

Filtri analogici e numerici

IN questo capitolo si approccia la natura fisica dei dispositivi filtranti che fino ad ora abbiamo considerato solamente dal punto di vista analitico. Accenniamo prima ai filtri *analogici*, ossia quelli che agiscono su di un segnale $x(t)$ *tempo-continuo*, basati su componenti elettrici ed elettronici, e per i quali esistono consolidati metodi di *analisi* e di *sintesi*, rispettivamente per determinare la risposta in frequenza di un dato circuito, o viceversa per ottenere l'architettura ed il dimensionamento dei componenti di un circuito a partire da una descrizione della $H(f)$ desiderata; in questo contesto, si affronta la relazione tra le trasformate di FOURIER e di LAPLACE. E' quindi il turno dei filtri *digitali*, che pur continuando ad operare su segnali analogici sono caratterizzati da una architettura *computazionale* basata su semplici operazioni di somma e prodotto di campioni del segnale presi ad intervalli regolari, e che per questo costituiscono una sorta di *ponte* tra il mondo analogico e quello numerico. Qualora invece l'azione filtrante sia realizzata operando direttamente sulla rappresentazione numerica di segnali campionati, significa che ci siamo spostati nel dominio dei filtri *numerici*, a cui corrispondono schemi architetturali implementabili indifferentemente sia in hardware che in software, e per i quali torneremo ad utilizzare gli strumenti analitici della trasformata *zeta* e della sua correlata DTFT (§ 4.5). Infine, viene introdotto il tema del filtraggio *polifase* ovvero in cui la frequenza di campionamento in ingresso ad un filtro è diversa da quella in uscita, con applicazione diretta alla decimazione, all'interpolazione ed all'ambito delle *software radio*.

5.1 Filtri analogici

Affrontiamo questa classe di filtri senza addentrarci in molti dettagli (svolti in altri corsi), limitandoci ad descrivere la metodica di studio. Come anticipato i filtri analogici operano esclusivamente su segnali tempo-continui¹, e sono realizzati mediante una varietà di tecniche. Il tipo più comune è quello basato su circuiti RLC a costanti concentrate, detto *filtro passivo* in quanto non richiede alimentazione, essendo costituito da condensatori, induttori e resistori. La difficoltà di ottenere elementi di elevata

¹Compreso quindi un segnale analogico che trasporta informazione numerica, § 15.1.2.

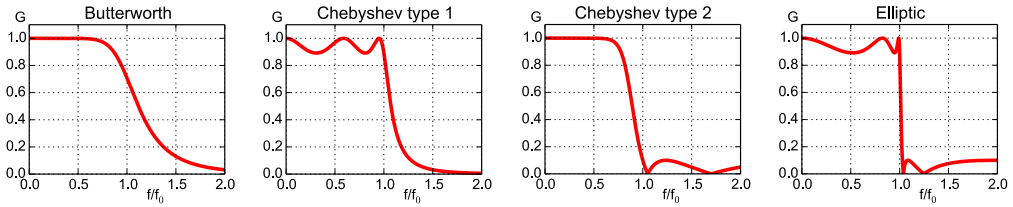


Figura 5.1: Risposta in frequenza di un filtro passa basso per diverse famiglie polinomiali

induttanza ma di piccole dimensioni necessari alle frequenze più basse ha portato a realizzarne la funzione per mezzo di amplificatori operazionali² dando luogo (fino a circa 1 MHz) ai *filtri attivi*, mentre a frequenze più elevate oltre agli RLC si possono realizzare filtri a *crystallo*, *elettromeccanici*, a *guida d'onda*, a *microstrisce*³.

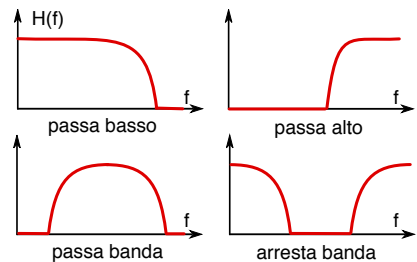
In tutti i casi è possibile svolgere *l'analisi* del circuito e pervenire⁴ all'espressione di una *funzione di trasferimento* razionale del tipo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^M a_i s^i}{\sum_{j=0}^N b_j s^j} \quad (5.1)$$

(in cui $M < N$), definita su di un piano complesso $s = \sigma + j2\pi f$, e ponendo $s = j2\pi f$ si ottiene la risposta in frequenza⁵ $H(f) = H(s = j2\pi f)$. Il grado N del denominatore di (5.1) (uguale al numero delle sue radici o *poli*) definisce *l'ordine* del filtro, ed è legato sia alla sua complessità realizzativa, sia alla rapidità di variazione della $H(f)$.

Tipo di polinomio e di filtro Lo spazio di progetto del filtro viene delimitato vincolando i polinomi $N(s)$ e $D(s)$ ad appartenere ad una delle *famiglie* dette di *Bessel*, di *Butterworth*, di *Chebyshev* o di *Cauer* (o filtri ellittici)⁶, che essenzialmente differiscono tra loro per la posizione delle radici del polinomio nel piano s ; la figura 5.1 mostra il modulo della risposta in frequenza $H(f)$ di un filtro *passa-basso* ottenibile nei diversi casi per uno stesso ordine $N = 5$.

Per ogni famiglia esistono *tabelle* di coefficienti *precalcolati* per diversi valori di N e che danno luogo ad un filtro *passo-basso prototipo* ovvero con frequenza di taglio (vedi sotto) *unitaria*, dai quali si ottengono (mediante operazioni di cambio di variabile) i nuovi coefficienti per frequenze di



²Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Giratore>

³Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Filter_\(signal_processing\)#Technologies](https://en.wikipedia.org/wiki/Filter_(signal_processing)#Technologies)

⁴Ad esempio, applicando la trasformata di Laplace alle equazioni differenziali che descrivono la relazione ingresso-uscita di un circuito RLC.

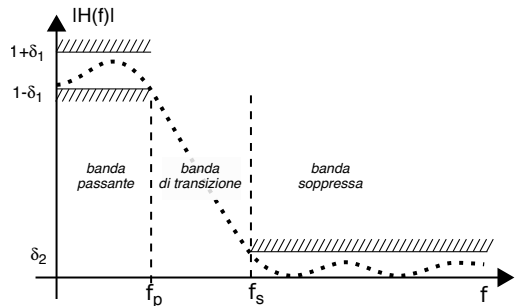
⁵Difatti se $s = j2\pi f$ la definizione di trasformata di Laplace $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$ diviene identica a quella di Fourier, ed equivale a calcolare la $H(s)$ lungo l'asse immaginario. Questa equivalenza è valida solo se il filtro è *stabile*, che nel dominio di Laplace equivale a richiedere che tutti i poli di $H(s)$ siano a *sinistra* di tale asse.

⁶Per approfondimenti, si può consultare <http://ens.di.unimi.it/dispensa/cap3.pdf>, <http://www.diegm.uniud.it/~bernardi/Didattica/Sis/Lucidi/dispensa-analogici.pdf> e https://en.wikipedia.org/wiki/Network_synthesis_filters.

taglio qualsiasi e per filtri con altro tipo di banda passante, ossia passa-alto, passa-banda e arresta-banda (o *notch*)⁷; gli ultimi due casi sono inoltre realizzabili anche rispettivamente come cascata o parallelo di un passa-alto più un passa-basso, con frequenze di taglio opportune.

Specifiche di progetto, ordine del filtro e scelta del polinomio L'ordine del filtro viene individuato come quello per il quale il modulo della risposta in frequenza $|H(f)|$ (o meglio, il suo quadrato) associata al polinomio prescelto rientra all'interno

della *maschera* definita da uno *schema di tolleranza* del tipo⁸ mostrato nella figura a lato. La specifica è tanto più stringente quanto più $|H(f)|$ varia rapidamente, cosa possibile solo aumentando l'ordine N . Ma non tutti i polinomi si comportano allo stesso modo, anzi, come evidente guardando la fig. 5.1 da sin. a destra, a parità di ordine alcuni permettono transizioni assai più rapide rispetto ad altri. D'altra parte per molte applicazioni è anche necessario garantire una buona *linearità di fase* (pag. 66, § 8.2.2) da parte del filtro, ma in linea generale questa seconda esigenza è incompatibile con una elevata *selettività* (vedi sotto) del filtro. In particolare i filtri di *Bessel*⁹ sono gli unici ad esibire una fase lineare, ma decadono lentamente con la frequenza; per gli altri tipi di fig. 5.1 la linearità di fase peggiora all'aumentare della selettività, specie in prossimità della frequenza di taglio. Quindi in definitiva la scelta del polinomio viene effettuata in base alla specifica sulla fase, e l'ordine N del filtro determinato in base alla maschera di attenuazione.



La maschera di tolleranza è definita da uno schema di tolleranza del tipo⁸ mostrato nella figura a lato. La specifica è tanto più stringente quanto più $|H(f)|$ varia rapidamente, cosa possibile solo aumentando l'ordine N . Ma non tutti i polinomi si comportano allo stesso modo, anzi, come evidente guardando la fig. 5.1 da sin. a destra, a parità di ordine alcuni permettono transizioni assai più rapide rispetto ad altri. D'altra parte per molte applicazioni è anche necessario garantire una buona *linearità di fase* (pag. 66, § 8.2.2) da parte del filtro, ma in linea generale questa seconda esigenza è incompatibile con una elevata *selettività* (vedi sotto) del filtro. In particolare i filtri di *Bessel*⁹ sono gli unici ad esibire una fase lineare, ma decadono lentamente con la frequenza; per gli altri tipi di fig. 5.1 la linearità di fase peggiora all'aumentare della selettività, specie in prossimità della frequenza di taglio. Quindi in definitiva la scelta del polinomio viene effettuata in base alla specifica sulla fase, e l'ordine N del filtro determinato in base alla maschera di attenuazione.

Frequenza di taglio, selettività e fattore di qualità Sono parametri che descrivono un filtro in modo grossolano ma indicativo. La frequenza di taglio f_T è quella per la quale

$$|H(f_i)|^2 = \frac{1}{2} |H(f)|_{Max}^2 \quad (5.2)$$

e dunque individua una sorta di *frontiera* tra la banda passante e quella soppressa. La *selettività* di un passa basso è misurata dal rapporto

$$k = \frac{f_p}{f_s} \leq 1$$

⁷Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Prototype_filter

⁸La descrizione della maschera in figura avviene nei termini della specifica di

- una *banda passante* $f < f_p$ che individua la regione di frequenze da lasciar passare;
- il valore percentuale δ_1 entro cui $H(f)$ può oscillare nella banda passante;
- una *banda soppressa* $f > f_s$ in cui vorremmo che le corrispondenti componenti frequenziali in ingresso fossero attenuate di almeno il $\delta_2\%$ rispetto a quelle della banda passante;
- una *banda di transizione* $f_s - f_p$ in cui la risposta in frequenza varia;
- se sia richiesta o meno al filtro la proprietà di *linearità di fase* (vedi § 13.1.3).

⁹Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_filter

(l'inverso per un passa-alto) ed è tanto più grande quanto meno estesa è la regione di transizione. Nel caso di un passa-banda centrato in f_0 il filtro può inoltre essere caratterizzato nei termini del suo *fattore di qualità*

$$Q = \frac{f_0}{B}$$

in cui $B = f_{T_2} - f_{T_1}$ è la banda compresa tra le due frequenze di taglio inferiore e superiore; Q rappresenta pertanto quanto il filtro è *stretto* attorno alla sua risonanza, ed il suo inverso B/f_0 è chiamato *banda frazionaria*.

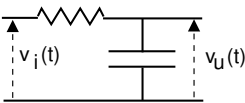
Realizzazione del filtro Mentre i filtri di Bessel, Butterworth e Chebyshev-I sono filtri a soli poli, quelli di Chebyshev-II ed Ellittici possiedono anche zeri. Ma in entrambi i casi una volta noti i coefficienti, la (5.1) si riscrive in forma fattorizzata¹⁰ $H(s) = \prod_{j=1}^{N/2} H_j(s)$ con ogni termine $H_j(s)$ che presenta una coppia di poli coniugati e che corrisponde ad un circuito risonante del secondo ordine o *cella circuitale*¹¹, producendo il massimo per $|H_i(j2\pi f)|^2$ alla frequenza di risonanza f_0^i . Ponendo le diverse celle *in cascata* si ottiene così la $H(f)$ che soddisfa i requisiti stabiliti dallo schema di tolleranza.

Nonostante quanto discusso appaia direttamente applicabile al solo caso di segnale analogico, al § 5.3 mostreremo come i risultati ottenuti siano applicabili anche al caso di segnali numerici, dato che esistono tecniche (basate su cambi di variabile che *mappano* il semipiano sinistro della variabile s all'interno del *cerchio unitario* del piano z) che permettono di passare da una $H(s)$ ad una $H(z)$, e di lì ad una realizzazione del filtro in forma *numerica*.

5.1.1 Filtro analogico ad un polo

A titolo di esempio esemplificativo di quanto fin qui illustrato, occupiamoci del più semplice tipo di filtro analogico, costituito dal partitore RC rappresentato alla figura seguente, e che realizza una funzione di passa-basso¹².

Considerando la tensione $v_i(t)$ come il segnale di ingresso al filtro, mostriamo che la corrispondente uscita $v_u(t)$ può essere espressa come convoluzione tra $v_i(t)$ ed una risposta impulsiva



$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{con } t \geq 0 \quad (5.3)$$

L'analisi del circuito porta infatti¹³ ad una espressione per la risposta in frequenza pari

¹⁰Un polinomio $P(s) = \sum_{j=0}^N b_j s^j$ si azzera per gli N valori $s = \beta_j$, noti come con gli zeri di $P(s)$. Lo stesso polinomio può quindi essere scritto come $P(s) = \prod_{j=1}^N (s - \beta_j)$, oppure raggruppando gli zeri a coppie (eventualmente coniugate) si ottiene uno sviluppo in termini di secondo grado $P(s) = \prod_{j=1}^{N/2} (s^2 + c_j s + d_j)$ a cui, se N è dispari, va aggiunto un fattore di primo grado.

¹¹Tradizionalmente di tipo RLC, oppure realizzata mediante amplificatori differenziali.

¹²Mnemonicamente possiamo ricordare il passa-basso come quello "con il condensatore *in basso*"; d'altra parte un filtro RC passa-alto presenta la posizione di R e C scambiate, ovvero con C *in alto*.

¹³Sappiamo che le tensioni ai capi di R e C valgono $v_R(t) = R \cdot i(t)$ e $v_C(t) = v_u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ che, trasformate con Fourier forniscono $V_R(f) = R \cdot I(f)$ e $V_u(f) = \frac{1}{C} \frac{1}{j2\pi f} I(f)$. Per la legge di Kirchoff

a

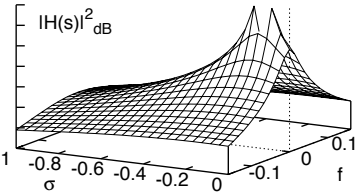
$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} \quad (5.4)$$

di cui la (5.3) è l'antitrasformata¹⁴. Estendendo questo risultato al dominio di Laplace si ottiene

$$H(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

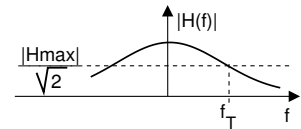
Pertanto, $H(s)$ presenta un polo in $s = -\frac{1}{RC}$, e dunque risulta $H(s)|_{s=-\frac{1}{RC}} = \infty$.

A lato è raffigurato l'andamento di $10 \log_{10} |H(s)|^2$ calcolato per un valore $RC = 8$. Come evidente, $|H(s)|^2$ può essere pensata come una sorta di *cono vulcanico* attorno al polo sito in $1/RC = 0.125$ e la cui sezione, ottenuta dall'intersezione con un piano verticale passante per l'asse $j2\pi f$, individua la risposta in frequenza $H(f) = H(s = j2\pi f)$. Come si vede dalla figura, $H(f)$ risulta di tipo passa basso, con fianchi tanto più ripidi quanto più il polo è vicino all'origine.



Frequenza di taglio Nel caso del filtro RC risulta che $|H_{Max}| = H(0) = 1$, ed esprimendo il modulo della (5.4) nella forma¹⁵

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}}$$



si pone in evidenza che $f_T = \frac{1}{2\pi RC}$ rappresenta proprio la frequenza di taglio: infatti, $|H(f_T)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cogliamo l'occasione per notare che risultando (eq.- (5.2)) $|H(f_T)|^2 = \frac{1}{2} H_{Max}^2$ si ottiene¹⁶ che $|H(f_T)|^2|_{dB} = H_{Max}^2 (dB) - 3$; per questo la frequenza di taglio è indicata anche come *frequenza a 3 dB*.

5.2 Filtri digitali

Con questo termine indichiamo una classe di filtri definita mediante uno *schema computazionale* anziché circuitale, espresso unicamente nei termini di unità elementari di elaborazione *prodotto, somma e ritardo* (§ 7.5) che (in combinazione tra loro) producono effetti filtranti sul segnale in transito. Essi possono rappresentare un modello di cause

alle maglie si ha $V_i(f) = V_R(f) + V_u(f) = R \cdot I(f) + \frac{1}{j2\pi fC} I(f)$; la risposta in frequenza sarà pertanto

$$H(f) = \frac{V_u(f)}{V_i(f)} = \frac{\frac{1}{j2\pi fC} I(f)}{R \cdot I(f) + \frac{1}{j2\pi fC} I(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

¹⁴Infatti

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau - j2\pi f t} dt = \frac{1}{\tau} \frac{e^{-t/\tau - j2\pi f t}}{-1/\tau - j2\pi f} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1/\tau + j2\pi f} = \frac{1}{1 + j2\pi f \tau}$$

¹⁵Ricordiamo che il modulo è il rapporto dei moduli, e quello del denominatore è $\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2}$ in cui dalla (5.4) $\mathfrak{X} = 1$ e $\mathfrak{Y} = 2\pi fRC$.

¹⁶Vedi § 8.1

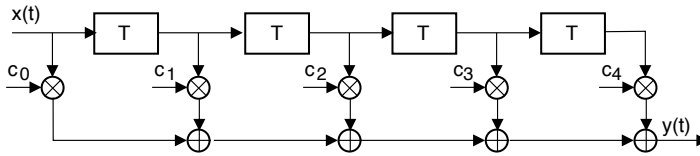


Figura 5.2: Schema simbolico di un filtro trasversale di ordine $N = 5$

naturali¹⁷, oppure si può progettare una specifica architettura in modo da combinare questi elementi per ottenere l'effetto desiderato. Per questa classe di filtri l'integrale di convoluzione si riduce ad una sommatoria, e sebbene l'analisi che segue si basi su segnali *tempo-continui*, i filtri digitali sono di particolare rilievo perché permettono di svolgere le operazioni di filtraggio operando direttamente sui *campioni* dei segnali (vedi § 4.6.1), e dunque possono essere realizzati via software o hardware¹⁸.

5.2.1 Filtro trasversale

Prende questo nome dal modo in cui è rappresentato lo schema di calcolo, vedi la fig. 5.2, in cui l'uscita $y(t)$ (in basso a destra) è ottenuta sommando valori di ingresso $x(t)$ (in alto a sinistra) presi (grazie alla cascata di ritardi) ad istanti $t = nT$ con $n = 0, 1, \dots, N$, ognuno moltiplicato per un diverso coefficiente c_n , ovvero

$$y(t) = \sum_{n=0}^N c_n x(t - nT) \quad (5.5)$$

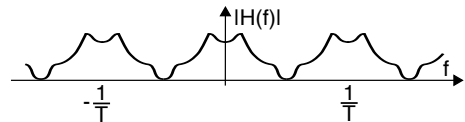
Analisi Se poniamo in ingresso $x(t) = \delta(t)$, l'uscita $y(t)$ riprodurrà la *risposta impulsiva* del filtro, pari a

$$h(t) = \sum_{n=0}^N c_n \delta(t - nT) \quad (5.6)$$

costituita da $N + 1$ copie dell'impulso posizionate in $t = nT$ e con area pari ai rispettivi coefficienti c_n o *rubinetti*¹⁹ del filtro. All'intero N viene conferito il senso di *ordine* del filtro, ed essendo finito, permette di classificare questa architettura come un filtro FIR (*finite impulse response*)²⁰. Applicando le relazioni note della trasformata, è facile valutare la risposta in frequenza corrispondente alla $h(t)$ (5.6), ovvero

$$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \sum_{n=0}^N c_n e^{-j2\pi f nT} \quad (5.7)$$

Come esemplificato dalla figura a lato, $H(f)$ risulta periodica (in frequenza) con periodo $F = \frac{1}{T}$: infatti tutti gli esponenziali $e^{-j2\pi f nT}$



¹⁷Ad esempio l'acustica di un ambiente (del bagno di casa, come di un teatro) è il risultato dei contributi legati alle diverse riflessioni dei suoni su pareti ed altri elementi, ognuna più o meno attenuata, e con un diverso ritardo di propagazione tra sorgente e ascoltatore. Un fenomeno simile avviene anche alle onde radio di WiFi e telefonia mobile, vedi § 20.3.3.

¹⁸Il tema delle realizzazioni numeriche dei filtri digitali è approcciata al § 5.3, e citiamo come fonte di approfondimento <http://www.dspsguide.com/ch14/6.htm>.

¹⁹Uso questo termine per tradurre il termine *taps* (rubinetti) utilizzato nei testi inglesi per indicare i coefficienti c_n : come se i sommatore in basso in fig. 5.2 raccogliessero l'acqua (o la birra!) *spillata* dai rubinetti c_n , e proveniente dai *serbatoi di ritardo* T . La cosa buffa è che può accadere di trovare in letteratura riferimenti ai rubinetti o *taps* come a dei... *tappi*!

²⁰Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response

della sommatoria (5.7) presentano la stessa periodicità.

Sintesi Al § 4.4 abbiamo già incontrato segnali con spettri periodici: la trasformata discreta di Fourier DTFT (eq. (4.8)) $H^\bullet(f)$ calcolata a partire da un segnale campionato $h^\bullet(t)$ espresso nella forma (5.6) ha esattamente l'aspetto della (5.7), che quindi riscriviamo come

$$H(f) = H^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

ovvero come risposta in frequenza *periodizzata* del filtro $G(f)$ limitato nella banda $(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T})$ che intendiamo ottenere. A questo punto i coefficienti c_n che definiscono $h(t)$ altro non sono che quelli (*nel tempo*) dello sviluppo in serie di Fourier di $H^\bullet(f)$ (periodica *in frequenza* con periodo $1/T$), ovvero (eq. (4.9))

$$c_n = T \int_{-1/2T}^{1/2T} G(f) e^{j2\pi f n T} df \quad (5.8)$$

Approssimazione Ora però sorgono due problemi. Il primo è che la (5.8) è valida con $n = -\infty, \dots, \infty$, mentre noi vorremmo solamente $N + 1$ coefficienti c_n . A questo c'è rimedio a patto di accettare una approssimazione, *finestrando*²¹ la sequenza dei c_n e tenendo così solo quelli per $n = -N/2, \dots, N/2$: ovviamente più è piccolo N , e peggiore sarà l'approssimazione $\hat{H}(f)$ di $H(f)$. Il secondo problema è che nella (5.7) ed in fig. 5.2 i coefficienti hanno indici ≥ 0 , e non negativi, come deve essere per ottenere un sistema *fisicamente realizzabile* (pag. 26). A ciò si risponde eseguendo *uno scorrimento* a destra dei c_n di $N/2$ posizioni, assegnando $c_{n'} = c_{n+N/2}$ in modo da avere $n' \in [0, \dots, N]$: questo corrisponde ad introdurre un ritardo nell'uscita pari a $\frac{N}{2}T$, ottenendo così un segnale $\tilde{y}(t) = y\left(t - \frac{N}{2}T\right)$.

Fase lineare Un vantaggio della approssimazione ora descritta è la possibilità di ottenere facilmente un filtro detto a *fase lineare*, ovvero per cui $\arg\{H(f)\} = e^{-j2\pi f \tau}$ e che dunque non presenta distorsione di fase (§ 13.1.3). Infatti scegliendo $H(f)$ *reale pari* si ottengono valori c_n reali pari (vedi § 2.2.1.1), e lo scorrimento per produrre i $c_{n'}$ è l'unico contributo alla fase della $\tilde{H}(f) = \hat{H}(f) e^{-j2\pi f \frac{N}{2}T}$ risultante. In definitiva, operare in questo modo determina valori dei c_n *simmetrici* rispetto ad $N/2$.

5.2.2 Realizzazione numerica del filtro trasversale

Lo schema di fig. 5.2 è completamente *analogico*, nel senso che sia $x(t)$ che $y(t)$ sono definiti per ogni t . D'altra parte, la presenza degli N ritardi T *tutti uguali* permette di derivarne uno schema *di calcolo* operante su segnali campionati con frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$. A questo scopo è sufficiente scegliere $T = T_c = \frac{1}{f_c}$ e calcolare $y(t)$ ai soli istanti $t = nT$, così come *caricare la memoria* del filtro con i soli campioni $x(nT)$: infatti, al § 4.6.1 si

²¹Ricordando i risultati del § 3.8.4, a seguito della finestratura la reale risposta in frequenza risulterà $\hat{H}(f) = H(f) * W(f)$. Per questo, si sono individuate alcune finestre *migliori* della rettangolare, vedi ad es. <http://www.labbookpages.co.uk/audio/firWindowing.html>. E' chiaro che adottando invece una finestra rettangolare, la finestratura equivale a calcolare la (5.8) solo per gli indici n necessari; l'effetto di tale troncamento sarà la comparsa di *oscillazioni* in prossimità della regione di transizione di $H(f)$, del tutto analoghe a quelle evidenziate al § 2.2.2.

mostra che se due segnali $x(t)$ ed $h(t)$ sono limitati in una banda W , e se $T_c < 1/2W$ la convoluzione discreta

$$y_k = T_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n} \tag{5.9}$$

tra i relativi campioni x_n ed h_n produce una terza sequenza y_k da cui, applicando il teorema del campionamento, si ottiene lo stesso risultato della convoluzione analogica $y(t) = x(t) * h(t)$.

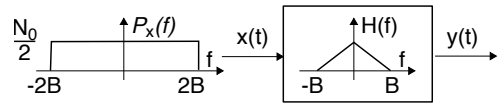
Se ora limitiamo l'indice n tra zero ed N (la durata di h_n), la (5.9) equivale alla (5.5) calcolata per $t = kT_c$ ovvero $y(kT_c) = \sum_{n=0}^N c_n x((k-n)T_c)$, dopo aver posto

$$c_n = T_c h_n$$

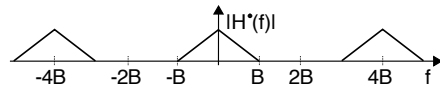
Sebbene la condizione di limitatezza *temporale* dovrebbe escludere quella di limitazione *in banda*, i valori h_n possono essere associati in prima approssimazione ai *campioni* (presi per $t = nT_c$) della risposta impulsiva $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$ corrispondente alla $H(f)$ desiderata²². Ovviamente, i campioni (di $x(t)$, $y(t)$ e $h(t)$) devono essere presi ad intervalli $T = T_c \leq 1/2W$, in cui ora W è la *massima frequenza massima* tra $x(t)$ ed $h(t)$.

Esempio Si desidera realizzare un filtro trasversale che approssimi una $H(f) = \text{tri}_{2B}(f)$, considerando che al suo ingresso è posto un processo bianco

$x(t)$ con densità di potenza $P_x(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{4B}(f)$.

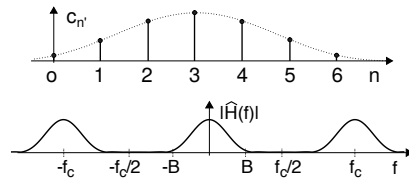


Per realizzare il filtro numerico operante su dati campionati occorre adottare una frequenza di campionamento $f_c \geq 2W = 4B$, e dunque un ritardo tra gli stadi del FIR pari a $T_c \leq 1/4B$, in modo che la corrispondente $H^*(f)$ presenti la periodicità $f_c = 4B$ mostrata in figura.



In base alle considerazioni precedenti, dopo aver ottenuto $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = B \text{sinc}^2(tB)$, ne calcoliamo i campioni per $t = nT_c = n/4B$ ovvero $h_n = B \text{sinc}^2(\frac{n}{4})$, da cui otteniamo $c_n = T_c h_n = \frac{1}{4} \text{sinc}^2(\frac{n}{4})$. A questo punto non resta che *troncare* la serie a pochi termini centrati in zero (ad es. con $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ tutti i campioni di $h(t)$ sono prelevati dal *lobo principale* del sinc^2) accettando l'approssimazione conseguente, e *traslarli a destra* in modo da ottenere un filtro causale con sette rubinetti, nell'esempio

$c_{n'}$ con $n' = 0, 1, \dots, 6$, con coefficienti simmetrici rispetto ad $n = 3$, e dunque il filtro è a *fase lineare*. A lato sono mostrati i coefficienti ottenuti, assieme alla $\hat{H}(f)$ risultante dalla loro finestrata.

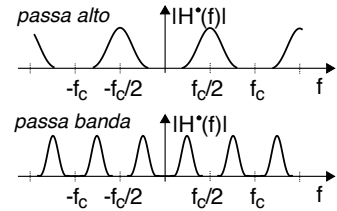


Filtro a media mobile Quando i coefficienti c_n sono tutti uguali tra loro e con valore pari ad $\frac{1}{N+1}$ le operazioni condotte dal filtro sono dette di *media mobile* (da *moving average* o MA) dato che di fatto si calcola una media aritmetica tra gli ultimi

²²In pratica, questa $h(t)$ è quella che dà origine alla $h^*(t) = h(t) \cdot \sum_{n=0}^N \delta(t - nT)$ espressa dalla (5.6), vedi anche nota 30 a pag. 102.

valori di ingresso, ovvero $y_k = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N x_{k-n}$. E' il metodo comunemente usato per *smussare* serie temporali discrete, come per es. temperature (giornaliere od orarie) o quotazioni dei titoli di borsa. Corrisponde ad un filtro tempo-continuo la cui $h(t)$ è una $rect_{(N+1)T_c}(t)$, ha un effetto passa-basso, e la relativa $H(f)$ è ottenuta a pag. 133.

Filtro passa-alto e passa-banda Il filtro trasversale può essere configurato come un *passa-alto* considerando un segnale in ingresso limitato in banda $W = \frac{f_c}{2} = \frac{1}{2T}$ ed impostando la $H^*(f)$ in modo da tener conto della sua periodicità in frequenza pari ad f_c , come mostrato in figura. Può altresì divenire un filtro *passa-banda* sempre per il medesimo tipo di segnale²³, con il vincolo di lasciar passare le frequenze centrate attorno ad $\frac{f_c}{4}$.



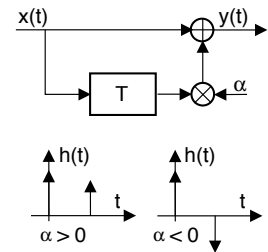
Occupiamoci ora di un paio di architetture particolarmente semplici: la prima è ancora un FIR ma con $N = 1$, mentre la seconda introduce la classe di filtri di tipo *infinite impulse response* o IIR. Anche se per entrambi è chiaramente possibile realizzare una implementazione numerica qualora il ritardo $T = 1/f_c$ sia tale da permettere il campionamento del segnale in ingresso, qui analizziamo solo gli aspetti tempo-continui.

5.2.3 Filtro trasversale del primo ordine

Con $N = 1$ il filtro di fig. 5.2 può essere ridisegnato come mostrato a lato, avendo posto $c_0 = 1$ e $c_1 = \alpha$. Ad esso corrisponde una risposta impulsiva

$$h(t) = \delta(t) + \alpha \delta(t - T) \tag{5.10}$$

il cui andamento è mostrato a fianco per i casi $\alpha \geq 0$, ed a cui corrisponde²⁴ una risposta in frequenza pari a $H(f) = 1 + \alpha e^{-j2\pi fT}$. Da questa espressione è facile ottenere²⁵ quella



²³A prima vista la realizzazione *numerica* del passa-banda *non sembrerebbe possibile*, dato che per ottenere una $H^*(f)$ con periodo in frequenza di $f_c/2$ come in figura il ritardo T tra i rubinetti dovrebbe essere $T = 2/f_c$ cioè il doppio del massimo periodo di campionamento $T_c = 1/f_c$ necessario ad un segnale di ingresso con frequenza massima $f_c/2$. Ma in realtà è molto semplice: basta che il filtro FIR adotti un ritardo $T = T_c = 1/f_c$ in modo da soddisfare il requisito per il segnale in ingresso, ma *raggruppi* i ritardi *a due a due*, ossia inserisca un rubinetto ogni due ritardi.

²⁴In questo caso $H(f)$ risulta a simmetria coniugata ($H(f) = H^*(-f)$), ma è complessa. Pertanto i coefficienti c_k ottenibili dalla (5.8) sono reali, ma non necessariamente pari. Svolgendo i calcoli:

$$c_k = T \int_{-1/2T}^{1/2T} (1 + \alpha e^{-j2\pi fT}) e^{j2\pi f k T} df = T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi f k T} df + \alpha T \int_{-1/2T}^{1/2T} e^{j2\pi f(k-1)T} df$$

Il primo integrale è nullo per $k \neq 0$, mentre il secondo per $k \neq 1$, in quanto le funzioni integrande hanno media nulla sull'intervallo $1/T$; pertanto $c_0 = 1$ e $c_1 = \alpha$, esattamente come è definita la (5.10).

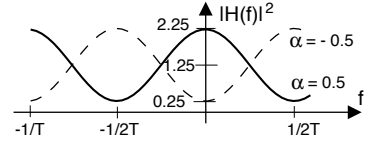
²⁵Per ogni valore di f , $H(f)$ è pari ad un valore complesso z con $H(f) = z = a + jb$, e dunque il suo quadrato è pari a $|z|^2 = a^2 + b^2$, in cui a e b sono le parti reale ed immaginaria di $H(f)$, pari rispettivamente a $1 + \alpha \cos 2\pi fT$ e $-\alpha \sin 2\pi fT$.

del guadagno di potenza $|H(f)|^2$, che risulta

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= (\Re \{H(f)\})^2 + (\Im \{H(f)\})^2 = (1 + \alpha \cos 2\pi fT)^2 + (\alpha \sin 2\pi fT)^2 = \\ &= 1 + 2\alpha \cos 2\pi fT + \alpha^2 (\cos^2 2\pi fT + \sin^2 2\pi fT) = \\ &= 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi fT \end{aligned}$$

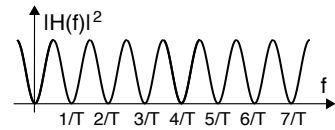
La figura che segue mostra l'andamento di $|H(f)|^2$ per due valori di $\alpha = \pm 0.5$, di cui a pag. 238 si trova la rappresentazione in dB oltre che la risposta di fase; questo schema verrà inoltre ripreso al § 20.3.3 come modello della presenza di una *eco* tra sorgente e destinatario.

Prima di approfondire due applicazioni del filtro, notiamo che nell'intervallo $|f| < \frac{1}{2T}$ la $|H(f)|^2$ può comportarsi sia da passa-basso che da passa-alto, in funzione del segno di α .



Differenziatore Ponendo $\alpha = -1$ nella (5.10) si ottiene un *differenziatore numerico*, dato che in tal caso la sequenza di uscita $y_n = x_n - x_{n-1}$ rappresenta la *differenza finita* di quella di ingresso. Nel caso tempo-continuo se oltre a porre $\alpha = -1$, il valore di T diviene piccolo al punto da poter considerare $T \rightarrow 0$, $h(t)$ inizia ad approssimare un *doppio* (§ 3.6), e dunque (a parte un fattore di scala) l'uscita è *proprio la derivata* dell'ingresso.

Filtro a pettine Sempre nel caso $\alpha = -1$ e con un segnale di ingresso tempo-continuo con banda $W \gg 1/T$ il filtro è in grado di rimuovere una *componente periodica* di periodo T , poiché in tal caso $|H(f)|^2 = 0$ con $f = n/T$, in corrispondenza delle armoniche. Un filtro del genere è detto *filtro a pettine*²⁶ o COMB FILTER.



Esempio Un segnale vocale viene acquisito su di un elicottero e presenta un forte disturbo additivo periodico legato al rumore del motore e delle pale, che si desidera eliminare adottando un filtro a pettine, implementato come un FIR del primo ordine.

1. Considerando un regime di crociera di 300 giri/minuto, determinare l'espressione della risposta impulsiva del filtro;
2. volendo implementare il filtro per via numerica, e considerando una frequenza di campionamento di 16 KHz e campioni quantizzati a 16 bit, valutare la memoria in Kbyte necessaria a realizzare il filtro.

Risposta 300 giri/min equivalgono a $300/60 = 5$ giri/sec, ovvero ad una fondamentale di 5 Hz, ed un ritardo del filtro pari a $T = 1/5 = 200$ msec. 1) - Per ottenere $|H(f)|^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\pi fT = 0$ per $f = nT$ occorre porre $\alpha = -1$, dunque deve risultare $h(t) = \delta(t) - \delta(t - 0.2)$. 2) - L'implementazione numerica del filtro consiste nel sottrarre ad ogni campione di ingresso quello pervenuto 200 msec prima, e dunque occorre

²⁶Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Filtro_comb

adottare un *buffer circolare*²⁷ con memoria sufficiente ad accogliere $f_c [\frac{\text{campioni}}{\text{sec}}] \cdot T [\text{sec}] = 16 \cdot 10^3 \cdot 0.2 = 3200$ campioni. Essendo infine necessari due byte per memorizzare i 16 bit di ogni campione, occorrono 6400 bytes.

5.2.4 Filtro a risposta impulsiva infinita (IIR) del primo ordine

La caratteristica più importante che differenzia lo schema di calcolo disegnato appresso da quello precedente è la presenza di un *feedback* all'indietro, per cui il valore in uscita dipende, oltre che dall'ingresso, anche dalle *uscite precedenti*. Per questo motivo la corrispondente risposta impulsiva (graficata a lato per i casi $\alpha \leq 0$) ha una *durata infinita*²⁸, ed è pari a

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT) \quad (5.11)$$

Applicando le consuete regole di trasformazione otteniamo l'espressione della risposta in frequenza come $H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j2\pi f n T}$ che fortunatamente converge ad una espressione più compatta, grazie all'utilizzo del risultato noto per la serie geometrica²⁹ $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n = \frac{1}{1-\beta}$ con $|\beta| < 1$, che permette di scrivere

$$H(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j2\pi f T})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi f T}} \quad (5.12)$$

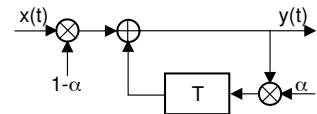
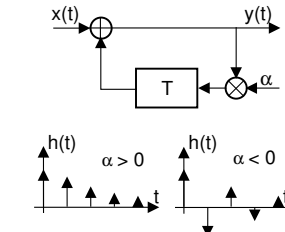
Nel caso in cui $|\alpha| > 1$ il filtro diviene *instabile*, dato che qualunque disturbo infinitesimo in ingresso produce una uscita che via via si amplifica in modo esponenziale. Per ciò che riguarda il guadagno di potenza $|H(f)|^2$, passaggi simili a quelli della nota 25 portano ad ottenere

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos 2\pi f T)^2 + (\alpha \sin 2\pi f T)^2} = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\pi f T}$$

Applicazioni In fig. 5.3 è mostrato l'andamento del guadagno di potenza in decibel, ovvero $10 \log_{10} |H(f)|^2$, calcolato per $T = 1$ e diversi valori di α , positivi e negativi. Osserviamo che solo con $0 < \alpha < 1$ si può realizzare un passa-basso, e solo con $-1 < \alpha < 0$ un passa-alto. Notiamo inoltre che più $|\alpha|$ si avvicina ad uno, e più aumenta il divario tra il guadagno in banda passante e quello in banda attenuata (circa 20 dB per $|\alpha| = .8$), riuscendo così a realizzare un filtro *a banda stretta*, detto anche *risuonatore*. Osserviamo infine che il caso $\alpha = 1$ corrisponde ad avere un *integratore perfetto* che ad esempio produce una rampa in uscita, se in ingresso c'è un gradino.

Media mobile esponenziale Una variante dell'IIR di primo ordine si ottiene scrivendo la relazione ingresso-uscita (vedi figura) come

$$y(t) = \alpha y(t - T) + (1 - \alpha) x(t) \quad (5.13)$$



²⁷Con questa espressione si intende un array lineare di dimensione N ed un puntatore che si incrementa modulo N e che ne indicizza l'ultima posizione. Dopo aver utilizzato l'ultimo campione, questo viene sovrascritto da quello nuovo, ed il puntatore incrementato.

²⁸In questo caso si parla di filtro *ricorsivo*, o filtro *infinite impulse response* (IIR).

²⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_geometrica

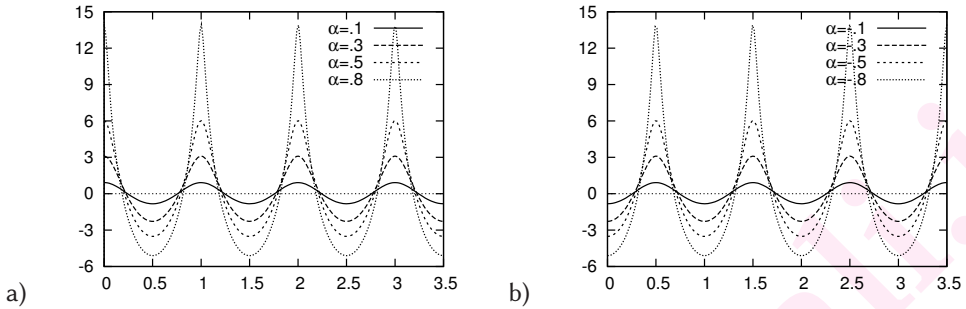
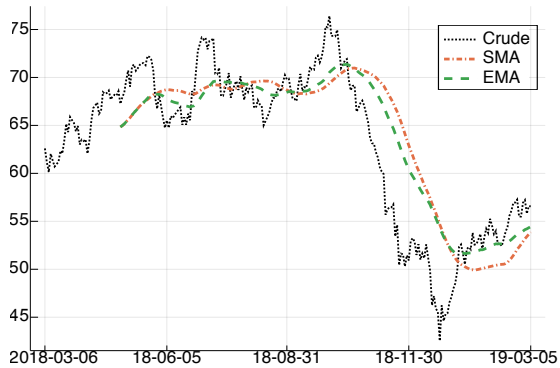


Figura 5.3: Guadagno di potenza in dB di un filtro IIR di primo ordine con ritardo $T = 1$:
 a) $0 < \alpha < 1$, b) $-1 < \alpha < 0$

a cui corrisponde una risposta impulsiva della forma $h(t) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \delta(t - nT)$, che ha il vantaggio rispetto alla (5.11) di presentare guadagno unitario a frequenza zero³⁰, ovvero in presenza di un ingresso costante (a parte un transitorio) in uscita si troverà la stessa costante. Impostando $0 < \alpha < 1$ il filtro si comporta come un passa basso, e ciò permette di usare la (5.13) per eseguire una operazione di media mobile detta *esponenziale*³¹ ed ottenere valori y *depurati* dalle variazioni più o meno casuali sovrapposte alla grandezza x .

Un tipico contesto di utilizzo è nel campo dei mercati finanziari, in cui si opera su di una sequenza tempo-discreta x_n riscrivendo³² la (5.13) come $y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha) x_n$. La risultante sequenza y_n viene allora indicata come EMA- N ³³, con N che rappresenta il numero *medio* di valori precedenti su cui è operata la media. In realtà come sappiamo l'IIR opera su di una memoria infinita, ma il valore di N serve a porre in relazione EMA- N con SMA³⁴ di lunghezza N : infatti scegliendo un valore $\alpha = \frac{N-1}{N+1}$ si ottiene la stessa *età media* dei valori di ingresso utilizzati. La fig. a lato mostra il confronto tra una SMA ed una EMA a parità di N . Dato che EMA attribuisce un peso maggiore ai valori di ingresso più recenti, viene spesso preferita alla SMA in quanto si dimostra *più reattiva* alle brusche variazioni di tendenza. Infine, notiamo che qualora si scelga di porre $\alpha = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$ la EMA- N può essere calcolata



³⁰Infatti la (5.12) valutata per $f = 0$ fornirebbe il valore $H(f = 0) = \frac{1}{1-\alpha}$

³¹In quanto gli ingressi ad n istanti precedenti hanno peso α^n che decresce esponenzialmente con l'età, vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_smoothing

³²In realtà quasi ovunque la (5.13) viene riscritta come $y_n = \beta x_n + (1 - \beta) y_{n-1}$, in cui $\beta = 1 - \alpha$.

³³Da *Exponential Moving Average*

³⁴Con SMA- N (*simple moving average*) si intende una media mobile eseguita da un filtro FIR di lunghezza N e coefficienti tutti uguali e pari ad $1/N$.

come $y_n = \alpha y_{n-1} + (1 - \alpha) x_n = \frac{N-1}{N} y_{n-1} + \frac{1}{N} x_n = \frac{(N-1)y_{n-1} + x_n}{N}$.

5.3 Filtri numerici

Affrontiamo³⁵ ora il tema di come passare dai concetti esposti al § 5.2 agli schemi di calcolo da adottare nel caso di una implementazione completamente numerica, associata all'elaborazione di dati campionati. Come descritto al § 5.2.2, i campioni y_k del risultato di una convoluzione $y(t) = x(t) * h(t)$ tra segnali limitati in banda $x(t)$ e $h(t)$ si ottengono mediante la convoluzione discreta (5.9)

$$y_k = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n x_{k-n}$$

equivalente a campionare l'uscita $y(t)$ di un filtro trasversale con coefficienti $c_n = T \cdot h_n$ proporzionali ai campioni h_n della risposta impulsiva $h(t)$ del filtro analogico di partenza. Anziché campionare l'uscita del filtro digitale, l'operazione di filtraggio viene implementata per via HW o SF in modo da eseguire direttamente la convoluzione discreta

```
x = randn(1,1000); # segnale di ingresso
Nx = 1000; # campioni di ingresso
h = [1 0.5 0.25 0.125 0.0625]; # coeff. filtro
Nc = 5; # numero coeff.
Ny = Nx+Nc-1; # campioni di uscita
y = zeros(1,Ny); # vettore di uscita
for k = 1:Ny # campioni di uscita
    for n = 1:Nc # convoluzione
        if ( (k-n+1)<=Nx && n<=k ) # controllo
            y(k) = y(k) + h(n)*x(k-n+1);
        endif
    end
end
```

$y_k = \sum_{n=0}^N h_n x_{k-n}$, come ad es. svolto dal codice Octave mostrato a sopra. Notiamo esplicitamente che nel filtraggio numerico viene ommesso il fattore $T = 1/f_c$, che è inserito autonomamente dal filtro di restituzione (eq. (4.3)) nel momento del passaggio da numerico ad analogico.

5.3.1 Sintesi FIR a partire dalla descrizione tempo continua

Acquisiamo innanzitutto due metodi per ricavare un insieme *finito* di coefficienti h_n per il filtro numerico, a partire dalla descrizione *analogica* del comportamento desiderato in termini di $h(t)$ o di $H(f)$.

Finestratura della risposta impulsiva In questo approccio i valori di h_n si ottengono campionando una versione *finestrata* $h_w(t) = h(t) \cdot w(t)$ della $h(t)$ desiderata, e quindi ritardando gli stessi al fine di ottenere un filtro causale, come discusso all'esempio di pag. 126. Come noto dal § 3.8.4, l'operazione di finestratura produce una risposta in frequenza per il filtro sintetizzato pari a $H_w(f) = H(f) * W(f)$, e dunque va posta particolare attenzione nella scelta della funzione finestra $w(t)$.

Oscillazione uniforme in frequenza E' una tecnica iterativa³⁶ volta a rendere *minimo il massimo* errore di approssimazione tra l'andamento desiderato per $|H(f)|$,

³⁵Senza pretesa di rigore e completezza, essendo questi argomenti trattati anche in diversi altri corsi.

³⁶Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Parks-McClellan_filter_design_algorithm

espresso nella forma di uno schema di tolleranza (vedi pag. 121), e l'andamento ottenibile esprimendo $|H(f)|$ come una combinazione di polinomi di Chebyshev³⁷. Il risultato è una $\hat{H}(f)$ che presenta oscillazioni ridotte ma a tutte le frequenze³⁸, mentre i coefficienti h_n si ottengono mediante DFT inversa (§ 4.5) della sequenza H_n ottenuta campionando $\hat{H}(f)$.

5.3.2 Trasformata zeta e filtraggio

Al § 4.5.1 abbiamo già discusso come una sequenza di campioni $x_n = x(t)|_{t=nT}$ di un segnale limitato in banda $W = \frac{1}{2T}$ possa essere descritta dalla sua *trasformata zeta*

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

e come calcolando quest'ultima per $z = e^{j\omega}$ si ottenga una rappresentazione spettrale

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n}$$

di $\{x_n\}$ che corrisponde alla periodizzazione della $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, in cui l'intervallo di frequenze $-\frac{f_c}{2} < f < \frac{f_c}{2}$ si mappa in quello $-\pi < \omega < \pi$, ovvero $f = \frac{\omega}{2\pi T}$.

Allo stesso modo si possono definire le trasformate zeta della sequenza di uscita da un filtro $Y(z) = \mathcal{Z}\{y_n\}$ e dei campioni della risposta impulsiva $H(z) = \mathcal{Z}\{h_n\}$ del filtro stesso, e dato che anche ora vale la corrispondenza tra convoluzione nel tempo e prodotto delle trasformate³⁹, si può scrivere

$$Y(z) = H(z) X(z) \quad (5.14)$$

in cui $H(z)$ è l'analogo della $H(s)$ (eq. (5.1)) tempo-continuo e per questo prende il nome di *funzione di trasferimento* tempo-discreto. Sostituendo $z = e^{j\omega}$ si ottiene la *risposta in frequenza* tempo-discreto (4.16) $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j\omega n}$ periodica in ω con periodo 2π , relativa alla sequenza risposta impulsiva h_n , e che corrisponde alla DTFT (§ 4.4) $H^\bullet(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j2\pi f n T}$ della stessa sequenza h_n qualora si ponga $\omega = 2\pi f T$, vedi anche la fig. 4.15 a pag. 110.

5.3.2.1 Filtri a risposta impulsiva finita

Affrontiamo la descrizione di un filtro FIR mediante la trasformata zeta rifacendoci dapprima al caso del filtro del primo ordine (§ 5.2.3) descritto da una $h(t) = \delta(t) + \alpha\delta(t - T)$, e consideriamo al suo ingresso una *sequenza impulsiva* $\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ al posto dell'impulso matematico $\delta(t)$. Il filtro è ora caratterizzato nei termini della *sequenza di risposta all'impulso* $h_n = \delta_n + \alpha\delta_{n-1}$ la cui trasformata zeta risulta⁴⁰

³⁷Vedi http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/courses/DSPDF/00700_OptimalFIR.pdf

³⁸Il filtro risultante è detto per questo *equiripple*.

³⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Trasformata_zeta

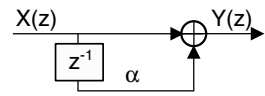
⁴⁰E' sufficiente applicare la definizione $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\delta_n + \alpha\delta_{n-1}) z^{-n} = 1 + \alpha z^{-1}$, dato che $\mathcal{Z}\{\delta_n\} = 1$ e che un ritardo di m indici ha trasformata

$$\mathcal{Z}\{x_{n-m}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{n-m} z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k-m} = z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} = z^{-m} X(z)$$

(si è posto $n - m = k$). In particolare, un ritardo unitario corrisponde al prodotto per z^{-1} della sequenza trasformata, e dunque $\mathcal{Z}\{\delta_{n-1}\} = z^{-1}$.

$$H(z) = 1 + \alpha z^{-1} \tag{5.15}$$

Allo schema computazionale di pag. 127 si affianca quindi quello *algoritmico* mostrato a lato, in cui il blocco z^{-1} rappresenta il ritardo di un campione, mentre il prodotto per α è ora raffigurato come una etichetta posta sull'arco da cui passa la sequenza in transito, cosicché possiamo scrivere



$$Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1} X(z) = (1 + \alpha z^{-1}) X(z)$$

ossia la (5.15) applicata alla (5.14). Estendendo ora la trattazione ad un generico filtro FIR di ordine N descritto da una $h_n = \sum_{k=0}^N a_k \delta_{n-k}$ otteniamo

$$H_{FIR}(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = a_0 \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{a_0} z^{-k} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 - c_n z^{-1}) \tag{5.16}$$

in cui gli N valori c_n rappresentano gli zeri⁴¹ (reali, od in coppie complesse coniugate) di $H(z)$.

Esercizio: media mobile E' il filtro numerico definito a pag. 126 come un *rect* discreto, ovvero con $h_n = 1$ per $n = 0, 1, \dots, N - 1$ e zero altrimenti. Tenendo conto che

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a} \tag{42}, \quad \text{si ottiene} \quad H_{MA}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

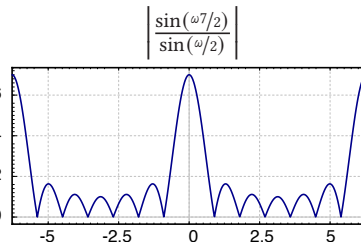
che calcolata per $z = e^{j\omega}$ fornisce

$$H_{MA}(\omega) = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2}} \cdot \frac{e^{j\omega N/2} - e^{-j\omega N/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = e^{-j\omega(N-1)/2} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$

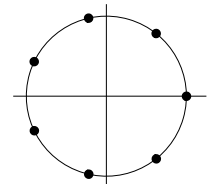
di cui il primo fattore è un termine di fase lineare mentre dal secondo se ne ricava il modulo

$$|H_{MA}(\omega)| = \left| \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} \right|$$

rappresentato in figura per $N = 7$, e che si dimostra



posizione degli zeri



periodico, con *sei zeri* equidistribuiti nell'intervallo $0 < \omega < 2\pi$. Infatti dall'espressione di $H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$ si ottengono *sette zeri* sul cerchio unitario in posizione $c_n = e^{j2\pi n/(N-1)}$ di cui il primo in $z = 1$ si *cancela* con l'unico polo nella stessa posizione.

5.3.2.2 Risposta impulsiva infinita

Partendo anche questa volta dal caso del primo ordine (§ 5.2.4) notiamo che campionando l'uscita si osserva la sequenza $y_n = x_n + \alpha y_{n-1}$ da cui, trasformando ambo i

⁴¹Si dicono zeri di un polinomio $P(z) = \sum_{k=0}^N \beta_k z^k$ di grado N le radici $z = c_n$ ($n = 1, 2, \dots, N$) dell'equazione $P(z) = 0$. La (5.16) può essere riscritta come $H(z) = z^{-N} \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}}{z^N}$ e dunque si azzera per $N(z) = \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k} = 0$, che è un polinomio a potenze *positive*. Una volta trovate le sue radici c_n possiamo scrivere $N(z) = a_0 \prod_{n=1}^N (z - c_n)$ o equivalentemente $H(z) = \frac{N(z)}{z^N} = a_0 \prod_{n=1}^N (1 - c_n z^{-1})$.

⁴²Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Serie_geometrica

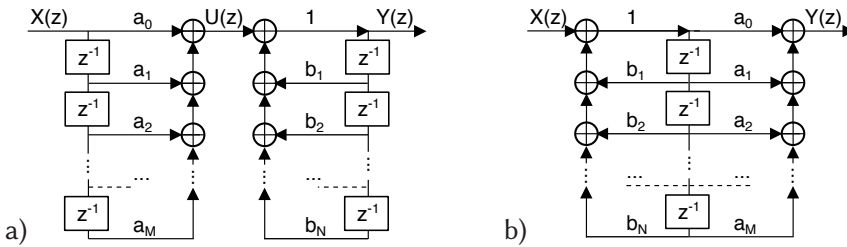


Figura 5.4: Architettura di filtri IIR: a) forma diretta; b) forma canonica

membri, si ottiene $Y(z) = X(z) + \alpha z^{-1}Y(z)$ ovvero $Y(z)(1 - \alpha z^{-1}) = X(z)$ e dunque

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$$

con un polo⁴³ in $z = \alpha$. Ad un generico filtro IIR di ordine N corrisponde una

$$H_{IIR}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M a_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M a_k z^{M-k}}{z^M (z^N - \sum_{k=1}^N b_k z^{N-k})} = \frac{a_0 \prod_{n=1}^M (1 - c_n z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - d_n z^{-1})} \quad (5.17)$$

in cui (a_k, b_k) sono i coefficienti di numeratore e denominatore⁴⁴, e (c_n, d_n) le rispettive radici. Mentre il numeratore di (5.17) esprime la componente FIR, la presenza del denominatore che conferisce alla $H(z)$ poli diversi da $z = 0$ determina la componente con risposta *infinita*. Scrivendo infatti (5.17) come rapporto tra polinomi $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ la relazione $Y(z) = H(z)X(z)$ diviene $Y(z)B(z) = X(z)A(z)$ che, antitrasformata⁴⁵, da origine all'equazione *alle differenze finite* $y_n - \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k}$ ovvero

$$y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k} \quad (5.18)$$

Questa espressione permette di descrivere il funzionamento del filtro in base al diagramma di fig. 5.4. Il secondo termine della (5.18) individua la sequenza *intermedia* $u_n = \sum_{k=0}^M a_k x_{n-k}$ in modo da poter scrivere $y_n = \sum_{k=1}^N b_k y_{n-k} + u_n$. La *forma diretta* di fig. 5.4-a) altro non è che lo schema di un filtro trasversale *ruotato* in verticale e che calcola u_n a partire da x_n , seguito dal blocco che calcola y_n a partire da se stesso e da u_n . Dato che i due blocchi esprimono relazioni lineari tempo invarianti sussiste per essi la proprietà commutativa, espressa dalla *forma canonica* di fig. 5.4-b), in cui gli elementi di ritardo sono stati messi in comune, a tutto vantaggio della memoria necessaria ad implementare il filtro numerico.

Stabilità I poli del denominatore della (5.17) devono giacere tutti all'interno del cerchio unitario $|z| < 1$ pena l'instabilità del filtro, sebbene siano ammessi poli con modulo unitario qualora posti in corrispondenza di uno zero, in modo da *cancellarne* l'effetto.

⁴³Ossia una radice del denominatore $D(z)$ di $H(z)$, che scritta come $H(z) = \frac{z}{z-\alpha}$ vale $D(z) = z - \alpha$, e si azzerà in $z = \alpha$.

⁴⁴Il rapporto tra polinomi viene normalizzato in modo da far risultare $b_0 = 1$.

⁴⁵I passaggi iniziano con lo scrivere $Y(z)(1 - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}) = X(z) \sum_{k=0}^M a_k z^{-k}$ ovvero $Y(z) - \sum_{k=1}^N b_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M a_k z^{-k} X(z)$; dato ora che $Z^{-1}\{z^{-k} X(z)\} = x_{n-k}$, si arriva al risultato mostrato.

Sensibilità alla quantizzazione La precedente considerazione rende evidente il problema legato alla realizzazione del filtro mediante operazioni a *precisione finita*: l'effetto di quantizzazione subito dai coefficienti porta a variazioni delle posizioni di poli e zeri che possono determinare effetti indesiderati. Anche per questo motivo esistono architetture alternative⁴⁶ a quella canonica, legate a modi di diversi di scrivere la (5.17) come ad esempio nel prodotto di fattori, che dà luogo ad una architettura di celle in cascata.

Comportamento della fase e complessità Mentre per i filtri FIR esiste la possibilità di ottenere una fase lineare (vedi pag. 239) e dunque non distorcente, per i filtri IIR questo non è possibile; d'altra parte i secondi permettono di ottenere una buona rapidità di variazione della risposta in frequenza pur mantenendo basso l'ordine, e dunque il carico computazionale.

5.3.3 Sintesi di un filtro IIR a partire da un filtro analogico

Il progetto di filtri analogici si basa su metodi consolidati ed efficienti (§ 5.1), che danno luogo ad una rappresentazione nella variabile s del tipo della (5.1)⁴⁷

$$H_a(s) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m s^m}{\sum_{n=0}^N b_n s^n}$$

a cui corrisponde una risposta impulsiva $h_a(t)$, ed una equazione differenziale

$$\sum_{n=0}^N b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{m=0}^M a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (5.19)$$

A partire da queste grandezze sono stati individuati metodi che consentono di definire un filtro numerico *più o meno* equivalente⁴⁸ ad uno analogico, alcuni dei quali illustriamo appresso.

5.3.3.1 Invarianza della risposta impulsiva

Questo approccio ottiene i campioni h_n per il filtro numerico come $h_n = h_a(nT)$, ovvero campionando $h_a(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_a(f)\}$. Qualora $H_a(s)$ abbia N poli in $s = d_k$, per essa sussiste lo sviluppo in frazioni parziali⁴⁹ $H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s-d_k}$, a cui corrisponde una $h_a(t) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k t}$ e dunque una

$$h_n = h(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{d_k nT}$$

la cui trasformata zeta vale⁵⁰

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}}$$

⁴⁶Vedi ad es. <http://raffaeleparisi.site.uniroma1.it/didattica/circuiti-a-tempo-discreto/discretizzazione> capitolo 8. Alcune architetture si dimostrano (a parità di precisione) migliori di altre nel definire la posizione di zeri e poli nel piano z .

⁴⁷Per ridurre le possibilità di confusione, adottiamo il pedice a per riferirci al *mondo analogico*.

⁴⁸Nel senso che alimentando il filtro numerico con i campioni di un segnale si ottiene circa lo stesso risultato che campionando l'uscita del filtro analogico di partenza.

⁴⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Decomposizione_in_fratti_semplici

⁵⁰Vedi esempio a pag. 107

ovvero con poli in $z = e^{d_k T} = e^{s^T} \Big|_{s=d_k}$ (51). L'ultima osservazione comporta l'aver fatto uso della trasformazione⁵² $z = e^{sT}$, che garantisce il mantenimento della stabilità⁵³.

La trasformazione $z = e^{sT}$ mette inoltre in corrispondenza *periodica* l'asse immaginario nel piano s ($s = j\Omega = j2\pi f$) con la circonferenza del cerchio unitario nel piano z ($z = e^{j\omega}$), nel senso che ad ogni $-\pi < \omega < \pi$ corrisponde una pulsazione $\Omega = 2\omega \frac{1}{2T} = \frac{\omega}{T}$; pertanto la fascia del piano s compresa tra $-\frac{f_c}{2} < f < \frac{f_c}{2}$ viene mappata all'interno del cerchio unitario del piano z (vedi tab. 5.1), ed anche le fasce superiori ed inferiori subiscono la medesima sorte. Questo aspetto è una manifestazione del fenomeno *dell'aliasing* che si manifesta per segnali campionati, ed avviene qualora $H_a(f)$ non soddisfi le condizioni di stretta limitazione in banda, rendendo il metodo idoneo solo alla progettazione di filtri passa basso o passa banda.

Un modo alternativo di vedere il problema si basa sulla considerazione che al filtro numerico corrisponde una $\hat{h}_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT)$, a cui come noto (§ 4.1) a sua volta corrisponde una $H_a^*(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a(f - \frac{n}{T})$; dunque se $H_a(f)$ non è limitata in banda tra $\pm \frac{1}{2T}$ si verifica aliasing.

5.3.3.2 Corrispondenza di poli e zeri

In questo metodo la relazione $z = e^{sT}$ si estende⁵⁴ anche alla trasformazione degli zeri di $H_a(s)$ in quelli di $H(z)$: in pratica, dopo essere arrivati alla forma fattorizzata

$$H_a(s) = k \frac{\prod_{n=1}^M (s - c_n)}{\prod_{n=1}^N (s - d_n)}$$

ogni zero c_n (o polo d_n) si trasforma in $e^{c_n T}$ (o $e^{d_n T}$) dando luogo a

$$H(z) = k \frac{\prod_{n=1}^M (z - e^{c_n T})}{\prod_{n=1}^N (z - e^{d_n T})} = k \frac{z^M \prod_{n=1}^M (1 - e^{c_n T} z^{-1})}{z^N \prod_{n=1}^N (1 - e^{d_n T} z^{-1})}$$

⁵¹Infatti con alcuni passaggi

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{d_k T} z^{-1}} = \sum_{k=1}^N \frac{z A_k}{z - e^{d_k T}}$$

può essere riscritta come

$$H(z) = k \frac{\prod_{n=1}^M (z - c_n)}{\prod_{n=1}^N (z - e^{d_n T})}$$

in cui però gli zeri c_n vanno calcolati.

⁵²Seppur limitata alla sola corrispondenza per la posizione dei poli, in quanto gli zeri di $H(s)$ non si mappano nel piano z allo stesso modo di come fanno i poli, vedi nota precedente.

⁵³Infatti scrivendo s come $s = \sigma + j\Omega$ si ottiene $z = e^{sT} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$, e dunque i poli $d_k = \sigma_k + j\Omega_k$ di $H_a(s)$ che giacciono nel semipiano negativo del piano s , ovvero con $\sigma_k < 0$, vengono mappati all'interno del cerchio unitario nel piano z , in quanto ad essi corrispondono poli per $H(z)$ in $z = z_k = e^{\sigma_k T} e^{j\Omega_k T}$, per i quali $|z_k| = e^{\sigma_k T} < 1$.

⁵⁴Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Matched_Z-transform_method. Che ci sia qualcosa di sensato nello scrivere $z = e^{sT}$ è motivato anche dal fatto che applicando la definizione di trasformata di Laplace ad $h_a(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} H_a(s) &= \mathcal{L}\{h_a(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_n \delta(t - nT) \right] e^{-st} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-snT} \end{aligned}$$

e, dato che $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$, ne discende che $H_a(s) = H(z)|_{z=e^{sT}}$.

metodo	invarianza $h(t)$, poli e zeri	eq. alle differenze	trasf. bilineare
relazione	$z = e^{sT}$	$s = \frac{1-z^{-1}}{T}$	$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
mapping			
debolezze	aliasing	si può agire solo a basse frequenze	distorsione dell'asse della frequenza

Tabella 5.1: Aspetti peculiari delle trasformazioni $H(s) \Rightarrow H(z)$

Sono mantenute le stesse corrispondenze tra piano s e piano z del § 5.3.3.1, così come la possibilità di aliasing. D'altra parte, i valori della risposta impulsiva h_n non corrispondono più ai campioni di $h(t)$.

5.3.3.3 Equazioni alle differenze

Qui si parte dalle equazioni differenziali (5.19) che sono *a monte* della $H(s)$, e che vengono approssimate come equazioni alle differenze finite (5.18). Ciò porta alla equivalenza

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

che permette di ottenere la $H(z)$ a partire dalla $H(s)$ mediante un cambio di variabile, e che da luogo alla corrispondenza mostrata al centro di tab. 5.1, in cui i punti dell'intero semipiano negativo del dominio s si mappano in punti interni alla circonferenza nel piano z di raggio 0.5 e centrata in $z = 0.5$. Pertanto ora sono evitati i problemi legati all'aliasing, ma la presenza dei poli solo nel semipiano destro del piano z impedisce l'uso del metodo per la progettazione di filtri passa-alto.

5.3.3.4 Trasformazione bilineare

Anche quest'ultimo metodo, detto *di Tustin*, trae origine dalla approssimazione numerica di una equazione differenziale, ma può essere anche visto come una approssimazione di primo ordine⁵⁵ della relazione $z = e^{sT}$ analizzata in precedenza. Il metodo di Tustin si basa sul cambio di variabile

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

⁵⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_transform

che corrisponde a mappare l'intero semipiano destro del piano s all'interno della circonferenza di raggio unitario del piano z , come mostrato alla destra di tab. 5.1.

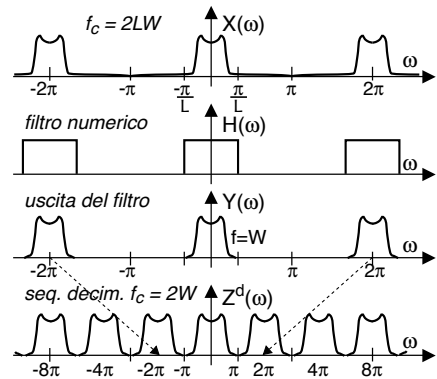
Anche in questo caso il risultato è stabile e privo di aliasing; d'altra parte si verifica invece una distorsione dell'asse delle frequenze, dato che la fase ω di $z = e^{j\omega}$ è ora legata alla frequenza f del filtro analogico tramite la relazione $\omega = 2 \arctan\left(\pi \frac{f}{f_c}\right)$ per cui va adottata una $f_c = 1/T$ abbastanza più elevata delle frequenze di interesse del filtro⁵⁶, oppure si progetta un filtro analogico che tenga conto in partenza della distorsione a cui verrà sottoposta la sua risposta in frequenza.

5.4 Filtraggio polifase

Con questo termine si indica un tipo di elaborazione numerica che comporta la variazione per un rapporto intero della frequenza di campionamento⁵⁷. La circostanza in cui abbiamo incontrato questa stranezza è stata la discussione degli aspetti realizzativi del teorema del campionamento, più precisamente in relazione alle operazioni di *decimazione* (§ 4.2.1) ed *interpolazione* (§ 4.2.3), in cui un filtro numerico che approssima quanto più possibile un passa-basso ideale con risposta in frequenza $H(f) \simeq \text{rect}_{2W}(f)$ con W pari alla massima frequenza del segnale viene rispettivamente *anteposto* o *posto a valle* di un elemento che rimuove od aggiunge elementi alla sequenza numerica in transito. Analizziamo ora come la realizzazione di tale filtro possa essere semplificata in modo che funzioni alla minima frequenza possibile.

5.4.1 Filtro di decimazione

Riprendiamo quanto discusso al § 4.2.1, in cui una sequenza x_n è ottenuta *sovracampionando* alla frequenza $f_c = 2LW$ un segnale $x(t)$ di cui si desidera limitare la banda in $\pm W$, ma che ne occupa una pari a $\pm LW$ a causa di un filtro analogico antialiasing che per mantenere una fase lineare deve possedere una ampia regione di transizione. La sequenza x_n viene limitata nella banda $\pm W = \pm \frac{f_c}{2L}$ mediante un filtro numerico ideale $H(\omega) = \text{rect}_{2\pi/L}$, che produce una nuova sequenza y_n alla stessa velocità, vedi figura a lato. I valori y_n attraversano quindi un *decimatore* con rapporto $L : 1$ che produce una sequenza z_m^d tale che $z_m^d = y_{n=Lm}$, saltando cioè $L - 1$ valori ogni L , come mostrato alla figura seguente per $L = 3$.

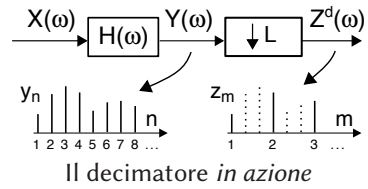


Dopo aver notato che il decimatore è un elemento lineare, ma *non* stazionario, osserviamo che per ottenere una buona approssimazione di un filtro ideale a fase

⁵⁶In tal caso infatti si può ritenere l'arcotangente approssimativamente lineare.

⁵⁷Un buon approfondimento si può trovare in *Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial*, 1990, di P.P.Vaidyanathan, reperibile presso <https://authors.library.caltech.edu/6798/1/VAIprocieee90.pdf>

lineare, $H(\omega)$ deve essere un FIR simmetrico (pag. 125) con ordine sufficientemente elevato, che indichiamo con N . Dunque per ogni valore di uscita il filtro deve eseguire $N + 1$ prodotti ed N somme (fig. 5.2) in un tempo $T = \frac{1}{2LW}$. Notiamo però che $L - 1$ volte su L i suoi calcoli sono *sprecati* perché eliminati dal decimatore: c'è un modo per risparmiare tutto questo lavoro inutile? La risposta è positiva, vediamo come.



5.4.1.1 Decomposizione polifase

Consideriamo per primo il caso in cui la decimazione dimezzi f_c , ovvero $L = 2$. La f.d.t. $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$ del filtro descritto dai coefficienti h_n può allora essere riscritta come

$$\begin{aligned}
 H(z) &= [\dots + h_{-4}z^4 + h_{-2}z^2 + h_0 + h_2z^{-2} + h_4z^{-4} + \dots] + \\
 &+ z^{-1} [\dots + h_{-3}z^4 + h_{-1}z^2 + h_1 + h_3z^{-2} + h_5z^{-4} + \dots] = \\
 &= E_0(z^2) + z^{-1}E_1(z^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

in cui

$$E_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{2n}z^{-n} \quad \text{e} \quad E_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{2n+1}z^{-n}$$

sono rispettivamente le f.d.t dei filtri con coefficienti $e_n^0 = h_{2n}$ (indici pari di h_n) e $e_n^1 = h_{2n+1}$ (indici dispari), chiamate congiuntamente *decomposizione bifase* del filtro. Tale decomposizione è valida sia per filtri FIR che IIR, ma attualmente siamo interessati al primo caso, per il quale la fig. 5.5 fornisce un esempio dello schema di calcolo.

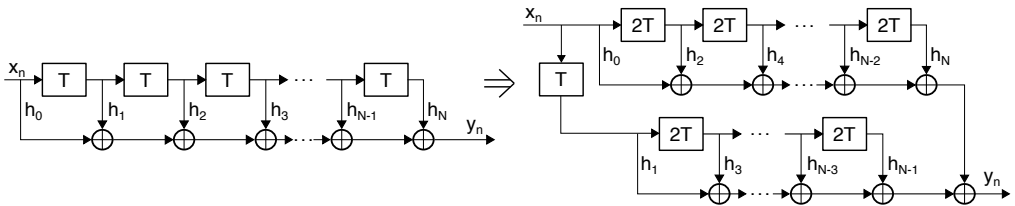


Figura 5.5: Decomposizione bifase di un filtro FIR

La (5.20) individua per il filtro l'equivalenza tra il primo ed il secondo diagramma computazionale mostrati in fig. 5.6, in cui il filtro originale $H(z)$ si scinde nel parallelo di due filtri E_0 ed E_1 , ognuno dei quali con la metà dei coefficienti di H , e con ritardi di durata doppia. Fin qui nella sostanza è cambiato poco, ma invocando la sussistenza della *prima nobile identità*⁵⁸ lo schema si può di nuovo trasformare in quello di destra, in cui il decimatore si sposta a monte dei filtri, che adesso operano a metà della velocità precedente. Notiamo che il passaggio dell'argomento delle f.d.t. da z^2 a z è solo *apparente*, dato che il decimatore *raddoppia* la durata di T .

⁵⁸E' una proprietà che si applica solamente a filtri la cui risposta impulsiva h_n contiene $L - 1$ elementi nulli tra due non nulli e la cui f.d.t. è quindi esprimibile nella forma $H(z^L)$; può essere enunciata come $H(z^L) (\downarrow L) = (\downarrow L) H(z)$. Per verificarne la veridicità, pensiamo ad un impulso δ_n che entra in $H(z^L)$ producendo in uscita la sequenza $h_0, 0, \dots, 0, h_L, \dots, h_{2L}, \dots$ che, dopo decimazione, diviene h_0, h_L, h_{2L}, \dots . Nel caso in cui invece δ_n attraversi prima il decimatore $(\downarrow L)$ la sequenza δ_n non

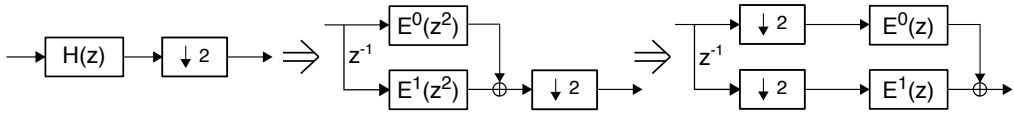


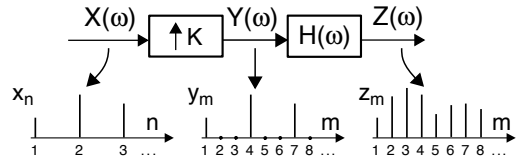
Figura 5.6: Trasformazioni di architettura per il decimatore 2:1

Nel caso più generale di un decimatore $L : 1$ lo stesso ragionamento può essere ripetuto decomponendo la f.d.t $H(z)$ nella somma di L componenti polifase, ossia nella forma $H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} E_k(z^L)$ in cui $E_k(z)$ è la f.d.t. della sequenza $e_n^k = h_{nL+k}$ ottenuta prelevando un elemento ogni L dalla h_n di partenza. In questo modo la complessità computazionale si riduce di un fattore L dato che, seppure il numero totale di somme e prodotti resti lo stesso, il tempo a disposizione per effettuarli è L volte maggiore.

5.4.2 Filtro interpolatore

Al § 4.2.3 abbiamo discusso come, allo scopo di distanziare le repliche del segnale campionato (fig. 4.3), sia opportuno *innalzare* la frequenza di campionamento f_c di un fattore K ovvero $f'_c = Kf_c$, e qualora K sia sufficientemente elevato, ottenere anche il vantaggio (§ 4.2.4) di ridurre la distorsione lineare legata ad un convertitore D/A che adotta un s&H con impulso rettangolare.

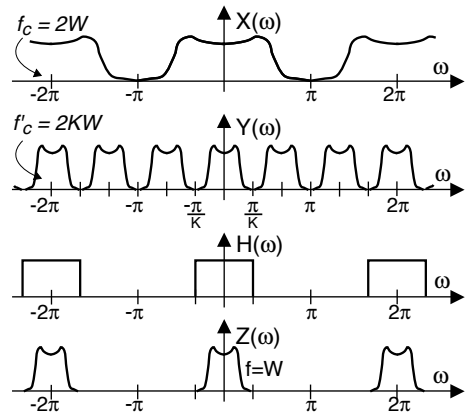
In tale sede abbiamo però *sorvolato* sul fatto che il semplice inserimento di un interpolatore $1 : K$ che aggiunge $K - 1$ valori nulli tra ogni coppia di elementi della sequenza originaria x_n non risolve il problema. In realtà l'interpolatore *numerico* deve essere seguito da un filtro (anch'esso numerico) detto *filtro interpolatore*⁵⁹, secondo lo schema mostrato in figura per il caso di $K = 3$, ed il motivo è presto detto. La trasformata zeta della sequenza interpolata y_m risulta



$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_m z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{\frac{m}{K}} z^{-m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-nK} = X(z^K)$$

in cui, essendo $y_m = x_{m/K}$ se $m = Kn$ e zero altrimenti, al terzo termine la sommatoria è valutata per $m = \dots, -2K, -K, 0, K, 2K, \dots$, da cui il cambio di variabile.

La relazione tra i relativi spettri periodici si ottiene ponendo $z = e^{j\omega}$ e dunque possiamo scrivere $Y(e^{j\omega}) = X(e^{jK\omega})$ ovvero si assiste ad una *compressione* dell'asse delle frequenze di un fattore K , come rappresentato nella seconda riga della figura a lato. Ciò posto, per



muta, ed il successivo passaggio per $H(z)$ produce nuovamente la stessa h_0, h_L, h_{2L}, \dots . Vedi anche http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/courses/DSPDF/01100_Multirate.pdf#slide.5

⁵⁹Da non confondere con il filtro di restituzione (§ 4.2.2) che è di natura analogica.

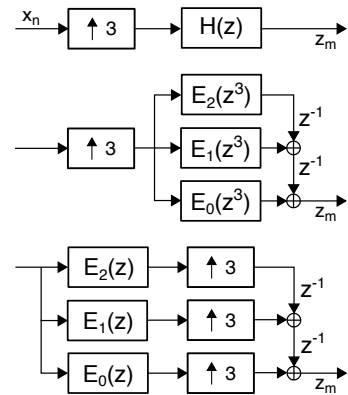
ottenere la sequenza z_m *smussata* (cioè senza gli zeri in mezzo) e che rappresenta i campioni di un segnale limitato in banda $\pm W$ occorre elaborare y_m mediante il filtro interpolatore $H(\omega)$ mostrato alla terza riga.

5.4.2.1 Semplificazione polifase

Lo schema precedente mostra come $H(\omega)$ debba lavorare a frequenza $f'_c = 2KW$ pur dovendo elaborare un segnale limitato nella banda $\pm W$, e dunque ci chiediamo se non vi sia un modo per ridurre il carico computazionale come già avvenuto al § 5.4.1.1 per il caso della decimazione.

Il questo caso il ragionamento inizia dalla considerazione che nella sequenza y_m un solo elemento ogni K è diverso da zero, e dunque il FIR di ordine N che implementa $H(z)$ effettua $K - 1$ moltiplicazioni *per zero* ogni K : pertanto $H(z)$ può anche qui essere scomposto in K filtri in parallelo di ordine ridotto, secondo l'espressione $H(z) = \sum_{k=0}^{K-1} z^{-k} E_k(z^K)$ in cui $E_k(z)$ è la f.d.t. di un FIR con coefficienti $e_n^k = h_{2n+k}$. Tali filtri operano sulla base di elementi di ritardo pari a K/f'_c , e solamente uno di essi (a rotazione) produce una uscita diversa da zero, come rappresentato nella seconda riga della figura a lato nel caso di $K = 3$, con gli elementi di ritardo z^{-1} posti sulla destra che *ciclano* le uscite dei filtri verso l'uscita.

A questo punto è possibile invocare l'applicabilità della *seconda nobile identità*⁶⁰ che permette di scambiare la posizione dell'interpolatore numerico con quella dei filtri E_k in modo che questi possano operare alla velocità ridotta $f_c = 2W$, riducendo anche in questo caso la complessità computazionale.



5.4.3 Filtro integratore-pettine in cascata

Il termine originale inglese è *cascaded integrator-comb* o filtro di *Hogenauer* (dal nome del suo ideatore) o brevemente filtro CIC, e trova impiego negli stadi di decimazione ed interpolazione numerica, permettendo di semplificare ulteriormente la realizzazione circuitale in quanto risulta *privo di moltiplicatori*, e consentendo la *programmabilità* del rapporto di variazione della frequenza di campionamento; il suo uso è particolarmente vantaggioso nel caso di tassi di variazione elevati.

Integratore Questo componente (detto anche *accumulatore*) implementa l'equazione alle differenze

$$y_n = y_{n-1} + x_n$$

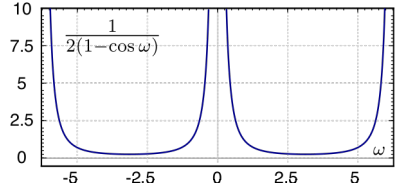
⁶⁰E' la duale di quella espressa alla nota 58 e come quella si applica a filtri la cui risposta impulsiva h_n contiene $K - 1$ elementi nulli tra due non nulli e la cui f.d.t. è quindi esprimibile nella forma $H(z^K)$; consiste nella uguaglianza $(\uparrow K) H(z^L) = H(z) (\uparrow K)$.

da cui $Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z)$ ed è quindi descritto da una funzione di trasferimento

$$H_I(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

a cui corrisponde il guadagno di potenza⁶¹ (§ 206)

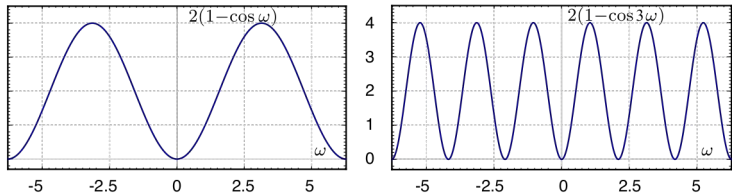
$|H_I(\omega)|^2 = \frac{1}{2(1-\cos\omega)}$ mostrato in figura: si comporta pertanto come un passa basso, presentando guadagno infinito per $\omega = 0$.



Comb Come sarà chiaro tra breve, per ottenere un tasso di decimazione (od interpolazione) L occorre impostare una equazione alle differenze $y_n = x_n - x_{n-L}$ a cui corrisponde una f.d.t.

$$H_C(z) = 1 - z^{-L}$$

ed un guadagno di potenza $|H_C(\omega)|^2 = 2(1 - \cos L\omega)$ di cui alla figura seguente viene mostrato l'andamento per $L = 1$ ed $L = 3$, coerentemente con quanto ottenuto a pag. 128.

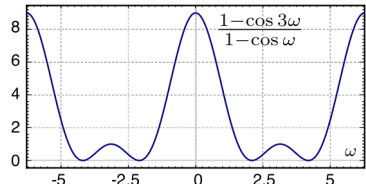


Integratore e Comb

Concatenando i due filtri in cascata si realizza una funzione di trasferimento

$$H_{IC}(z) = \frac{1 - z^{-L}}{1 - z^{-1}} \tag{5.21}$$

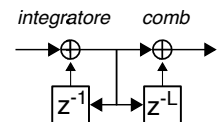
in cui il polo in $z = 0$ dell'integratore viene *cancellato* dallo zero del comb nella medesima posizione, producendo un guadagno di potenza $|H_{IC}(\omega)|^2 = \frac{1-\cos L\omega}{1-\cos \omega}$ mostrato in figura per $L = 3$, dimostrandosi un passa basso, con zeri alle frequenze $f_i = i \cdot \frac{f_c}{L}$ con $i = 1, \dots, L - 1$.



Equivalente a media mobile Ricordando nuovamente l'uguaglianza $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$ si ottiene che la (5.21) può essere riscritta come

$$H_{IC}(z) = \sum_{n=0}^{L-1} z^{-n}$$

ossia (a meno del coefficiente $1/L$) la f.d.t. di un filtro a *media mobile* (pag. 133) con risposta impulsiva $h_n = \sum_{k=0}^{L-1} \delta_{n-k}$, in quanto tale a fase lineare, e con gli stessi zeri. Evidentemente l'architettura del filtro i&c, mostrata a lato, costituisce una implementazione *particolarmente efficiente*⁶² di un filtro a media mobile.



⁶¹Essendo $H(\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\cos\omega + j\sin\omega}$, si ha $|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(1-\cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2} = \frac{1}{1-2\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega} = \frac{1}{2-2\cos\omega+1} = \frac{1}{2(1-\cos\omega)}$

⁶²Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Cascaded_integrator-comb_filter

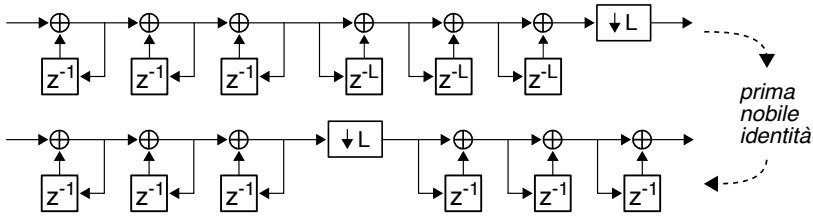


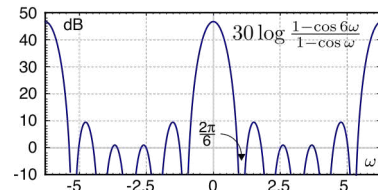
Figura 5.7: Decimatore $L : 1$ realizzato mediante cascaded integrator-comb a tre stadi

CIC L'attenuazione della banda soppressa ovvero delle frequenze per cui $|f| > \frac{f_c}{L}$ ossia $|\omega| > \frac{\pi}{L}$ viene largamente migliorata qualora si pongano N celle i&c in cascata, in modo da realizzare un filtro con f.d.t.

$$H_{CIC}(z) = \left(\frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}} \right)^N$$

e dunque con guadagno di potenza

$$|H_{CIC}(\omega)|^2 = \left(\frac{1-\cos L\omega}{1-\cos \omega} \right)^N$$



di cui la figura mostra l'andamento per $L = 6$ ed $N = 3$ su di una scala in dB (§ 8.1).

Filtro cic e decimazione Approfondiamo ora come quanto esposto si integri con la teoria discussa al § 5.4.1. La fig. 5.7 mostra uno schema di decimazione $L : 1$ realizzato mediante filtro cic, che rientrando nel criterio di applicazione della *prima nobile identità* permette di posizionare il decimatore *a monte* degli elementi *comb* come mostrato alla seconda riga, consentendo a questi di operare alla velocità minima. Osserviamo quindi come in questa configurazione gli elementi di ritardo risultino *indipendenti* dal rapporto di decimazione L , e dunque lo stesso schema può essere riutilizzato modificando unicamente l'elemento decimatore vero e proprio.

Compensazione A fronte dei vantaggi discussi, l'uso di un filtro cic presenta risvolti che richiedono una attenta progettazione. Infatti la risposta in frequenza pre-decimazione $|H_{CIC}(\omega)| = \left| L \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} \right|^N$ (vedi pag. 133 per la sua derivazione) risulta essere tutt'altro che piatta nella banda passante corrispondente ad una pulsazione $|\omega| = \frac{\pi}{L}$ (o inferiore), e dunque deve essere *compensata* mediante uno stadio di equalizzazione realizzato con un ulteriore filtro FIR (per mantenere la linearità di fase) di ordine elevato, e che opera alla velocità *decimata* a valle dei comb, con l'effetto mostrato in fig. 5.8-a).

Lo stesso filtro di compensazione viene utilizzato anche per *aumentare* l'attenuazione nella banda soppressa $\frac{1}{L}\pi < |\omega| < \frac{2L-1}{L}\pi$, come mostrato in fig. 5.8-b). Infatti in tale regione il filtro cic presenta un'attenuazione di decine di dB ma non nulla, e ciò causa la manifestazione di aliasing a seguito della decimazione, con il segnale presente nelle bande $n \cdot \frac{2\pi}{L} \pm \frac{\pi}{4}$ con $n = 1, 2, \dots, L - 1$ che si *ripiega* sulla frequenza zero.

Aspetti numerici Un ultimo aspetto notevole è che l'elaborazione del filtro cic deve essere svolta con operazioni in virgola fissa senza segno, dato che in tal modo è garantita la cancellazione del polo dell'integratore con lo zero del comb. Non solo,

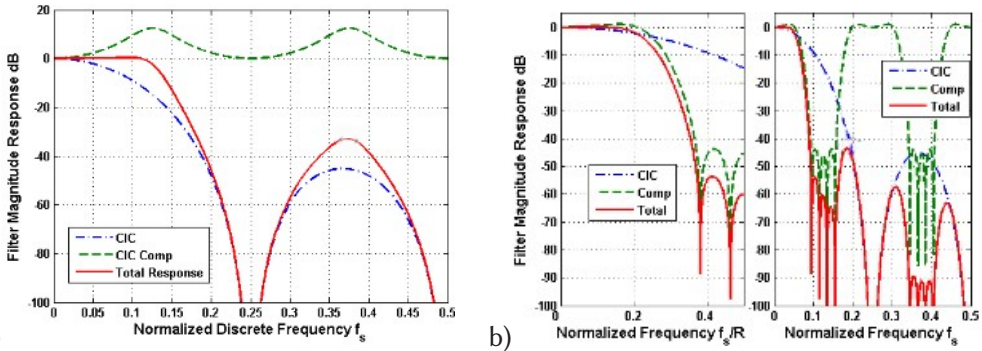
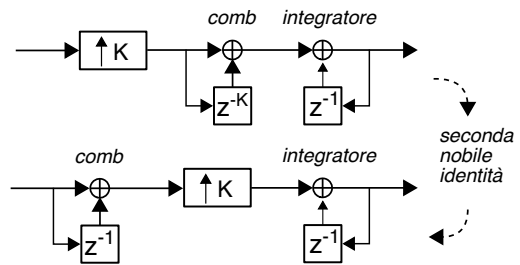


Figura 5.8: Risposta in frequenza in dB del filtro cic ($L = 4$) compensato: a) - compensazione in banda passante; b) - compensazione estesa alla banda soppressa

occorre anche tenere conto che la dinamica del segnale aumenta sensibilmente con il numero di stadi posti in cascata, e dunque il numero di bit dei registri di calcolo deve essere dimensionato adeguatamente. Per approfondire il tema, si possono consultare i riferimenti riportati in nota⁶³.

Interpolazione Il filtro cic può svolgere altrettanto bene la funzione del filtro passabasso utilizzato in uno schema di interpolazione numerica (§ 5.4.2). In questo caso il cic è nominalmente posto a valle dell'interpolatore numerico, ma scambiando tra loro di posto gli stadi comb con quelli di integrazione, è possibile applicare la seconda nobile identità per pervenire anche in questo caso ad una architettura dalla complessità computazionale minima, come mostrato alla figura precedente in cui per semplicità si è limitato ad uno il numero di stadi i&c.



Valgono anche in questo caso le considerazioni precedenti, ovverosia la necessità di un ulteriore filtro di compensazione della distorsione in banda passante e di attenuazione della banda soppressa, che questa volta viene posto *prima* dello stadio comb in modo da operare a velocità ridotta, assieme alle accortezze sulla necessaria dimensione dei registri di calcolo a virgola fissa.

⁶³<https://www.dsprelated.com/showarticle/1337.php>, <https://dspguru.com/files/cic.pdf>, <http://www.tsdconseil.fr/log/scriptscilab/cic/cic-en.pdf>, <https://www.intel.com/content/dam/www/programmable/us/en/pdfs/literature/an/an455.pdf>

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>