

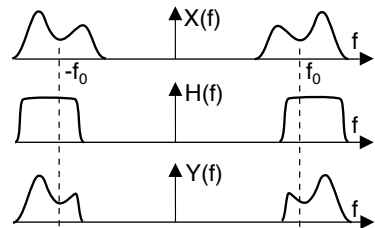
# Distorsione per segnali modulati

**F**ORTI della descrizione analitica dei segnali modulati (cap. 11), e dello studio delle possibili tecniche di mo-demodulazione (cap. 12), occupiamoci di investigare l'influenza che i fenomeni di distorsione *lineare* e *non* (cap. 8) possono avere sui segnali di natura passa-banda, o modulati. A tal fine, viene dapprima esaminato come le operazioni di filtraggio possano essere descritte anche in termini di involuppo complesso, e quindi sono determinate le condizioni *favorevoli* che un canale di comunicazione passa banda dovrebbe avere, così come viene approfondita la possibilità di *semplificare* l'analisi degli effetti per casi particolari di segnale modulato. I risultati sono quindi applicati alle tecniche di modulazione affrontate al capitolo 12, in modo da analizzare gli effetti della distorsione lineare nei diversi casi. Infine, viene mostrato come la modulazione angolare *non risenta* di fenomeni di distorsione *non* lineare.

## 13.1 Filtraggio passa banda

Qualora un filtro presenti una risposta in frequenza  $H(f)$  di tipo *passa banda* come raffigurato a lato, la corrispondente risposta impulsiva  $h(t)$  può essere considerata descritta nei termini delle componenti in fase ed in quadratura

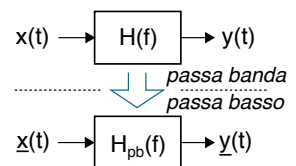
$$h(t) = h_c(t) \cos \omega_0 t - h_s(t) \sin \omega_0 t \quad (13.1)$$



riferite ad una frequenza  $f_0$ , ovvero nei termini del relativo involuppo complesso  $\underline{h}(t) = h_c(t) + jh_s(t)$  in modo del tutto simile (§ 11.2.1) a quanto avviene per il segnale modulato  $x(t)$  in ingresso.

Ciò consente di ri-definire l'operazione di filtraggio di  $x(t)$  attraverso  $H(f)$  nei termini del filtraggio del relativo involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  da parte di filtro  $H_{pb}(f)$  passa basso detto *equivalente di banda base* e descritto da una risposta impulsiva *complessa*

$$h_{pb}(t) = \frac{1}{2} \underline{h}(t) \quad (13.2)$$



Qualora infatti sia per il segnale modulato  $x(t)$  che per la risposta impulsiva  $h(t)$

valgano le condizioni di limitazione in banda, l'involuppo complesso dell'uscita da  $H(f)$  passa banda può essere calcolato a partire da  $\underline{x}(t)$  e  $\underline{h}(t)$  (valutati rispetto alla medesima frequenza  $f_0$ ) come<sup>1</sup>

$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t) \tag{13.3}$$

da cui si ottiene l'espressione di  $y_c(t)$  ed  $y_s(t)$  in funzione delle c.a. di b.f. di  $x(t)$  e di quelle del filtro<sup>2</sup>:

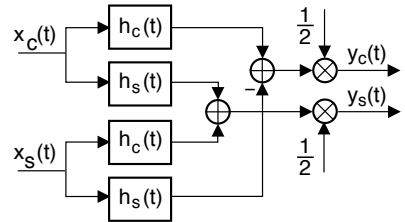
$$\begin{aligned} \underline{y} &= \frac{1}{2} \underline{x} * \underline{h} = \frac{1}{2} [x_c + jx_s] * [h_c + jh_s] = \\ &= \frac{1}{2} [x_c * h_c - x_s * h_s] + j\frac{1}{2} [x_s * h_c + x_c * h_s] \end{aligned} \tag{13.4}$$

Pertanto le componenti reale e immaginaria di  $\underline{y}(t)$  possono essere ottenute mediante 4 filtri *di banda base* operanti su  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , dato che dalla (13.4) otteniamo

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) - x_s(t) * h_s(t)] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_s(t) * h_c(t) + x_c(t) * h_s(t)] \end{cases} \tag{13.5}$$

a cui corrisponde lo schema simbolico mostrato sotto.

Il risultato (13.5) ha una doppia valenza, sia positiva che negativa. Da un lato asserisce che si può *intenzionalmente* eseguire un filtraggio di tipo passa banda su di un segnale modulato senza che sia necessario realizzare il filtro *per davvero*, operando invece sulle relative c.a. di b.f. del segnale, e del filtro. D'altro canto se l'effetto filtrante è causato dal canale di comunicazione ed è *già avvenuto*, l'effetto prodotto sulle c.a. di b.f.  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$  ottenute mediante demodulazione in fase e quadratura (§ 11.2.4) del segnale modulato prende il nome di...



### 13.1.1 Intermodulazione tra componenti analogiche

Le (13.5) mostrano come sia  $y_c(t)$  che  $y_s(t)$  dipendano in generale da entrambe le componenti  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ , in un modo *apparentemente* ineliminabile. Infatti, le informazioni contenute in  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono ora mescolate in modo da non poter essere recuperate mediante una operazione di equalizzazione (§§ 15.3 e 18.4) attuata separatamente su ciascuna delle c.a. di b.f.  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$ . A meno che...

<sup>1</sup>Per dimostrare il risultato, mostriamo innanzitutto che il segnale analitico in uscita vale  $y^+(t) = x^+(t) * h^+(t)$ . Infatti, omettendo di indicare nei passaggi la variabile  $(t)$  per compattezza di notazione, risulta

$$x^+(t) * h^+(t) = [x * h_{fp}] * [h * h_{fp}] = [x * h] * [h_{fp} * h_{fp}] = y * h_{fp} = y^+(t)$$

in cui  $h_{fp}(t)$  è la risposta impulsiva del filtro necessario ad estrarre il segnale analitico. Non resta ora che mostrare lo sviluppo per il risultato anticipato:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t) &= \frac{1}{2} [2x^+(t) e^{-j\omega_0 t}] * [2h^+(t) e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} x^+(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} h^+(t-\tau) e^{-j\omega_0(t-\tau)} d\tau = \\ &= 2e^{-j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} x^+(\tau) h^+(t-\tau) d\tau = 2e^{-j\omega_0 t} y^+(t) = \underline{y}(t) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Tralasciamo di indicare la dipendenza da  $t$  per semplicità di notazione.

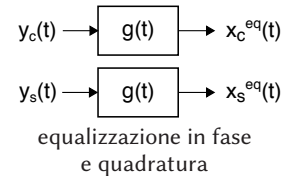
### 13.1.1.1 Equalizzazione in fase e quadratura

Consideriamo il caso in cui  $\underline{h}(t)$  presenti *una sola* delle due c.a. di b.f.<sup>3</sup>, ovvero  $\underline{h}(t)$  sia solo reale o solo immaginario: se ad esempio risulta  $\underline{h}(t) = h_c(t)$ , le (13.5) divengono

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_c(t) \\ y_s(t) = \frac{1}{2}x_s(t) * h_c(t) \end{cases} \quad (13.6)$$

e quindi  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$  risultano affette unicamente da distorsione lineare (§ 8.2).

Ciò consente di ri-ottenere le componenti *trasmesse*  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  a partire da quelle *ricevute*  $y_c(t)$  e  $y_s(t)$  mediante un procedimento di *equalizzazione*<sup>4</sup> svolto su entrambi i rami in modo indipendente mediante due identici filtri con risposta impulsiva  $g(t)$  *reale* e tale che  $g(t) * h_c(t) = 2\delta(t - \tau)$ .



Così facendo vengono ripristinate le condizioni di *canale perfetto* (pag. 231), cioè

$$\begin{cases} x_c^{eq}(t) = y_c(t) * g(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_c(t) * g(t) = x_c(t - \tau) \\ x_s^{eq}(t) = y_s(t) * g(t) = \frac{1}{2}x_s(t) * h_c(t) * g(t) = x_s(t - \tau) \end{cases}$$

### 13.1.1.2 Equalizzazione complessa

Qualora nella (13.5) siano presenti entrambe  $h_c(t)$  e  $h_s(t)$  ed entrambe  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  non è possibile equalizzare le c.a. di b.f. in modo indipendente, e apparentemente la distorsione lineare può essere rimossa solo operando sul segnale modulato, con tutte le difficoltà legate alle elevate frequenze in gioco. Se invece rimuoviamo il vincolo di operare mediante un filtro *fisicamente realizzabile*, ossia con risposta impulsiva  $g(t)$  *reale*, scopriamo che l'equalizzazione *può ancora* essere svolta *in banda base* ricorrendo ad una convoluzione *complessa*

$$\underline{x}^{eq}(t) = \underline{y}(t) * \underline{g}(t) \quad (13.7)$$

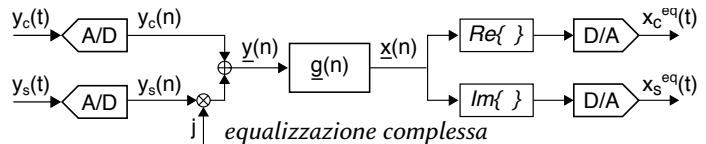
in cui  $\underline{g}(t)$  è definita in modo che

$$\underline{h}^{eq}(t) = \underline{g}(t) * \underline{h}(t) = 2\delta(t - \tau) \quad (13.8)$$

ovvero in modo da rendere *perfetto* l'involuppo complesso della risposta impulsiva del canale, dato che combinando le (13.3), (13.7) e (13.8) si ottiene

$$\underline{x}^{eq}(t) = \underline{y}(t) * \underline{g}(t) = \frac{1}{2}\underline{x}(t) * \underline{h}(t) * \underline{g}(t) = \underline{x}(t) * \delta(t - \tau) = \underline{x}(t - \tau)$$

L'equalizzazione complessa si rende possibile realizzando un filtro numerico (§ 5.3) con risposta impulsiva  $\underline{g}(n)$  *complessa* ottenuta a partire dai campioni di  $\underline{g}(t)$ , ed operante sui campioni delle c.a. di b.f. come mostrato in figura.

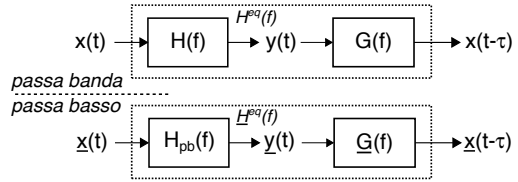


<sup>3</sup>Una considerazione del tutto simile può essere svolta qualora sia l'involuppo complesso *del segnale modulato*  $\underline{x}(t)$  ad essere solo reale od immaginario, ma viene rimandata al § 13.2.

<sup>4</sup>Come già evidenziato al § 18.4 è preferibile realizzare l'equalizzazione operando sulle c.a. di b.f.  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  *da trasmettere*, in modo da evitare di rendere colorato il rumore in ingresso al ricevitore. Nel caso in cui  $h_c(t)$  non sia nota, occorre che presso il ricevitore venga effettuata una sua stima, vedi § 18.4.

**13.1.1.3 Canale equalizzato**

Effettuare l'equalizzazione direttamente a radio frequenza porta ad un risultato lievemente diverso da quando la si realizzi con l'equivalente di banda base: infatti anche se in entrambi i casi il risultato è sempre quello di ottenere un canale equalizzato *perfetto*, nel primo caso tale proprietà compete al canale passa banda ovvero  $h^{eq}(t) = \delta(t - \tau)$ , mentre nel secondo è l'equivalente *passa basso* ad essere perfetto, ovvero  $\underline{h}^{eq}(t) = \delta(t - \tau)$ . Prendiamo spunto da questa osservazione per analizzare i casi in cui *non si verifica* distorsione lineare per un segnale modulato.



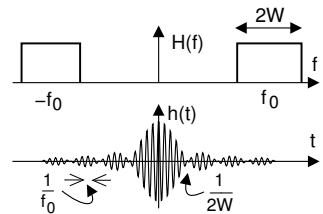
**13.1.2 Assenza di distorsione lineare nel filtraggio passa banda**

Prendiamo in esame i requisiti affinché un canale non produca effetti di distorsione lineare su di un segnale modulato che lo attraversa, aggiungendo dettagli un po' per volta, per arrivare ad un risultato più generale.

**13.1.2.1 Canale passa banda ideale**

E' descritto da una risposta in frequenza  $H(f)$  nulla ovunque, tranne che negli intervalli di frequenze  $f_0 - W \leq |f| \leq f_0 + W$  in cui ha valore unitario, ovvero

$$H(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0)$$



da cui antitrasformando si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} h(t) &= 2W \text{sinc}(2Wt) (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) = \\ &= 4W \text{sinc}(2Wt) \cos 2\pi f_0 t \end{aligned} \tag{13.9}$$

Confrontando la (13.9) con la (13.1), riconosciamo che

$$h_c(t) = 4W \text{sinc}(2Wt) \quad \text{e} \quad h_s(t) = 0$$

e dunque  $\underline{h}(t) = h_c(t) + jh_s(t)$  è reale, ed  $\underline{H}(f) = 2\text{rect}_{2W}(f)$ . Un segnale modulato in transito non subisce nessuna intermodulazione, ne distorsione lineare, e neanche ritardo.

A questo caso particolare aggiungiamo le considerazioni relative ad un canale perfetto (ovvero con modulo costante e fase lineare) svolte a pag. 231, ove si afferma che in tal caso la forma d'onda del segnale in transito non subisce alterazione se non per un ritardo temporale: verifichiamo come questa ipotesi si rifletta sulle c.a. di b.f. di un segnale modulato. Come anticipato al § 13.1.1.3, ad essere perfetta può essere sia la risposta in frequenza  $H(f)$  del canale passa banda, sia quella  $\underline{H}(f)$  del suo equivalente passa basso (13.2). Iniziamo dal secondo.

**13.1.2.2 Canale equivalente passa basso perfetto**

L'involuppo complesso in questo caso ha trasformata

$$\underline{H}(f) = 2\text{rect}_{2W}(f) e^{-j2\pi f \tau}$$

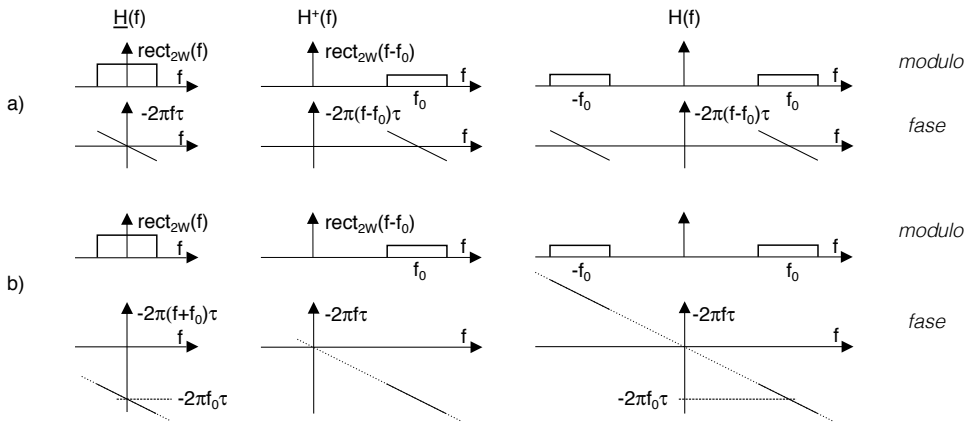


Figura 13.1: Condizioni di assenza di distorsione lineare per segnali modulati, nei casi a) - canale equivalente passa basso perfetto, b) - canale passa banda perfetto

a cui è associata una  $\underline{h}(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau))$ . Ricordando (eq. (11.19)) che  $H^+(f) = \frac{1}{2}\underline{H}(f - f_0)$  e che  $H^-(f) = \frac{1}{2}\underline{H}^*(-f - f_0)$ , per il canale passa banda si ottiene

$$H(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + \text{rect}_{2W}(f + f_0) e^{-j2\pi(f+f_0)\tau} \quad (13.10)$$

mostrata in figura 13.1-a), a cui corrisponde<sup>5</sup> una risposta impulsiva

$$h(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0 t \quad (13.11)$$

e dunque anche in questo caso  $\underline{h}(t) = h_c(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau))$  è solamente reale. Un segnale modulato  $x(t)$  che attraversi il canale produce in uscita<sup>6</sup>

$$y(t) = x_c(t - \tau) \cos \omega_0 t - x_s(t - \tau) \sin \omega_0 t \quad (13.12)$$

manifestando un ritardo  $\tau$  a carico solamente delle c.a. di b.f., e non della portante. Indicando  $\varphi(f) = -2\pi f\tau$  come fase  $\varphi_{pb}(f)$  di  $\underline{H}(f)$ , il rapporto  $-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f) = \tau$  è stato indicato al § 8.2.2 come ritardo di gruppo  $\tau_g(f)$ , in questo caso costante in quanto  $\underline{H}(f)$  ha fase lineare.

### 13.1.2.3 Canale passa banda perfetto

In questo caso la risposta in frequenza assume la forma (vedi fig. 13.1-b)

$$H(f) = [\text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0)] e^{-j2\pi f\tau} \quad (13.13)$$

<sup>5</sup>Espandiamo la (13.10) come

$$H(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) e^{-j2\pi f\tau} e^{j2\pi f_0\tau} + \text{rect}_{2W}(f + f_0) e^{-j2\pi f\tau} e^{-j2\pi f_0\tau}$$

da cui antitrasformando si ottiene

$$\begin{aligned} h(t) &= 2W \text{sinc}(2W(t - \tau)) e^{j2\pi f_0(t-\tau)} e^{j2\pi f_0\tau} + 2W \text{sinc}(2W(t - \tau)) e^{-j2\pi f_0(t-\tau)} e^{-j2\pi f_0\tau} = \\ &= 2W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \left( e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

<sup>6</sup>La (13.12) si ottiene considerando  $W$  abbastanza elevato da poter assimilare  $2W \text{sinc}(2Wt) \rightarrow \delta(t)$  ossia ad un impulso, in modo che la (13.13) produca  $\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * 2\delta(t - \tau) = x_c(t - \tau) + jx_s(t - \tau)$ .

a cui corrisponde<sup>7</sup> una risposta impulsiva

$$h(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0(t - \tau) \tag{13.14}$$

ed un segnale analitico  $H^+(f) = \text{rect}_{2W}(f - f_0) e^{-j2\pi f \tau}$ , e quindi un involuppo complesso

$$\underline{H}(f) = 2H^+(f + f_0) = 2\text{rect}_{2W}(f) e^{-j2\pi(f+f_0)\tau}$$

da cui, essendo  $e^{-j2\pi(f+f_0)\tau} = e^{-j2\pi f \tau} e^{-j2\pi f_0 \tau} = e^{-j2\pi f \tau} (\cos \omega_0 \tau - j \sin \omega_0 \tau)$ , si ha

$$\underline{h}(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) (\cos \omega_0 \tau - j \sin \omega_0 \tau)$$

e pertanto

$$h_c(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \cos \omega_0 \tau \quad e \quad h_s(t) = 4W \text{sinc}(2W(t - \tau)) \sin \omega_0 \tau$$

Ponendo ora  $\phi = \omega_0 \tau$  e applicando le (13.5), in base all'osservazione alla nota 6 in uscita dal filtro troviamo componenti analogiche pari a

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t - \tau) \cos \phi - x_s(t - \tau) \sin \phi] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_c(t - \tau) \sin \phi + x_s(t - \tau) \cos \phi] \end{cases} \tag{13.15}$$

Il risultato (13.15) mostra che, oltre al ritardo  $\tau = \tau_g$  già trovato per il caso al § 13.1.2.2, si osserva anche una *rotazione* del piano dell'involuppo complesso, potendo esprimere le (13.15) come

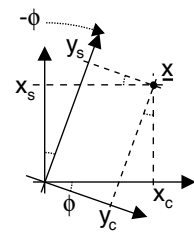
$$\begin{bmatrix} y_c(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t - \tau) \\ x_s(t - \tau) \end{bmatrix} \tag{13.16}$$

in cui la matrice dei coefficienti è costante, e corrisponde ad una rotazione *antioraria*<sup>8</sup> di  $\underline{y}(t)$  rispetto a  $\underline{x}(t)$ , equivalente alla rotazione *oraria* degli assi mostrata in figura, di un angolo  $\phi = \omega_0 \tau = 2\pi f_0 \tau$  pari alla fase di  $H(f)$  calcolata per  $f = f_0$  come mostrato in fig. 13.1-b). Indicando quest'ultima come  $\varphi(f)$ , osserviamo che al § 8.2.2 abbiamo definito  $\frac{-\phi}{2\pi f_0} = \frac{-\varphi(f_0)}{2\pi f_0} = \tau$  come *ritardo di fase*  $\tau_f(f)$  calcolato per  $f = f_0$ , ovvero  $\tau$  rappresenta anche il ritardo della portante, cioè

$$y(t) = x(t - \tau) = x_c(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau) - x_s(t - \tau) \sin \omega_0(t - \tau)$$

come previsto, vista l'ipotesi di partenza (13.13), nonché per il risultato che per un canale perfetto si ha  $\tau_g = \tau_f$ . L'effetto della rotazione  $\phi$  può quindi essere annullato se la fase della portante di demodulazione produce una rotazione opposta, oppure digitalmente per eseguire la rotazione inversa descritta a pagina 345 operando sui campioni delle c.a di b.f..

Infine, notiamo che le (13.16) possono essere riscritte in forma *compatta* come



<sup>7</sup>Il termine tra parentesi quadre in (13.13) ha anti-trasformata

$$\mathcal{F}^{-1} \{ \text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0) \} = 2W \text{sinc}(2Wt) (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) = 2W \text{sinc}(2Wt) \cos \omega_0 t$$

ma il termine  $e^{-j2\pi f \tau}$  presente in (13.13) produce un ritardo nell'antitrasformata, dunque il risultato (13.14)

<sup>8</sup>L'analisi che interpreta la trasformazione legata ad un sistema lineare con matrice dei coefficienti pari a  $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$  come una *rotazione* è stata svolta alla nota 17 di pag. 345.

$$\underline{y}(t) = \underline{x}(t - \tau) e^{j\phi}.$$

### 13.1.2.4 Segnale a banda stretta

L'ultimo caso in cui non si determina distorsione lineare sul segnale modulato  $x(t)$  si verifica quando il segnale occupa una banda  $B$  molto piccola<sup>9</sup> rispetto alla frequenza

portante  $f_0$ , in modo che la risposta in frequenza del canale  $H(f)$  possa ritenersi approssimativamente costante<sup>10</sup> nella banda del segnale ovvero per  $f \approx f_0$ , cioè

$$H(f) \approx H(f_0) = G e^{j\phi \text{sgn}(f)}$$

e dunque  $\underline{H}(f) = 2H^+(f + f_0) = 2G e^{j\phi}$ , a cui corrisponde un involuppo complesso

$$\underline{h}(t) = 2G e^{j\phi} \delta(t) = 2G (\cos \phi + j \sin \phi) \delta(t)$$

In uscita da  $H(f)$  si osserva pertanto (eq. 13.3)

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t) = (x_c(t) + jx_s(t)) * G (\cos \phi + j \sin \phi) \delta(t) = \\ &= G [(x_c(t) \cos \phi - x_s(t) \sin \phi) + j(x_c(t) \sin \phi + x_s(t) \cos \phi)] \end{aligned}$$

che può essere scritta in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} y_c(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}$$

in cui compare la stessa matrice dei coefficienti del caso precedente, che di nuovo rappresenta la rotazione oraria del piano dell'involuppo complesso di un angolo pari alla fase  $\varphi(f)$  di  $H(f)$  valutata per  $f = f_0$ , a cui corrisponde il segnale ricevuto

$$y(t) = x_c(t) \cos \omega_0(t - \tau) - x_s(t) \sin \omega_0(t - \tau)$$

**Riassumendo** Esprimendo la risposta in frequenza del canale nella forma  $H(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)}$  e la trasformata del corrispondente involuppo complesso come  $\underline{H}(f) = |\underline{H}(f)| e^{j\varphi_{pb}(f)}$  in cui  $\varphi_{pb}(f) = \varphi(f + f_0)$ , abbiamo mostrato che

- un canale *passabanda ideale* non altera il segnale modulato in transito;
- un canale *equivalente passabasso perfetto* introduce nelle c.a. di b.f. un ritardo  $\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \left. \frac{d}{df} \varphi_{pb}(f) \right|_{f=f_0}$  che dipende dalla pendenza della fase di  $\underline{H}(f)$  nell'origine, ovvero di quella  $\varphi(f)$  del passa banda per  $f = f_0$ ;
- un canale *passabanda perfetto* oltre al ritardo  $\tau_g$  delle c.a. di b.f. introduce anche una rotazione del piano di  $\underline{y}(t)$  di un angolo  $\phi = \omega_0 \tau_f$  che dipende dal valore della fase di  $\underline{H}(f)$  nell'origine in quanto  $\tau_f = -\frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0} = -\frac{\varphi_{pb}(0)}{2\pi f_0}$ ;

<sup>9</sup>Condizione indicata anche come *piccola banda frazionale*, definita come  $B/f_0 \ll 1$ .

<sup>10</sup>Detta anche condizione per un *fading piatto* nel caso di un collegamento radio, vedi pag. 678, mentre dal punto di vista circuitale ciò corrisponde a realizzare le condizioni di adattamento di impedenza (vedi § 18.1.1.4) in forma approssimata, ponendo  $Z_g(f) = Z_i(f_0)$  e  $Z_c(f) = Z_u(f_0)$ , dato che per frequenze  $|f - f_0| < \frac{B}{2}$  con  $B \ll f_0$ , le impedenze  $Z_i(f)$  e  $Z_u(f)$  non variano di molto.

- un segnale modulato a banda stretta subisce la rotazione suddetta, ma non il ritardo delle c.a di b.f.

L'approccio unitario agli ultimi tre aspetti delineati è fornito al § seguente, che illustra il caso particolare di distorsione lineare dovuta alla sola risposta di fase.

### 13.1.3 Ritardo di fase, di gruppo, e distorsione di tempo di transito

Al § 8.2.2 si è affermato che l'attraversamento da parte di un segnale modulato in ampiezza  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t)$  a banda stretta di un canale che (nella banda di segnale) presenta una risposta in frequenza  $H(f) = e^{j\varphi(f)}$  (ovvero modulo costante e fase generica) produce in uscita

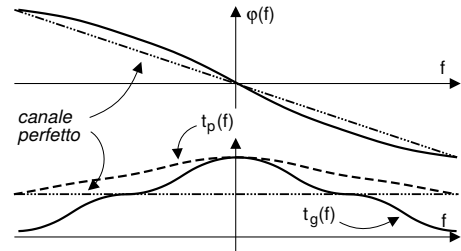
$$y(t) = a(t - \tau_g(f_0)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_f(f_0))) \quad (13.17)$$

in cui

$$\tau_f(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f} \quad e \quad \tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f)$$

sono rispettivamente indicati come ritardo di fase della portante  $\tau_f(f)$  (eq. 8.7) e ritardo di gruppo  $\tau_g(f)$  (eq. 8.8) del segnale modulato, ovvero il ritardo con cui il gruppo di frequenze presenti in  $a(t)$  si presenta in uscita. Tale risultato viene dimostrato in appendice 13.4.1 come l'esito di una approssimazione al primo ordine dello sviluppo in serie di potenze di  $\varphi(f)$ .

Nel caso di canale perfetto si ottiene  $\varphi(f) = -2\pi f \tau$ , e quindi  $t_g = t_p = \tau$  per qualunque frequenza; in caso contrario i due valori possono differire, come mostrato nella figura a lato, in cui notiamo che  $t_g(f) \simeq \tau$  alle frequenze per cui  $\varphi(f)$  viaggia parallela alla risposta in fase del canale perfetto, mentre risulta  $t_p(f) = \tau$  quando  $\varphi(f)$  la interseca.



Qualora il segnale in transito non sia a banda stretta, può essere considerato come la sovrapposizione di tante componenti  $x_i(t) = a_i(t) \cos(2\pi f_i t)$ , tutte a banda stretta, centrate su portanti  $f_i$  tra loro contigue: pertanto l'involuppo di ampiezza  $a_i(t)$  di ognuna di esse si presenta in uscita con un diverso ritardo  $\tau_i = t_g(f_i)$ . L'effetto della fase non lineare  $\varphi(f)$  è dunque espresso nei termini della sua derivata normalizzata  $t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \varphi(f)$ , misurabile strumentalmente mediante segnali a banda stretta, ed utilizzata per descrivere l'entità della distorsione di fase, per questo detta anche distorsione di tempo di transito, come definito al § 8.2.2.

### 13.1.4 Assenza di intermodulazione tra componenti analogiche

Come ultimo aspetto delle possibili tipologie di canale che possono tornare utili, ripartiamo dal sistema (13.5) e dall'osservazione che qualora l'involuppo complesso  $\underline{h}(t)$  associato alla risposta impulsiva  $h(t)$  del canale passa banda  $H(f)$  (considerato

per  $|f - f_0| \leq W$  ovvero entro la banda di segnale) sia completamente reale, ovvero

$$\underline{h}(t) = h_0(t) \tag{13.18}$$

le (13.5) si riducono alle (13.6) e si può procedere ad una equalizzazione *in fase e quadratura*, ovvero attuata con filtri *fisicamente realizzabili*. In realtà la (13.18) è una condizione solamente *sufficiente* ad ottenere assenza di intermodulazione, dato che in presenza di un ritardo  $\tau$  sulla portante (come mostrato al § 13.1.2.3)  $\underline{h}(t)$  diviene

$$\underline{h}(t) = h_0(t) (\cos \phi - j \sin \phi) = h_0(t) e^{-j\phi} \tag{13.19}$$

in cui  $\phi = \omega_0 \tau$ . Mostriamo come la (13.19) si riflette su  $\underline{H}(f) = |\underline{H}(f)| e^{j\varphi_{pb}(f)}$ .

La condizione (13.18)  $\underline{h}(t) = h_0(t)$  reale implica (pag. 65) una  $\underline{H}(f) = H_0(f)$  a *simmetria coniugata* rispetto a  $f = 0$ , ovvero modulo  $|\underline{H}(f)| = |H_0(f)|$  *pari*, e fase  $\varphi_{pb}(f) = \varphi(f + f_0)$  *dispari*; d'altra parte dalla (13.19) si ottiene

$$\underline{H}(f) = H_0(f) e^{-j\phi} = |H_0(f)| e^{j\varphi_{pb}(f)} e^{-j\phi} = |H_0(f)| e^{j(\varphi_{pb}(f) - \phi)}$$

Pertanto

*Un canale  $H(f)$  non provoca interferenza intersimbolica nei confronti di un segnale modulato se e solo se il corrispondente equivalente passa basso  $\underline{H}(f)$  presenta (nella banda di segnale) modulo pari e fase dispari, a meno di una costante  $\phi$ .*

Essendo  $\phi = \omega_0 \tau$ , ciò corrisponde a scomporre  $H^+(f)$  nella cascata di  $2H_0(f - f_0)$  e di un canale perfetto con  $h(t) = \delta(t - \tau)$  in cui  $\tau = \frac{-\phi}{\omega_0} = \frac{-\varphi(f)}{2\pi f_0} = \tau_f(f_0)$  è il ritardo di fase della portante, come mostrato in fig. 13.2.

**Osservazione** Qualora  $\phi$  sia pari ad un multiplo di  $\frac{\pi}{2}$  l'evoluzione di  $\underline{h}(t)$  si sviluppa lungo gli assi che definiscono il piano dell'involuppo complesso. Infatti in base alla (13.19) per  $\phi = 0$  si ottiene  $\underline{h}(t) = h_0(t)$  ovvero  $h_c(t) = h_0(t)$ , per  $\phi = \frac{\pi}{2}$  si ha  $\underline{h}(t) = -jh_0(t) = jh_s(t)$ , e per  $\phi = \pi$  o  $\phi = \frac{3\pi}{2}$  si ottiene rispettivamente  $\underline{h}(t) = -h_0(t) = h_c(t)$  e  $\underline{h}(t) = jh_0(t) = jh_s(t)$ .

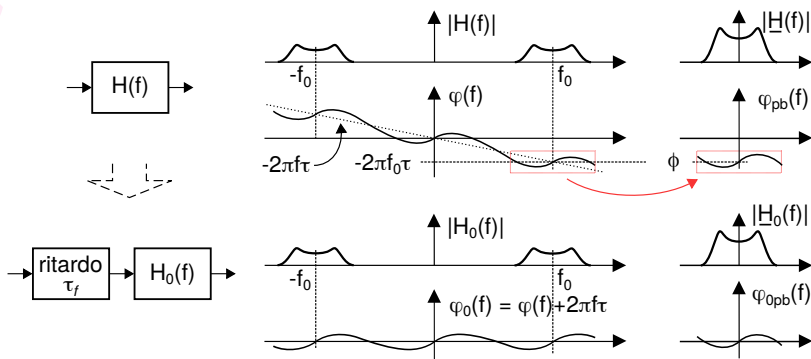


Figura 13.2: Condizione per assenza di intermodulazione nelle componenti analogiche di bassa frequenza

## 13.2 Distorsione lineare per segnali modulati

Dopo aver analizzato le particolarità del canale per quanto riguarda la trasmissione di generici segnali passa banda, possiamo ad analizzare gli effetti della *distorsione lineare* sui tipi di modulazione descritti al cap. 12, e che estendono le conseguenze già note dal cap. 8.

### 13.2.1 Modulazione di ampiezza

Distinguiamo tra i tre casi seguenti:

**AM-BLD-PS o Banda Laterale Doppia, Portante Soppressa** In questo caso  $x_s(t) = 0$ , e quindi il sistema (13.5) si riduce a  $\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_c(t) \\ y_s(t) = \frac{1}{2}x_c(t) * h_s(t) \end{cases}$  e non si verifica intermodulazione. In assenza di errore di fase sulla portante è quindi sufficiente un demodulatore omodina in quanto l'informazione si trova sulla componente  $y_c(t) = x_c(t) * h_c(t)$ , e l'effetto del canale può essere equalizzato con un filtro fisicamente realizzabile. Se invece è presente un errore di fase  $\phi$  (vedi § 12.2.3.1) adottando un demodulatore in fase e quadratura otteniamo

$$\begin{cases} y_c(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_c(t) \cos \phi - x_s(t) * h_s(t) \sin \phi] \\ y_s(t) = \frac{1}{2} [x_c(t) * h_s(t) \sin \phi + x_s(t) * h_s(t) \cos \phi] \end{cases}$$

ovvero  $y(t) = \frac{1}{2}\underline{x}(t) * \underline{h}(t) \cdot e^{-j\phi}$ , reversibile numerizzando le c.a. di b.f. e mettendo assieme la procedura di equalizzazione complessa (§ 13.1.1.2) con quella di inversione della rotazione (§ 11.2.5).

**AM-BLD-PI o Banda Laterale Doppia, Portante Intera** In questo caso il demodulatore è sempre di tipo *ad involuppo*, tipicamente operante sul segnale a media frequenza prodotto da uno stadio eterodina, la fase della cui portante è indifferente a quella del segnale modulato.

Il problema principale si presenta quando  $|H(f)|$  è molto ridotto in corrispondenza della portante ovvero per  $f = f_0$ , tipicamente a causa di una attenuazione *selettiva* come esemplificato all'esempio di pag. 238, poi ripreso al § 20.3.3. In tal caso infatti l'indice di modulazione  $I_a$  (eq. 12.4) supera il 100%, ed il segnale diviene *sovramodulato*, rendendo impraticabile la demodulazione di involuppo.

**AM-BLU o Banda Laterale Unica** In questo caso il segnale modulato contiene ambedue le c.a. di b.f., e dunque in presenza di distorsione lineare insorge intermodulazione (eq. 13.5), particolarmente deleteria se non equalizzata, operazione da svolgere per via numerica sui campioni dell'involuppo complesso ricevuto  $\underline{y}(t)$  (§ 13.1.1.2)

### 13.2.2 Modulazione di Frequenza

Quando un segnale modulato angolarmente attraversa un canale affetto da distorsione lineare (di modulo, di fase, od entrambe), si verificano<sup>11</sup> due fenomeni di *conversione*,

<sup>11</sup>Vedi E. Bedrosian, Distortion and Crosstalk of Linearly Filtered, Angle-Modulated Signals, presso <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19660014309.pdf>

indicati come conversione PM-AM e PM-PM. La prima consiste in una modulazione di ampiezza *sovrapposta*, come avviene per il caso discusso al § 12.3.2.2 relativo alla demodulazione FM mediante discriminatore; la seconda invece si sostanzia in una *alterazione* della modulazione di fase. In entrambi i casi l'effetto della distorsione *dipende* dal messaggio modulante, e dunque non può essere considerato di natura *additiva*. Anche se la modulazione AM *parassita* può essere rimossa da un limitatore in ricezione (vedi § 12.3.2.2), ciò non è possibile per l'errore introdotto nella fase modulante; quest'ultima presenta inoltre anche termini *non lineari* ovvero legati alle sue potenze, e dunque non eliminabili mediante equalizzazione dopo demodulazione.

### 13.3 Distorsione non lineare per segnali modulati

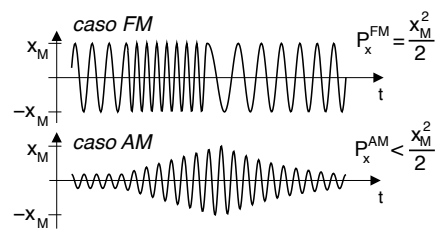
Già al § 8.3 si è analizzato il fenomeno della distorsione *di non linearità*, focalizzando l'attenzione sui segnali di banda base, e sulla generazione di componenti spettrali a frequenze assenti dal segnale di ingresso, eliminabili mediante filtraggio. Nel caso di segnali modulati una non linearità produce conseguenze peculiari, affrontate in questa sede.

#### 13.3.1 Limitazione di potenza per modulazione AM

Una delle prime conseguenze della non linearità degli apparati sui segnali modulati differenzia i casi FM ed AM per quanto riguarda la massima potenza a cui è possibile trasmettere. Nel primo caso infatti il segnale mantiene sempre la stessa ampiezza, che può essere posta pari a  $x_M$  ossia al massimo valore di ingresso al dispositivo non lineare (tipicamente, un amplificatore) prima che inizi a manifestarsi il fenomeno della saturazione (vedi fig. a pag. 241). Pertanto la potenza del segnale trasmesso è pari a  $\mathcal{P}_x^{FM} = x_M^2/2$ , condizione detta anche di *piena potenza*.

Al contrario, nel caso della trasmissione di un segnale AM l'involuppo di ampiezza del segnale è fortemente variabile nel tempo: per evitare di operare in regione non lineare, questa volta  $x_M$  è il valore *massimo* dell'involuppo di ampiezza, e la potenza di trasmissione del segnale deve essere minore di quella *piena*, una sorta di *arretramento* indicato anche come *back-off*.

Pertanto a differenza del caso FM, la trasmissione AM deve operare con una potenza  $\mathcal{P}_x^{AM} < \mathcal{P}_x^{FM}$  minore della massima consentita dall'amplificatore, mentre per trasmettere la stessa potenza è necessario ricorrere ad un amplificatore sovradimensionato.



#### 13.3.2 Distorsione di terza armonica

Riprendiamo il discorso iniziato al § 8.3.2, in cui si è analizzato l'effetto di una non linearità su di un processo gaussiano stazionario a media nulla, con potenza  $\mathcal{P}_x$  e densità spettrale  $\mathcal{P}_x(f)$ , giungendo a dimostrare la comparsa dei termini di secondo e

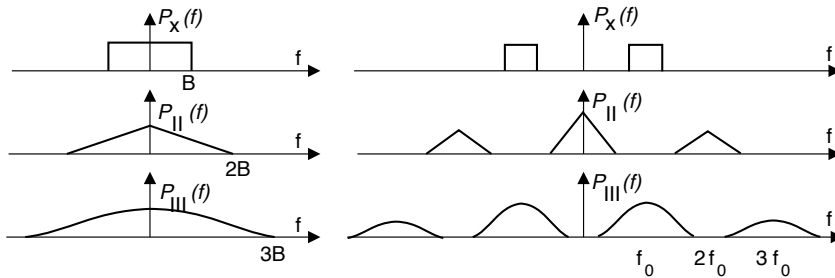


Figura 13.3: Densità spettrale di segnali affetti da distorsioni non lineari; a sinistra per banda base, a destra per segnale modulato

terzo ordine  $\mathcal{P}_{II}(f)$  e  $\mathcal{P}_{III}(f)$  espressi come

$$\mathcal{P}_{II}(f) = G^2 2\alpha^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f); \quad \mathcal{P}_{III}(f) = G^2 6\beta^2 \cdot \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_x(f) \quad (13.20)$$

Dato che ora il processo è un segnale modulato con portante  $f_0$ , eseguendo la costruzione grafica (§ 3.4.3) per le convoluzioni presenti nella (13.20) osserviamo (fig. 13.3) che il termine  $\mathcal{P}_{II}(f)$  occupa regioni di frequenza (con banda doppia rispetto a  $\mathcal{P}_x(f)$ ) centrate ad  $f = 0$  e  $f = 2f_0$ , disgiunte dalla banda di  $\mathcal{P}_x(f)$ : pertanto  $\mathcal{P}_{II}(f)$  può essere non considerato fonte di disturbo - se non a danno di eventuali altre trasmissioni a frequenza  $2f_0$ . Infine, la convoluzione tra  $\mathcal{P}_I(f)$  e  $\mathcal{P}_{II}(f)$  fornisce una  $\mathcal{P}_{III}(f)$  costituita anch'essa da due componenti, di cui una centrata ad  $f = 3f_0$  e che, come per  $\mathcal{P}_{II}(f)$ , non produce disturbo se non ad altre trasmissioni; mentre una parte più consistente di  $\mathcal{P}_{III}(f)$  è centrata sulla stessa portante  $f_0$  di  $x(t)$ , e dunque costituisce effettivamente fonte di disturbo, come si dice, *in banda*. In definitiva, vi sono almeno tre buone ragioni per tenere d'occhio il valore di  $\beta$  (vedi (8.10) per la sua definizione), che è causa delle distorsioni di terza armonica:

- è il coefficiente che tiene conto dei fenomeni di saturazione;
- produce interferenza *in banda* per i segnali modulati;
- produce interferenza *fuori banda* che danneggia le trasmissioni a frequenza tripla.

### 13.3.3 Insensibilità della modulazione angolare alle non linearità

Di nuovo, la modulazione FM si dimostra più tollerante della AM rispetto alle non-linearità, al punto che la distorsione *in banda* discussa al § precedente si dimostra non essere un disturbo. Infatti, applicando la notazione introdotta con (8.10) ad un segnale modulato angularmente, ovvero del tipo  $x(t) = \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ , l'attraversamento di un dispositivo con caratteristica ingresso-uscita approssimata come  $y(t) = x(t) + \alpha x^2(t) + \beta x^3(t)$  produce una uscita (vedi eq. (8.11))

$$y(t) = \frac{\alpha}{2} a^2(t) + \left(1 + \frac{3}{4}\beta\right) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)] + \frac{\alpha}{2} \cos[2\omega_0 t + 2\varphi(t)] + \frac{\beta}{4} \cos[3\omega_0 t + 3\varphi(t)]$$

Dopo che i termini a frequenza  $2\omega_0$  e  $3\omega_0$ , nonché la costante additiva, sono eliminati mediante un filtro passa-banda centrato in  $f = f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ , rimane solamente il termine  $z(t) = \left(1 + \frac{3}{4}\beta\right) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$ . Pertanto, la modulazione di fase  $\varphi(t)$  è esattamente

la stessa di quella impressa dal modulatore, e quindi i fenomeni non lineari *non hanno conseguenze sulla modulazione angolare!* Tranne, ovviamente, che per le interferenze causate alle trasmissioni su portanti a frequenza doppia e tripla di  $f_0$ .

L'insensibilità dei segnali modulati angularmente nei riguardi delle non linearità è stata ad esempio sfruttata nei collegamenti in ponte radio progettati per trasmettere un segnale FDM in modulazione di frequenza (§ 11.1.1.2), adottando un basso indice di modulazione (risparmiando banda) e trasmettendo a piena potenza (vedi § 8.3). In questo modo, la potenza del segnale trasmesso *non dipende* dal numero di canali contemporaneamente attivi.

### 13.3.4 Predistorsione

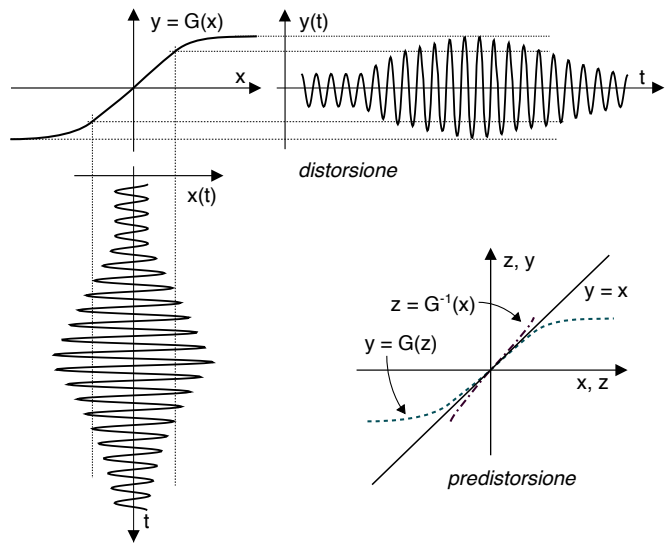
A differenza dei segnali modulati angularmente, quelli a modulazione di ampiezza - qualora non limitati in potenza come descritto al § 13.3.1 - subiscono pienamente l'effetto di distorsione non lineare, che si ripercuote sulla ampiezza della portante, ed in egual misura sul segnale demodolato.

Nel caso in cui i parametri che caratterizzano la non linearità<sup>12</sup>  $y = G(x)$  siano noti, un rimedio che viene tentato è quello di far passare il segnale modulato (prima della sua trasmissione) attraverso un nuovo elemento non lineare appositamente realizzato in modo che effettui una trasformazione *inversa* ovvero  $z = G^{-1}(x)$  con  $G^{-1}$  tale che

$$G(z) = G(G^{-1}(x)) = x$$

fornendo quindi in ingresso

all'elemento non lineare  $G$  il segnale *predistorto*  $z = G^{-1}(x)$  anziché quello originale  $x$ , neutralizzando così il fenomeno di non linearità.



## 13.4 Appendice

### 13.4.1 Derivazione del tempo di ritardo di gruppo

Dimostriamo qui il risultato (13.17). Svolgiamo i calcoli rappresentando sia l'ingresso  $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t)$  a banda stretta che la risposta impulsiva  $h(t)$  del canale nei termini dei corrispondenti involucri complessi, in modo da poter scrivere (vedi eq. (13.3))

$$\underline{Y}(f) = \frac{1}{2} \underline{X}(f) \underline{H}(f) \quad (13.21)$$

<sup>12</sup>Ovvero i coefficienti dello sviluppo in serie della caratteristica ingresso-uscita, vedi nota 16 a pag. 242.

Lo scopo è dimostrare che, se il canale è affetto dalla sola distorsione di fase, ovvero descritto da una risposta in frequenza  $H(f) = 1 \cdot e^{j\varphi(f)}$ , il segnale in uscita avrà la forma  $y(t) \simeq a(t - \tau_g(f_0)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_f(f_0)))$ .

Per quanto riguarda l'ingresso, ad esso corrisponde

$$\underline{X}(f) = X_c(f) = A(f) \quad (13.22)$$

mentre per quanto riguarda il canale risulta

$$\underline{H}(f) = 2H^+(f + f_0) = 2e^{j\varphi(f+f_0)} = 2e^{j\varphi_{pb}(f)} \quad (13.23)$$

dove il pedice  $_{pb}$  simboleggia che ci riferiamo alla fase dell'equivalente *passa-basso* del canale, ovvero che  $\varphi_{pb}(f) = \varphi(f + f_0)$  è la fase di  $\underline{H}(f)$ , e non di  $H(f)$ . Sviluppando ora  $\varphi_{pb}(f)$  in serie di Maclaurin, e troncando la stessa al primo termine, per  $f$  prossimo a zero si ottiene<sup>13</sup>

$$\varphi_{pb}(f) \simeq -2\pi(f_0\tau_f(f_0) + f\tau_g(f_0)) \quad (13.24)$$

e quindi sostituendo (13.22) e (13.23) in (13.21), ed utilizzando (13.24) otteniamo

$$\begin{aligned} \underline{Y}(f) &= \frac{1}{2}\underline{X}(f)\underline{H}(f) = A(f)e^{j\varphi_{pb}(f)} \simeq A(f)e^{-j2\pi(f_0\tau_f(f_0) + f\tau_g(f_0))} \\ &= e^{-j2\pi f_0\tau_f(f_0)} \cdot A(f)e^{-j2\pi f\tau_g(f_0)} \end{aligned}$$

da cui, ricordando la proprietà di traslazione temporale, otteniamo l'antitrasformata

$$\underline{y}(t) = e^{-j2\pi f_0\tau_f(f_0)} \cdot a(t - \tau_g(f_0))$$

a cui corrisponde<sup>14</sup> il segnale modulato  $y(t) \simeq a(t - \tau_g(f_0)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_f(f_0)))$ .

Teniamo ora a precisare che il risultato mostrato *perde validità* sia qualora la risposta in frequenza non abbia modulo costante, sia nel caso in cui la *derivata della fase*  $\frac{d\varphi(f)}{df}$  non possa essere considerata sufficientemente costante nell'intervallo di frequenze occupato da  $A(f)$ : nel secondo caso infatti nello sviluppo di Maclaurin di cui alla nota 13 occorre tener conto anche dei termini legati alle derivate successive, la cui importanza relativa aumenta con le *potenze* di  $f$ , ovvero tanto più ci si discosta dalla frequenza centrale  $f_0$  del gruppo (di frequenze).

<sup>13</sup> Infatti, ricordando le definizioni (§ 8.2.2)  $t_p(f) = -\frac{\varphi(f)}{2\pi f}$  per il ritardo *della portante* e  $t_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{df}$  per il ritardo *di gruppo*, sussistono i passaggi

$$\begin{aligned} \varphi_{pb}(f) &\simeq \varphi_{pb}(0) + f \cdot \left. \frac{d\varphi_{pb}(f)}{df} \right|_{f=0} = \varphi(f_0) + f \cdot \left. \frac{d\varphi(f)}{df} \right|_{f=f_0} \\ &= 2\pi \left( f_0 \frac{\varphi(f_0)}{2\pi f_0} + f \frac{1}{2\pi} \left. \frac{d\varphi(f)}{df} \right|_{f=f_0} \right) = -2\pi(f_0 t_p(f_0) + f t_g(f_0)) \end{aligned}$$

<sup>14</sup> E' sufficiente applicare le definizioni

$$\begin{aligned} y(t) &= \Re \left\{ \underline{y}(t) e^{j\omega_0 t} \right\} = \Re \left\{ e^{-j2\pi f_0\tau_f(f_0)} \cdot a(t - \tau_g(f_0)) \cdot e^{j\omega_0 t} \right\} = \\ &= \Re \left\{ a(t - \tau_g(f_0)) \cdot e^{j(2\pi f_0 t - 2\pi f_0\tau_f(f_0))} \right\} = a(t - \tau_g(f_0)) \cos(2\pi f_0(t - \tau_f(f_0))) \end{aligned}$$

L'opera

# ***Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione***

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -  
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*<sup>1</sup> che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

---

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>