative, ed ottenuto per $A = G = 1$: osserviamo chiaramente sia la comparsa di termini a frequenza doppia e tripla di quella di ingresso, sia di una componente continua.



In molti casi l'esatta relazione $y (t) = g [x (t)]$ non è però nota, e dunque non lo sono i coefficienti α e β . Il loro valore viene quindi ottenuto per via *sperimentale* ponendo in ingresso una sinusoide di potenza nota, osservando la potenza delle armoniche presenti in uscita, e sfruttando la relazione (8.11) come descritto appresso.

Fattori di intermodulazione Le caratteristiche tecniche che accompagnano gli amplificatori riportano, invece di α e β , i valori dei *fattori di intermodulazione* μ_2 e μ_3 (detti di seconda e di terza armonica), ottenuti per via sperimentale utilizzando un ingresso *sinusoidale*, misurando le potenze in uscita \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} e \mathcal{P}_{III} oltre che alla frequenza in ingresso anche alla sua seconda e terza armonica, e definendo in base ai

¹⁶Si applichi lo sviluppo di Maclaurin arrestato al terzo ordine ossia

$$\begin{aligned} y = g (x) &= y_0 + \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right|_{x=0} x^n = y_0 + \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3 \cdot 2} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0} x^3 = \\ &= G \left(x + \frac{1}{2G} \left. \frac{d^2g}{dx^2} \right|_{x=0} + \frac{1}{6G} \left. \frac{d^3g}{dx^3} \right|_{x=0} x^3 \right) \end{aligned}$$

essendo $y_0 = g (x = 0) = 0$ ed avendo posto $G = \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=0}$.

¹⁷Si fa uso delle relazioni $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$ e $\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha$.

loro rapporti¹⁸ le quantità

$$\mu_2^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{II}}{\mathcal{P}_I^2} \quad \text{e} \quad \mu_3^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{III}}{\mathcal{P}_I^3} \quad (8.12)$$

da cui si possono ottenere i coefficienti α e β mediante le relazioni $\alpha \simeq 1.41 \cdot \mu_2 \cdot G$ e $\beta = 2 \cdot \mu_3 \cdot G^2$, come calcolato alla nota¹⁹.

Dato che dalle (8.12) possiamo scrivere $\mathcal{P}_{II} = \mu_2^2 \cdot \mathcal{P}_I^2$ e $\mathcal{P}_{III} = \mu_3^2 \cdot \mathcal{P}_I^3$, osserviamo che per piccoli valori di \mathcal{P}_I la distorsione prodotta sia da \mathcal{P}_{II} che da \mathcal{P}_{III} è trascurabile; all'aumentare di \mathcal{P}_I , \mathcal{P}_{II} cresce con il quadrato della potenza della sinusoide in ingresso, mentre \mathcal{P}_{III} con il cubo, e dunque la potenza della terza armonica \mathcal{P}_{III} finisce per divenire predominante.

Con alcuni passaggi trigonometrici si può infine mostrare che qualora il segnale in ingresso contenga più di una sinusoide, in uscita saranno presenti anche termini a frequenza pari alla somma ed alla differenza di ogni coppia di frequenze in ingresso, oltre a tutti i loro multipli: tale fenomeno viene indicato come *distorsione di intermodulazione*²⁰.

8.3.2 Ingresso aleatorio

Per sviluppare l'analisi dell'effetto che la distorsione non lineare produce su di un segnale a spettro continuo ci poniamo in un'altra situazione-limite, studiando il caso in cui l'ingresso $x(t)$ sia membro di un processo gaussiano stazionario a media nulla, con potenza \mathcal{P}_x e densità spettrale $\mathcal{P}_x(f)$.

Al § 8.5.1 vengono discussi i passaggi che, in virtù di alcune proprietà dei momenti di variabili aleatorie gaussiane, consentono di giungere ad una espressione della densità spettrale $\mathcal{P}_y(f)$ del processo $y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)]$ in uscita dalla non linearità nei termini della trasformata di Fourier della relativa funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_y(\tau)$. Il risultato mostra che oltre ad un termine in continua e ad una amplificazione di $\mathcal{P}_x(f)$, in uscita si manifestano anche i due termini additivi

$$\mathcal{P}_{II}(f) = G^2 2\alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f); \quad \mathcal{P}_{III}(f) = G^2 6\beta^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f)$$

¹⁸Le relazioni mostrate si ottengono scrivendo

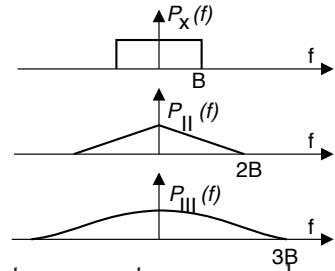
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_I &= \frac{G^2 A^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \beta A^2\right)^2 \simeq \frac{G^2 A^2}{2} \quad \left(\text{se } \beta \ll \frac{4}{3A^2}\right) \\ \mathcal{P}_{II} &= \frac{G^2 A^4 \alpha^2}{8} = \frac{G^4 A^4}{4} \frac{1}{G^2} \frac{\alpha^2}{2} = \mathcal{P}_I^2 \mu_2^2 \\ \mathcal{P}_{III} &= \frac{G^2 A^6 \beta^2}{32} = \frac{G^6 A^6}{8} \frac{1}{G^4} \frac{\beta^2}{4} = \mathcal{P}_I^3 \mu_3^2 \end{aligned}$$

¹⁹Le relazioni alla nota 18 definiscono i fattori μ_2 e μ_3 come $\begin{cases} \mu_2^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{II}}{\mathcal{P}_I^2} = \frac{1}{G^2} \frac{\alpha^2}{2} \\ \mu_3^2 \doteq \frac{\mathcal{P}_{III}}{\mathcal{P}_I^3} = \frac{1}{G^4} \frac{\beta^2}{4} \end{cases}$ da cui si ottengono

i valori riportati nel testo, purché sia verificata la condizione $\beta \ll 4/3A^2$. In caso contrario decade la possibilità di risalire in modo semplice ad α e β a partire dai fattori di intermodulazione, che restano dunque una misura *oggettiva* (in quanto ottenuti mediante una misurazione) dell'entità della distorsione non lineare.

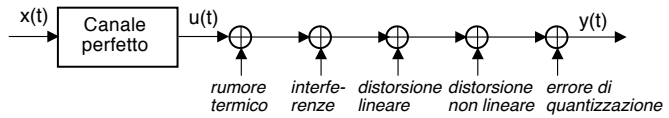
²⁰Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Intermodulazione>

che rappresentano l'effetto distorcente della non linearità: notiamo che per entrambi i contributi si verifica una *convoluzione in frequenza* della $\mathcal{P}_x(f)$ originaria con se stessa. Nel caso di un segnale $x(t)$ di banda base i termini $\mathcal{P}_{II}(f)$ e $\mathcal{P}_{III}(f)$ dovuti alla non linearità occupano pertanto una banda di estensione rispettivamente doppia e tripla di quella di $\mathcal{P}_x(f)$ come per il caso di esempio mostrato in figura, in cui una $\mathcal{P}_x(f)$ rettangolare convoluta con se stessa ne produce una triangolare di base doppia, o più smussata quando convoluta tre volte. Pertanto, solo una parte della potenza totale del segnale di errore dovuto alla distorsione giace nella stessa banda di segnale. Il caso relativo ad un segnale $x(t)$ *modulato* viene invece trattato al § 13.3.



8.4 Disturbi additivi

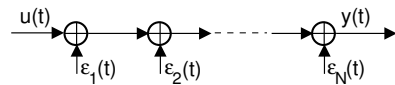
Il termine di errore $\varepsilon(t) = y(t) - ax(t - \tau)$ tra l'effettivo segnale ricevuto e quello prodotto dalla componente perfetta (pag. 231) del canale²¹ è dovuto, oltre alle cause di distorsione esposte fin qui, anche ad ulteriori fonti di disturbo *additivo* indicate per questo con il termine di *rumore* o *disturbo*, come ad esempio il rumore termico (§ 8.4.2), il disturbo di natura interferente (pag. 644), od il rumore di quantizzazione (§ 4.3.1.1) - anche se quest'ultimo è più propriamente un fenomeno di tipo non lineare. Le diverse fonti di disturbo vengono generalmente analizzate in forma separata e indipendente, e per ognuna di esse è definito un valore di $SNR_i = \mathcal{P}_u/\mathcal{P}_{\varepsilon_i}$ dovuto solamente a quella fonte. Vediamo ora come combinare assieme tali parametri di qualità.



Vediamo ora come combinare assieme tali parametri di qualità.

8.4.1 Valutazione dell'SNR dovuto a diverse fonti di disturbo

Per giungere ad una espressione per l' SNR_T complessivo consideriamo lo schema della figura a lato, in cui il segnale utile $u(t)$ è affetto da diverse cause di disturbo $\varepsilon_i(t)$ *indipendenti* tra loro ed a media nulla, per ognuna delle quali è noto il valore dell' SNR_i associato.



L'ipotesi di indipendenza statistica permette di affermare che la potenza di errore complessiva è *la somma*²² di quella dei singoli contributi, ossia

$$\mathcal{P}_{\varepsilon_T} = E \{ (\sum_i \varepsilon_i)^2 \} = \sum_i E \{ \varepsilon_i^2 \} = \sum_i \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$$

²¹La valutazione della potenza \mathcal{P}_u dalla componente perfetta in uscita dal canale trasmissivo viene affrontata nella seconda parte del testo, applicando alla potenza \mathcal{P}_x del segnale in ingresso al canale le relazioni di trasferimento energetico discusse al capitolo 18 e dipendenti dalla tipologia del mezzo trasmissivo, come descritto al capitolo 19.

²²Infatti al § 7.5.2 si mostra come il risultato della somma di processi indipendenti ed a media nulla abbia potenza pari alla somma delle potenze.

e dunque l'effetto di tutti i disturbi contemporaneamente attivi determina un SNR complessivo pari a $SNR_T = \mathcal{P}_u / \sum_{i=1}^N \mathcal{P}_{\varepsilon_i}$; considerando ora che la potenza dei singoli contributi di rumore può essere espressa come $\mathcal{P}_{\varepsilon_i} = \mathcal{P}_u / SNR_i$, si ottiene

$$SNR_T = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_u \sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{SNR_i}}$$

Questo risultato ricorda quello della impedenza equivalente a più impedenze poste in parallelo, il che porta a descrivere l' SNR complessivo come il *parallelo* degli SNR . Una applicazione di questo risultato viene esposta ai § 18.3.1 e § 18.3.2, che descrivono rispettivamente le prestazioni dei ripetitori *trasparenti* o *rigenerativi* nei confronti del rumore.

8.4.2 Rumore gaussiano

Molto spesso si assume che la somma dei contributi di rumore additivo possa essere assimilata ad un *processo gaussiano* (§ 6.5.3), e ciò consente di sviluppare i calcoli sfruttando le sue ben studiate proprietà. In alcuni casi si tratta solo di una approssimazione, ma se il disturbo additivo è il risultato di una somma elevata di cause *indipendenti ed identicamente distribuite* (i.i.d.), come in presenza di molti interferenti simili, il *teorema centrale del limite* (§ 6.7.2) assicura una buona aderenza alla realtà. Un caso particolare di disturbo additivo dovuto a molteplici cause i.i.d. prende il nome di *rumore termico*, che alla gaussianità aggiunge la proprietà di esibire una densità di potenza *bianca*, come ora andiamo ad approfondire.

8.4.2.1 Rumore termico nei bipoli passivi

Ai capi di un resistore R a temperatura T è presente una *tensione a vuoto* $n(t)$, realizzazione di un processo gaussiano a media nulla, e che è l'effetto del *moto caotico* degli elettroni all'interno della resistenza²³. Lo spettro di densità di potenza della tensione a vuoto ha espressione²⁴

$$\mathcal{P}_n(f) = 2R \frac{\hbar f}{e^{\frac{\hbar f}{kT}} - 1} \simeq 2kTR \quad [\text{Volt}^2]$$

in cui $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Joule/°K è la *costante di Boltzmann* ed $\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Joule·sec è la *costante di Plank*: questi valori fanno sì che alla *temperatura ambiente* $T = T_0 = 290$ °K (pari a 17 °C) l'approssimazione $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kTR$ sia valida ad ogni frequenza di interesse²⁵, ossia fino a qualche decina di GHz. Da questo punto di vista quindi il

²³Possiamo pensare che gli elettroni, qualora si trovino in maggior misura in una metà della resistenza, producano una differenza di potenziale negativa in quella direzione. Allo zero assoluto (- 273 °C) il moto caotico degli elettroni cessa, e si annulla così la tensione di rumore. Di qui l'aggettivo *termico* per descrivere il fenomeno.

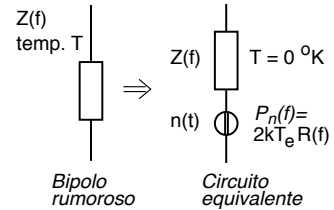
²⁴Si tratta di una forma della legge di Plank, vedi

https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson-Nyquist_noise

²⁵Espandendo $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ si ottiene che per $x \ll 1$ risulta $e^x \simeq 1 + x$, e quindi $\frac{\hbar f}{kT} \simeq 1 + \frac{\hbar f}{kT}$. Inoltre per $T = T_0 = 290$ °K si ottiene $\frac{\hbar f}{kT} = 1.65 \cdot 10^{-13} \cdot f$, e almeno finché $f < 50$ GHz si ottiene $\frac{\hbar f}{kT} < 0.01$ e dunque $\mathcal{P}_n(f) = \frac{2R\hbar f}{1 + \frac{\hbar f}{kT} - 1} = 2R\hbar f \cdot \frac{kT}{\hbar f} = 2kTR$.

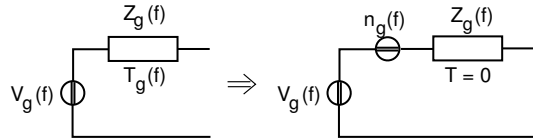
processo di rumore termico è *bianco*, ovvero costante a tutte le frequenze di interesse.

In un bipolo passivo di impedenza (§ 18.1.1) $Z(f) = R(f) + jX(f)$ solamente la parte reale $R(f)$ (componente resistiva) concorre a generare il processo di rumore termico, che pertanto possiede una densità di potenza *di segnale*, o a vuoto, $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kTR(f)$. Nel caso in cui il bipolo contenga *più* resistori a temperature diverse, si può definire una temperatura equivalente T_e ; un bipolo passivo equivale pertanto allo stesso bipolo non rumoroso (a temperatura zero), con in serie un generatore di rumore con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) \simeq 2kT_eR(f)$, come mostrato in figura. Notiamo ora che, in virtù dei conti che portano ad esprimere la parte reale dell'impedenza equivalente in funzione anche dei componenti reattivi presenti nel circuito, $R(f)$ risulta dipendere dalla frequenza, e quindi la densità di potenza $\mathcal{P}_n(f)$ può descrivere non più uno spettro bianco, bensì *colorato*.

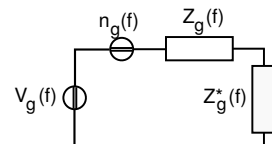


8.4.2.2 Rumore termico di un generatore di segnale

Da punto di vista di un ricevitore il segnale uscente dal canale appare provenire da una sorgente *equivalente*²⁶, in cui è presente un generatore di segnale (a vuoto) $v_g(t) \Leftrightarrow V_g(f)$ in serie ad una impedenza interna $Z_g(f)$ che si trova alla temperatura del generatore T_g . Come abbiamo visto, a sua volta $Z_g(f)$ presenta ai suoi capi una tensione di rumore (a vuoto) $n_g(f)$, e dunque il generatore sovrappone al suo proprio segnale anche quello di rumore.



Potenza disponibile Al § 18.1.1.3 si mostra che se il generatore con densità di potenza *di segnale* $\mathcal{P}_g(f)$ è chiuso su di un carico *adattato*²⁷ $Z_c(f) = Z_g^*(f)$ la potenza $\mathcal{W}_{dg}(f)$ assorbita²⁸ dal carico sarà la *massima* possibile e per questo denominata *potenza disponibile* del generatore, pari a



$$\mathcal{W}_{dg}(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R_g(f)} \quad [\text{Watt}]$$

Anche il generatore di rumore (che condivide con quello di segnale la medesima impedenza interna $Z_g(f)$) cede al carico la propria potenza (di rumore) disponibile

$$\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{\mathcal{P}_n(f)}{4R_g(f)} = \frac{2kTR_g(f)}{4R_g(f)} = \frac{1}{2}kT_g \left[\frac{\text{Watt}}{\text{Hz}} \right]$$

²⁶Ovvero rappresentativa dello stadio di uscita del dispositivo o mezzo, a cui è connesso lo stadio di ingresso del ricevitore. L'argomento viene approfondito al cap. 18.

²⁷Come sarà illustrato al § 18.1.1, si parla di carico *adattato* quando il suo valore determina un effetto desiderato, come il massimo trasferimento di potenza in questo caso, o l'assenza di distorsione lineare qualora $Z_c(f) = \alpha Z_g(f)$.

²⁸Mentre la potenza *di segnale* (o *a vuoto*) è il quadrato di una tensione, quella assorbita dal carico è misurata in Watt, e per questo viene d'ora in poi indicata con \mathcal{W} .

Notiamo quindi che la densità di potenza *disponibile* del rumore è tornata ad avere uno spettro *bianco*!

SNR di un generatore Nel caso in cui $T_g = T_0 = 290$ °Kelvin (pari a 17° Celsius) il termine $\frac{1}{2}kT_g$ è universalmente indicato con la notazione $\mathcal{W}_{dn}(f) = \frac{1}{2}kT_0 = \frac{1}{2}N_0$, e poiché il ricevitore si considera sempre *adattato*, il segnale emesso dal generatore presenta un *SNR intrinseco*²⁹ pari a

$$SNR_g(f) = \frac{\mathcal{W}_{dg}(f)}{\frac{1}{2}kT_0} \quad (8.13)$$

Inoltre se $T_g = T_0$ il valore assunto da kT_0 può essere *precalcolato*, ed espresso in unità logaritmiche, fornendo $10 \log_{10}(1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 290) \approx -204 \frac{dBW}{Hz}$; in virtù delle regole di conversione introdotte a pag. 235 otteniamo per esso anche i valori seguenti, da utilizzare nelle formule di progetto del cap. 19:

$$kT_0 = -204 \text{ [dBW/Hz]} = -174 \text{ [dBm/Hz]} = -114 \text{ [dBm/MHz]}$$

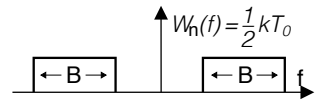
Esempio All'uscita di un filtro passa-banda ideale non rumoroso³⁰ di estensione $B = 1$ MHz si riscontra una potenza disponibile di rumore $\mathcal{W}_{dn} = 4 \cdot 10^{-3}$ picoWatt.

Infatti $\mathcal{W}_{dn} = \mathcal{W}_{dn}(f) \cdot 2B = kT_0 \cdot B$ ovvero

$$\mathcal{W}_{dn}^{dBm} = -114 \text{ [dBm/MHz]} + 0 \text{ [dB/MHz]} = -114 \text{ dBm}$$

e dunque

$$\mathcal{W}_{dn} = 10^{-114/10} = 10^{-11.4} = 3.98 \cdot 10^{-12} \approx 4 \cdot 10^{-12} \text{ mW.}$$



8.5 Appendice

8.5.1 Distorsione non lineare del rumore gaussiano

Riprendiamo il calcolo della $\mathcal{P}_y(f)$ per un segnale $y(t) = G[x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)]$ qualora $x(t)$ sia membro di un processo stazionario gaussiano a media nulla e potenza \mathcal{P}_x . A tale scopo occorre prima determinare $\mathcal{R}_y(\tau) = E\{y(t)y(t+\tau)\}$, e quindi eseguirne la trasformata di Fourier. Sulla base di un risultato di teoria³¹ che asserisce che per una coppia di v.a. (x_1, x_2) estratte da un processo gaussiano a media nulla risulta che $E\{x_1^i x_2^j\} = 0$ se $i + j$ è dispari, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{G^2(x_1 + \alpha x_1^2 + \beta x_1^3)(x_2 + \alpha x_2^2 + \beta x_2^3)\} = \\ &= G^2(E\{x_1 x_2\} + 2\beta E\{x_1 x_2^3\} + \alpha^2 E\{x_1^2 x_2^2\} + \beta^2 E\{x_1^3 x_2^3\}) \end{aligned} \quad (8.14)$$

²⁹Notiamo che lo stesso valore di SNR_g è esprimibile anche come rapporto tra le potenze *di segnale* anziché *disponibili*: infatti

$$SNR_g(f) = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{4R_g(f)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}kT_g} = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{2kT_g R_g(f)} = \frac{\mathcal{P}_g(f)}{\mathcal{P}_n(f)}$$

³⁰Si intende dire che il filtro non introduce altro rumore oltre a quello di natura termica. Al § 18.2 sarà illustrato come mediante il *fattore di rumore* F_{dB} si possa tenere conto del rumore introdotto da una o più reti due porte in cascata, sia di tipo *passivo* come nei collegamenti radio o su rame, sia di tipo *attivo* come per amplificatori e mixer.

³¹Nota come teorema di Isserlis, vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Isserlis'_theorem.

in cui si è indicato per brevità $x_1 = x(t)$ e $x_2 = x(t + \tau)$, che rappresentano le due v.a. marginali di una gaussiana multivariata a media nulla e covarianza $\Sigma_x = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_x & \mathcal{R}_x(\tau) \\ \mathcal{R}_x(\tau) & \mathcal{P}_x \end{bmatrix}$. A riguardo della (8.14), riconosciamo subito $E\{x_1 x_2\}$ come la $\mathcal{R}_x(\tau)$ in ingresso, mentre per gli altri momenti misti ci si avvale di un corollario al precedente risultato³², valido per una gaussiana multivariata, che asserisce:

$$E\{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n\} = \sum (E\{x_{p_1} \cdot x_{p_2}\} \cdot E\{x_{p_3} \cdot x_{p_4}\} \cdot \dots \cdot E\{x_{p_{n-1}} \cdot x_{p_n}\}) \quad (8.15)$$

in cui la somma è estesa a tutte le possibili permutazioni *non equivalenti* di $(1, 2, \dots, n)$ ³³. In base a ciò, sviluppiamo i termini che compaiono nella (8.14), e dopo semplici ma laboriosi passaggi otteniamo

$$\begin{aligned} E\{x_1 x_2^3\} &= E\{x_1 x_2 x_2 x_2\} = 3\mathcal{P}_x \cdot \mathcal{R}_x(\tau) \\ E\{x_1^2 x_2^2\} &= E\{x_1 x_1 x_2 x_2\} = \mathcal{P}_x^2 + 2\mathcal{R}_x^2(\tau) \\ E\{x_1^3 x_2^3\} &= E\{x_1 x_1 x_1 x_2 x_2 x_2\} = 9\mathcal{P}_x^2 \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + 6\mathcal{R}_x^3(\tau) \end{aligned} \quad (8.16)$$

in cui si è sostituito (per la stazionarietà) $E\{x_1^2\} = E\{x_2^2\}$ con \mathcal{P}_x , e $E\{x_1 x_2\} = E\{x_2 x_1\}$ con $\mathcal{R}_x(\tau)$. Sostituendo le (8.16) nella (8.14) possiamo ora scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y(\tau) &= G^2 (\mathcal{R}_x(\tau) + 2\beta \cdot 3\mathcal{P}_x \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + \alpha^2 (\mathcal{P}_x^2 + 2\mathcal{R}_x^2(\tau)) + \beta^2 (9\mathcal{P}_x^2 \cdot \mathcal{R}_x(\tau) + 6\mathcal{R}_x^3(\tau))) \\ &= G^2 (\alpha^2 \mathcal{P}_x^2 + (1 + 6\beta \mathcal{P}_x + 9\beta^2 \mathcal{P}_x^2) \mathcal{R}_x(\tau) + \alpha^2 2\mathcal{R}_x^2(\tau) + 6\beta^2 \mathcal{R}_x^3(\tau)) \end{aligned}$$

da cui finalmente otteniamo la $\mathcal{P}_y(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_y(\tau)\}$ come somma di quattro termini $\mathcal{P}_0(f) + \mathcal{P}_I(f) + \mathcal{P}_{II}(f) + \mathcal{P}_{III}(f)$, in cui

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0(f) &= G^2 \alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x^2 \cdot \delta(f) \\ \mathcal{P}_I(f) &= G^2 (1 + 6\beta \mathcal{P}_x + 9\beta^2 \mathcal{P}_x^2) \cdot \mathcal{P}_x(f) \\ \mathcal{P}_{II}(f) &= G^2 2\alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \\ \mathcal{P}_{III}(f) &= G^2 6\beta^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \end{aligned}$$

Il termine $\mathcal{P}_0(f)$ rappresenta un *contributo in continua* presente in $y(t)$ (ma non in $x(t)$) e di ampiezza $G\alpha\mathcal{P}_x$, mentre $\mathcal{P}_I(f)$ rappresenta una *amplificazione* di $x(t)$ di un fattore pari a $G\sqrt{1 + 6\beta\mathcal{P}_x + 9\beta^2\mathcal{P}_x^2}$, e rappresenta il *segnale utile*. Viceversa, i termini $\mathcal{P}_{II}(f)$ e $\mathcal{P}_{III}(f)$ costituiscono i termini di *distorsione* causati dall'elemento non lineare, e sono discussi ai §§ 8.3 e 13.3.

³²Vedi <https://math.stackexchange.com/questions/957351/proving-isserlis-theorem-for-n-4> per la dimostrazione del caso di quarto ordine.

³³Le permutazioni si definiscono *equivalenti* se accoppiano con ordine diverso o in posizione diversa le stesse v.a.. Ad esempio, per quattro v.a. si ha

$$E\{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\} = E\{x_1 \cdot x_2\} \cdot E\{x_3 \cdot x_4\} + E\{x_1 \cdot x_3\} \cdot E\{x_2 \cdot x_4\} + E\{x_1 \cdot x_4\} \cdot E\{x_2 \cdot x_3\}$$

mentre per un momento di ordine 6 si ottengono 15 termini. Se il momento misto coinvolge un numero di v.a. inferiore al suo ordine, come per le (8.16), le permutazioni intendono indicare la *posizione* di ogni v.a., e non il suo pedice.

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>