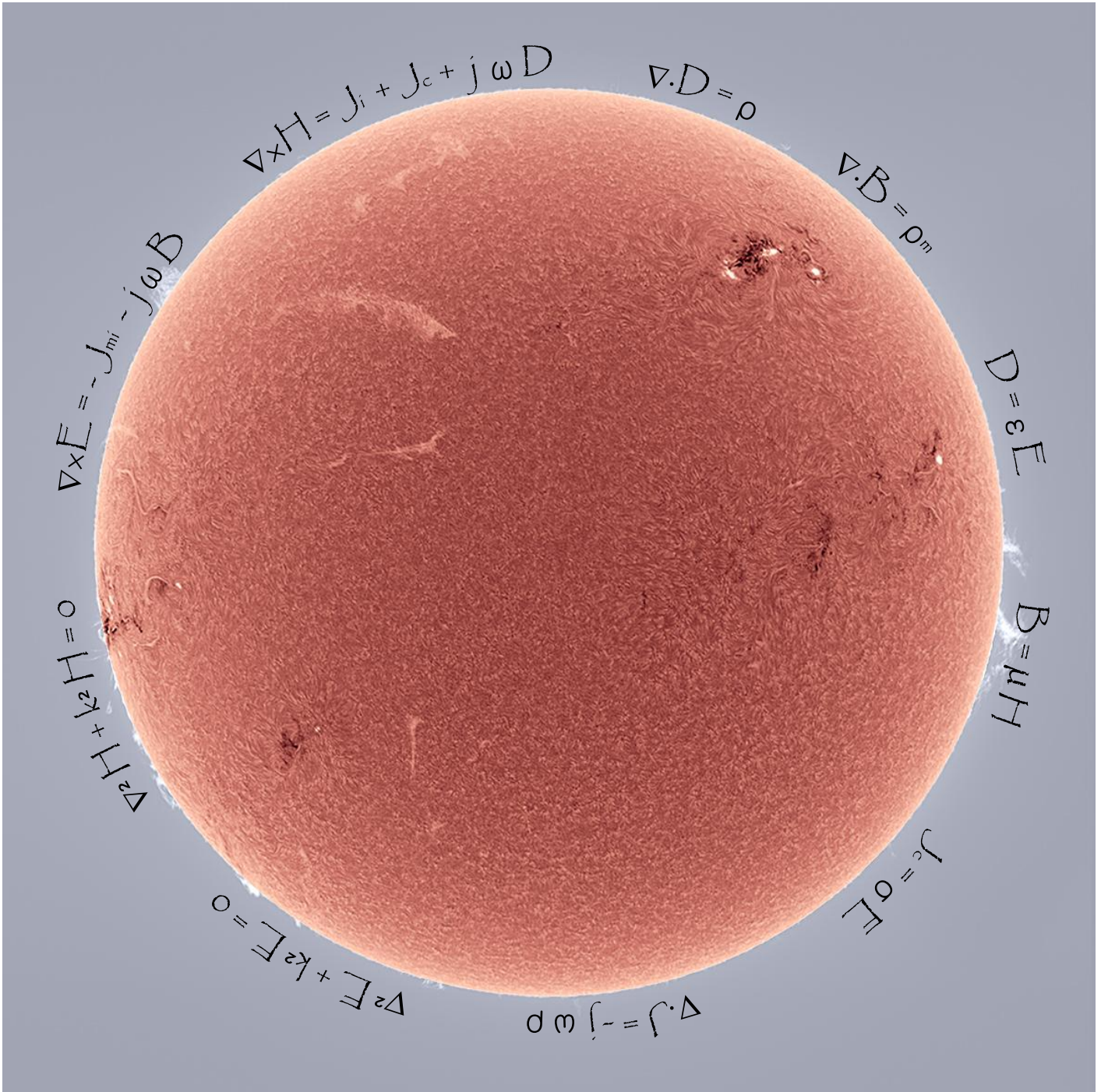


Fabrizio Frezza

Lezioni di Campi Elettromagnetici





Elaborazione grafica della copertina a cura di Carlo Santini; si ringrazia Alan Friedman per l'immagine del Sole ivi riportata: © Alan Friedman/avertedimagination.com

Prima edizione stampata:
novembre 2013, Azeta Centrostampa Roma, via della Polveriera 13 a

ISBN: 978-88-906495-4-7

Indice

Prefazione	vii
1 Equazioni dei campi elettromagnetici e teoremi fondamentali	1
1.1 Proprietà del nabla, operatori differenziali	1
1.2 Teoremi fondamentali di analisi vettoriale	2
1.3 Simbologia e dimensioni fisiche delle grandezze utilizzate	4
1.4 Equazioni di Maxwell e di continuità	4
1.5 Dualità, grandezze impresse	7
1.6 Relazioni costitutive	8
1.7 Condizioni al contorno	13
1.8 Polarizzazione dei vettori	17
1.9 Equazioni di Maxwell e relazioni costitutive nel dominio della frequenza	20
1.10 Mezzi dispersivi	22
1.11 Teorema di Poynting	27
1.11.1 Teorema di Poynting nel dominio del tempo	27
1.11.2 Teorema di Poynting nel dominio della frequenza	31
1.12 Teorema di unicità	38
1.12.1 Teorema di unicità nel dominio del tempo	39
1.12.2 Teorema di unicità nel dominio della frequenza	41
1.13 Equazione delle onde	43

1.13.1	Equazione di Helmholtz	46
1.14	Potenziali elettrodinamici	47
2	Proprietà delle onde elettromagnetiche piane	53
2.1	Funzioni d'onda	53
2.2	Onde piane	55
2.3	Proprietà generali delle onde piane	61
2.3.1	Onda piana uniforme non attenuata	64
2.3.2	Onda piana non uniforme attenuata perpendicolarmente alla direzione di propagazione	67
2.3.3	Onda piana uniforme attenuata	69
2.4	Spettro di onde piane	71
2.5	Determinazione del campo elettrico di un'onda monocromatica in un semispazio	73
2.6	Onde piane non monocromatiche	75
2.6.1	Velocità di battimento	76
2.6.2	Velocità di gruppo di un pacchetto d'onde	77
2.7	Riflessione e trasmissione di onde piane da una interfaccia piana: incidenza normale	81
2.8	Riflessione e trasmissione (rifrazione) di onde piane da una interfaccia piana: incidenza obliqua	89
2.8.1	Polarizzazione orizzontale	91
2.8.2	Polarizzazione verticale	94
2.8.3	Riflessione totale	97
2.8.4	Riflessione e trasmissione da mezzo conduttore, condizione di Leontovich	101
3	Introduzione alle linee di trasmissione	105
3.1	Equazioni delle linee, costanti primarie e secondarie, condizioni al contorno	105
3.2	Impedenza, ammettenza, coefficiente di riflessione	113
3.3	Rapporto d'onda stazionaria	118
3.4	Strati antiriflettenti	120

4	Propagazione elettromagnetica guidata	125
4.1	Relazioni generali delle guide d'onda	125
4.1.1	Campi TE	128
4.1.2	Campi TM	131
4.1.3	Campi TEM	133
4.2	Condizioni al contorno per guide d'onda metalliche. Modi di propagazione.	135
4.3	La propagazione guidata come problema di autovalori	137
4.4	Guida d'onda rettangolare	145
4.5	Guide d'onda a sezione circolare	152
4.5.1	Modi TE e TM in guide d'onda circolari metalliche	155
4.6	Risonatori a cavità	157
4.6.1	Risonatore cilindrico	159
5	Funzioni di Green	163
5.1	Equazione di Helmholtz non omogenea, problema deterministico . . .	163
5.2	Definizione e proprietà della funzione di Green	165
5.3	Condizioni al contorno all'infinito per lo spazio libero	169
5.4	Calcolo della funzione di Green per l'equazione di Helmholtz e per lo spazio libero	172
5.5	Campo elettromagnetico prodotto da una distribuzione di correnti impresse in presenza di un corpo metallico	177
	Lista delle figure	182

Equazioni dei campi elettromagnetici e teoremi fondamentali

1.1 Proprietà del nabra, operatori differenziali

$$\nabla = \underline{x}_o \frac{\partial}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi.$$

$$\nabla \times \nabla V = 0 \quad \nabla \cdot \nabla \times \underline{A} = 0.$$

$$\nabla^2 \underline{A} = \underline{x}_o \nabla^2 A_x + \underline{y}_o \nabla^2 A_y + \underline{z}_o \nabla^2 A_z, \quad \text{solo in coordinate cartesiane.}$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla, \quad \text{ecco perché si indica così.}$$

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} \implies \nabla^2 \underline{A} = \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla \times \nabla \times \underline{A}.$$

$$\nabla \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

$$\nabla \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$\nabla \cdot \underline{D} = (\nabla \cdot \underline{D}_x) \underline{x}_o + (\nabla \cdot \underline{D}_y) \underline{y}_o + (\nabla \cdot \underline{D}_z) \underline{z}_o, \quad \text{essendo } \underline{D}_x, \underline{D}_y, \underline{D}_z \text{ i vettori}$$

colonna della diade $\underline{\underline{D}}$.

(Vedi anche sul sito: richiami di campi elettromagnetici I).

1.2 Teoremi fondamentali di analisi vettoriale

Teorema del gradiente

$$\int_V \nabla \phi \, dV = \oint_S \underline{n} \phi \, dS.$$

Teorema della divergenza

$$\int_V \nabla \cdot \underline{A} \, dV = \underbrace{\oint_S \underline{n} \cdot \underline{A} \, dS}_{\text{flusso del vettore } \underline{A}}.$$

Teorema del rotore

$$\int_V \nabla \times \underline{A} \, dV = \oint_S \underline{n} \times \underline{A} \, dS.$$

Teorema di Stokes

$$\underbrace{\oint_S \underline{n} \cdot \nabla \times \underline{A} \, dS}_{\text{flusso del rotore}} = \underbrace{\oint_s \underline{s}_o \cdot \underline{A} \, ds}_{\text{circuitazione del vettore}}.$$

Lemma di Green nella prima forma

$$\oint_S \phi \nabla \psi \cdot \underline{n} \, dS = \oint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, dS = \int_V (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) \, dV.$$

Lemma di Green nella seconda forma

$$\oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \underline{n} dS = \oint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = \int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV.$$

Definizione Si dice che una regione di spazio è a connessione lineare semplice se ogni curva semplice (cioè priva di punti multipli) e chiusa, tracciata nella regione, è bordo di (almeno) una superficie aperta tutta contenuta nella regione.

Controesempio: lo spazio privato di una retta non è una regione a connessione lineare semplice, come pure non lo è una regione a forma di toro (ciambella).

Teorema

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \implies \underline{E} = -\nabla V,$$

se la regione in cui \underline{E} è irrotazionale è a connessione lineare semplice.

Definizione Si dice che una regione è a connessione superficiale semplice se non ci sono lacune, ovvero se ogni superficie chiusa contenuta nel suo interno racchiude solo punti appartenenti alla regione.

Teorema

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \implies \underline{B} = \nabla \times \underline{A},$$

se la regione in cui la funzione vettoriale \underline{B} è solenoidale è una regione a connessione superficiale semplice.

Definizione Una superficie S si dice semplicemente connessa quando ogni curva semplice e chiusa, tracciata su di essa, è bordo di una superficie aperta tutta appartenente a S .

1.3 Simbologia e dimensioni fisiche delle grandezze utilizzate

$\underline{E}(\underline{r},t)$: (intensità di) campo elettrico	$\frac{\text{Volt}}{\text{metro}}$	$\frac{V}{m}$
$\underline{H}(\underline{r},t)$: (intensità di) campo magnetico	$\frac{\text{Ampère}}{\text{metro}}$	$\frac{A}{m}$
$\underline{D}(\underline{r},t)$: induzione elettrica (o spostamento elettrico)	$\frac{\text{Coulomb}}{\text{metro}^2}$	$\frac{C}{m^2}$
$\underline{B}(\underline{r},t)$: induzione magnetica (o spostamento magnetico)	$\frac{\text{Weber}}{\text{metro}^2}$	$\frac{Wb}{m^2}$
$\underline{J}(\underline{r},t)$: densità di corrente elettrica	$\frac{\text{Ampère}}{\text{metro}^2}$	$\frac{A}{m^2}$
$\rho(\underline{r},t)$: densità di carica elettrica	$\frac{\text{Coulomb}}{\text{metro}^3}$	$\frac{C}{m^3}$

Si ricordi che risulta Coulomb=Ampère · secondo e Weber=Volt · secondo.

1.4 Equazioni di Maxwell e di continuità

I Equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}.$$

Questa è la forma differenziale o locale della **legge dell'induzione di Faraday-Neumann** (forma integrale o globale o a larga scala):

$$\underbrace{\oint_s \underline{s}_o \cdot \underline{E} ds}_{\text{circuitazione di } \underline{E}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \underline{n} \cdot \underline{B} dS}_{\text{flusso di } \underline{B}}.$$

Facciamo ora vedere come si può ricavare la relazione differenziale da quella integrale, applicando il teorema di Stokes:

$$\oint_s \underline{s}_o \cdot \underline{E} ds = \int_S \underline{n} \cdot \nabla \times \underline{E} dS = -\int_S \underline{n} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} dS,$$

ove nell'ultimo passaggio ho portato dentro la derivata temporale, supponendo che la superficie S sia invariabile nel tempo. A questo punto per l'arbitrarietà di S e quindi di \underline{n} ottengo:

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}.$$

II Equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}.$$

Questa è la forma differenziale o locale della **legge della circuitazione di Ampère-Maxwell**:

$$\underbrace{\oint_s \underline{s}_o \cdot \underline{H} ds}_{\text{circuitazione di } \underline{H}} = \underbrace{\int_S \underline{n} \cdot \underline{J} dS}_{\text{flusso di } \underline{J}} + \frac{d}{dt} \underbrace{\int_S \underline{n} \cdot \underline{D} dS}_{\text{flusso di } \underline{D}} .$$

Il flusso di \underline{J} è pari alla corrente I di conduzione o convezione. In modo analogo a quanto fatto per la prima equazione posso passare dalla relazione integrale a quella differenziale.

Equazione di continuità della corrente elettrica:

$$\nabla \cdot \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Questa è la forma differenziale o locale della **legge di conservazione della carica elettrica**:

$$\underbrace{\oint_S \underline{n} \cdot \underline{J} dS}_{\text{corrente elettrica}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho dV}_{\text{carica totale racchiusa in } V} .$$

Per passare dalla relazione integrale a quella differenziale applico il teorema della divergenza e ottengo:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \underline{J} dS = \int_V \nabla \cdot \underline{J} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV ,$$

supponendo che V sia invariabile nel tempo. Inoltre per la sua arbitrarietà segue:

$$\nabla \cdot \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Si noti che potevamo anche ricavare le relazioni integrali da quelle differenziali, facendo i passaggi al contrario.

Le tre equazioni che abbiamo visto sono relazioni indipendenti. Da esse si possono ottenere nel caso dinamico (fenomeni variabili nel tempo) la terza e la quarta equazione di Maxwell. Infatti partendo dalla

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

e prendendo la divergenza dei due membri segue:

$$0 = -\nabla \cdot \left(\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right).$$

A questo punto applico il teorema di Schwarz sull'invertibilità dell'ordine di derivazione. Affinché valga questo teorema ricordo che è necessario che le funzioni siano di classe \mathcal{C}^2 .

Ottingo allora:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{B}) = 0 \implies \nabla \cdot \underline{B} = \text{cost};$$

se si assume che \underline{B} non esista da un tempo infinito, la costante dev'essere nulla e si ha dunque

$$\underbrace{\nabla \cdot \underline{B} = 0}_{\text{Terza equazione di Maxwell}} .$$

Dalla seconda equazione di Maxwell si ha invece, prendendo ancora la divergenza:

$$0 = \nabla \cdot \underline{J} + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{D} - \rho),$$

avendo usato l'equazione di continuità e il teorema di inversione

$$\implies \underbrace{\nabla \cdot \underline{D} = \rho}_{\text{Quarta equazione di Maxwell}} .$$

Si osservi per il seguito che la ρ è la densità delle cariche libere, e non anche di quelle di polarizzazione presenti nei vari mezzi materiali. Mediante l'applicazione del teorema della divergenza si ottiene dalla quarta equazione il ben noto teorema di Gauss:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \underline{D} dS = \int_V \rho dV = Q,$$

essendo Q la carica elettrica contenuta nel volume V .

Si noti che invece nel caso statico la terza e la quarta equazione di Maxwell sono valide indipendentemente dalle prime due, e quindi in tal caso si devono imporre tutte e quattro le equazioni di Maxwell.

1.5 Dualità, grandezze impresse

Si noti che le prime due equazioni di Maxwell non sono simmetriche dal punto di vista formale (nella prima c'è un termine in meno, dovuto essenzialmente al fatto che in natura non sono state finora scoperte cariche magnetiche, i cosiddetti monopoli magnetici, e di conseguenza non ci sono correnti di conduzione o convezione magnetiche). Per ottenere tale simmetria formale si suole di solito aggiungere dei termini fittizi, e in particolare una densità di carica magnetica ρ_m , misurata in $\frac{\text{Weber}}{\text{metro}^3}$ ($\frac{\text{Wb}}{\text{m}^3}$)

$$\implies \nabla \cdot \underline{B} = \rho_m ,$$

e una densità di corrente magnetica \underline{J}_m , misurata in $\frac{\text{Volt}}{\text{metro}^2}$ ($\frac{\text{V}}{\text{m}^2}$)

$$\implies \nabla \times \underline{E} = -\underline{J}_m - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} .$$

Si impone inoltre fra queste grandezze fittizie un'equazione (fittizia) di continuità della corrente magnetica:

$$\nabla \cdot \underline{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} .$$

Si osservi ora che se nelle equazioni precedenti si operano le seguenti sostituzioni:

$$\underline{E} \longrightarrow \underline{H} \quad , \quad \underline{H} \longrightarrow -\underline{E} ,$$

$$\underline{D} \longrightarrow \underline{B} \quad , \quad \underline{B} \longrightarrow -\underline{D} ,$$

$$\underline{J} \longrightarrow \underline{J}_m \quad , \quad \underline{J}_m \longrightarrow -\underline{J} ,$$

$$\rho \longrightarrow \rho_m \quad , \quad \rho_m \longrightarrow -\rho ,$$

cioè alle grandezze elettriche sostituisco quelle magnetiche corrispondenti e a quelle magnetiche le grandezze elettriche corrispondenti cambiate di segno, il sistema di equazioni differenziali si trasforma in se stesso. Questo permette di affermare il cosiddetto **principio di dualità** delle soluzioni dei problemi elettromagnetici: se dispongo di una soluzione e opero le sostituzioni viste, ottengo ancora una soluzione di un altro problema elettromagnetico che si chiamerà problema duale. Useremo spesso questo principio ad esempio per ricavare certi risultati per il campo magnetico a partire da risultati analoghi per il campo elettrico.

Un'ultima osservazione riguarda le densità di carica e di corrente che compaiono nelle equazioni viste. In genere nei problemi elettromagnetici si considerano come sorgenti del campo le correnti e le cariche¹. Vi saranno però come è noto delle correnti indotte dal campo sui conduttori (per esempio la corrente sull'antenna ricevente). Nel primo caso tali grandezze si considerano note, e quindi costituiscono il termine noto di un sistema di equazioni differenziali non omogeneo. Nel secondo caso le grandezze sono ovviamente incognite, in quanto dipendenti dal campo elettromagnetico incognito. In certi problemi compaiono soltanto termini del secondo tipo, e quindi il problema differenziale sarà di tipo omogeneo. È chiaro che le sorgenti in realtà ci saranno sempre², ma magari la regione in cui cerco la soluzione non le comprende. È anche vero che la sorgente stessa è influenzata dal campo che essa emette, ma queste influenze le trascuriamo. A questo punto distinguiamo le cariche e le correnti in una parte impressa e in una dipendente dal campo. Quindi si pone:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_i + \rho_c \quad , \quad \rho_m = \rho_{mi} + \rho_{mc} , \\ \underline{J} &= \underline{J}_i + \underline{J}_c \quad , \quad \underline{J}_m = \underline{J}_{mi} + \underline{J}_{mc} .\end{aligned}$$

Inoltre, siccome in natura non esistono cariche e correnti magnetiche, mettiamo a zero ρ_{mc} e \underline{J}_{mc} . Lasciamo invece ρ_{mi} e \underline{J}_{mi} perché ci sono dei casi in cui si schematizzano, con delle cariche o delle correnti magnetiche impresse equivalenti, delle forme diverse di eccitazione. Per esempio si parla del cosiddetto “dipolo magnetico”, che però in realtà è una fessura sottile praticata in una lastra metallica, illuminata da un lato e che emette dall'altro. Oppure, come avviene applicando il cosiddetto teorema di equivalenza (vedi Lezioni di Campi Elettromagnetici II, capitolo 7^o, confronta per analogia il principio di Huygens), si considera il campo esterno a una superficie chiusa come generato da correnti elettriche e magnetiche equivalenti poste sulla superficie stessa. In conclusione, le prime due equazioni di Maxwell assumono la forma:

$$\nabla \times \underline{E} = -\underline{J}_{mi} - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + \underline{J}_c + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} .$$

1.6 Relazioni costitutive

Le due equazioni di Maxwell per i rotori costituiscono un sistema di due equazioni vettoriali (cioè 6 equazioni scalari) contenenti 5 incognite vettoriali, cioè 15 scalari:

¹Pensiamo ad esempio alla corrente che scorre in un'antenna trasmittente.

²Anche un risonatore, quello che è il tipico sistema omogeneo (le cosiddette oscillazioni libere, cioè senza forzamento) in realtà ha perdite e necessita di eccitazione.

\underline{E} , \underline{D} , \underline{H} , \underline{B} , \underline{J}_c (ricordiamo che \underline{J}_i e \underline{J}_{mi} sono note). Mancano quindi nove equazioni scalari per ottenere un risultato determinato. Del resto l'aggiunta dell'equazione scalare di continuità della corrente non altera questa differenza, perché introduce l'ulteriore incognita ρ .

Le equazioni richieste sono rappresentate dalle cosiddette relazioni costitutive, che legano le induzioni \underline{D} e \underline{B} e la densità di corrente \underline{J}_c ai campi \underline{E} e \underline{H} . Esse dipendono dalla natura del mezzo materiale in cui cerchiamo le nostre soluzioni.

Il mezzo più semplice è il vuoto (si noti che l'aria in genere può essere approssimata molto bene al vuoto), per il quale valgono le relazioni:

$$\underline{D} = \varepsilon_o \underline{E} \quad \underline{B} = \mu_o \underline{H} \quad \underline{J}_c \equiv 0,$$

ove si ricordi che la permeabilità magnetica $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Henry}}{\text{metro}} \left(\frac{\text{H}}{\text{m}}\right)$ (dimensioni fisiche di un'induttanza per unità di lunghezza), la costante dielettrica o permittività $\varepsilon_o \cong \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{Farad}}{\text{metro}} \left(\frac{\text{F}}{\text{m}}\right)$ (dimensioni fisiche di una capacità per unità di lunghezza). Il circa uguale corrisponde al fatto che si assume approssimativamente $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \cong 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ per la velocità della luce nel vuoto (in realtà il valore è un po' inferiore).

Nei mezzi materiali si hanno delle relazioni più complesse, che coinvolgono altri due vettori, denominati (intensità di) polarizzazione elettrica \underline{P} e (intensità di) polarizzazione magnetica o magnetizzazione \underline{M} (si noti la diversità di notazione rispetto ad alcuni testi di Fisica II):

$$\underline{D} = \varepsilon_o \underline{E} + \underline{P},$$

$$\underline{B} = \mu_o \underline{H} + \underline{M}.$$

Inoltre in generale sarà \underline{J}_c diversa da zero. Infine, a parte il caso di particolari mezzi (come i cosiddetti mezzi "chirali") o dei mezzi in movimento, succede che \underline{P} e \underline{J}_c dipendono solo da \underline{E} e non da \underline{H} , mentre \underline{M} dipende solo da \underline{H} e non da \underline{E} : questo sempre nella nostra assunzione di prendere come vettori fondamentali la coppia \underline{E} , \underline{H} (invece di \underline{E} , \underline{B} , come accade in alcuni testi) che in un certo senso si considerano cause, con gli altri vettori considerati effetti.

Le proprietà generali dei mezzi materiali influenzano la natura matematica delle relazioni costitutive. In particolare si considera solitamente l'ipotesi di linearità, ossia di validità del principio di sovrapposizione degli effetti. Tale ipotesi consente in fin dei conti l'utilizzabilità di un formalismo matematico di tipo matriciale.

Un'altra proprietà importante è la stazionarietà, o permanenza o invarianza nel tempo: le caratteristiche del mezzo, appunto, non variano nel tempo. Poi c'è l'omogeneità, o invarianza nello spazio: le caratteristiche del mezzo non dipendono dal punto dello spazio considerato.

La quarta proprietà fondamentale è l'isotropia, che significa in sostanza indipendenza dalla direzione (un caso tipico di non isotropia, o anisotropia, è rappresentato dai cristalli, per la presenza appunto in questo caso di direzioni privilegiate). Tale proprietà si può anche esprimere in modo più operativo (cioè appunto più legato alla forma matematica delle relazioni costitutive che ne risultano) dicendo che il vettore effetto è parallelo al vettore causa.

Abbiamo poi la dispersività, che può essere di tipo spaziale o di tipo temporale. Un mezzo si dice dispersivo spazialmente se in un dato punto l'effetto dipende dal valore della causa non solo nel punto stesso, ma anche nei punti circostanti. Analogamente il mezzo si dice dispersivo nel tempo se l'effetto in un dato istante dipende dal valore della causa non solo nell'istante stesso, ma anche negli istanti precedenti (gli istanti successivi sono esclusi in partenza per l'ipotesi di causalità). Si noti che un mezzo dispersivo nello spazio lo è anche nel tempo, perché tutti i fenomeni fisici si propagano con velocità finita. La dispersività temporale è in genere più significativa dell'altra nelle applicazioni.

Infine un mezzo si dice dissipativo per conducibilità se la conducibilità elettrica σ ($\frac{\text{Siemens}}{\text{metro}}$) è non nulla.

Nel mezzo materiale più semplice possibile, cioè lineare, stazionario, omogeneo, isotropo e non dispersivo nel tempo né nello spazio valgono le seguenti relazioni costitutive:

$$\underline{P} = \varepsilon_o \chi_e \underline{E},$$

$$\underline{M} = \mu_o \chi_m \underline{H},$$

dove gli scalari adimensionali χ_e e χ_m prendono il nome di suscettività elettrica e magnetica. Ne segue:

$$\underline{D} = \varepsilon_o(1 + \chi_e)\underline{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \underline{E} = \varepsilon \underline{E},$$

ove $\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$ è la costante dielettrica del mezzo, mentre $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ si dice costante

dielettrica relativa;

$$\underline{B} = \mu_o(1 + \chi_m)\underline{H} = \mu_o \mu_r \underline{H} = \underline{\mu} \underline{H},$$

ove $\mu = \mu_o \mu_r$ è la permeabilità magnetica del mezzo, mentre $\mu_r = 1 + \chi_m$ si dice permeabilità (magnetica) relativa.

Se il mezzo poi è dissipativo, si ha:

$$\underline{J}_c = \underline{\sigma} \underline{E} \rightarrow \text{relazione che rappresenta la legge di Ohm in forma locale.}$$

Nel caso di mezzo non omogeneo l'unica variante rispetto alle relazioni viste è la dipendenza dalla posizione \underline{r} di almeno una delle quantità ε, μ, σ . Se invece ammettiamo che il mezzo sia anisotropo, e ci riferiamo per fissare le idee alla relazione fra \underline{D} ed \underline{E} , la conseguenza è che la permittività diventa una diade (cioè un tensore cartesiano del secondo ordine, avente quindi nove componenti, essendo lo scalare un tensore di ordine zero, e il vettore un tensore del primo ordine: in uno spazio tridimensionale infatti un tensore di ordine n ha 3^n componenti): la sua rappresentazione matematica è una matrice 3×3 . Il caso particolare di matrici diagonali con valori tutti uguali sulla diagonale principale coincide di nuovo con lo scalare che si trova sulla diagonale.

Si ha dunque $\underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E}$, dove il prodotto scalare fra la diade $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e il vettore \underline{E} coincide con l'usuale prodotto righe per colonne fra matrici. In coordinate cartesiane si può scrivere:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{xx} \underline{x}_o \underline{x}_o + \varepsilon_{xy} \underline{x}_o \underline{y}_o + \varepsilon_{xz} \underline{x}_o \underline{z}_o + \varepsilon_{yx} \underline{y}_o \underline{x}_o + \varepsilon_{yy} \underline{y}_o \underline{y}_o + \varepsilon_{yz} \underline{y}_o \underline{z}_o + \varepsilon_{zx} \underline{z}_o \underline{x}_o + \varepsilon_{zy} \underline{z}_o \underline{y}_o + \varepsilon_{zz} \underline{z}_o \underline{z}_o,$$

ove la giustapposizione fra due versori indica il prodotto diadico, ovvero il prodotto matriciale fra un vettore colonna e un vettore riga, il cui risultato è una matrice 3×3 .

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Considerazioni analoghe valgono per la permeabilità e la conducibilità. Risulterà in generale :

$$\underline{B} = \underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H} \quad \underline{J}_c = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E},$$

ove il simbolo di prodotto scalare indica l'usuale prodotto fra matrici.

Nel caso non omogeneo queste diadi potranno essere funzioni di punto.

Consideriamo ora un mezzo lineare, stazionario o no, omogeneo o no, isotropo o no, non dispersivo nello spazio, ma dispersivo nel tempo. Allora l'effetto al generico istante t dipenderà dal valore della causa in tutti gli istanti precedenti t' . Si osservi che in questa situazione, anche nel caso isotropo (permettività scalare), non ci sarà in generale il parallelismo fra $\underline{D}(\underline{r}, t)$ ed $\underline{E}(\underline{r}, t)$ in quanto $\underline{E}(\underline{r}, t)$ non è l'unica causa di $\underline{D}(\underline{r}, t)$. Si avrà una relazione costitutiva del tipo:

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{r}; t, t') \cdot \underline{E}(\underline{r}, t') dt',$$

ove il simbolo di prodotto scalare indica l'usuale prodotto fra matrici.

Nel caso particolare stazionario il tensore $\underline{\underline{\epsilon}}$ non dipenderà separatamente da t e t' , ma dipenderà solo dalla loro differenza $t - t'$. Si tratterà allora di un integrale di convoluzione che gode della comoda proprietà che la sua trasformata di Fourier (quindi la trasformata di Fourier in questo caso di \underline{D}) è pari al prodotto (in questo caso scalare) delle trasformate di $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{r}, t - t')$, rispetto alla variabile $t - t'$, e di $\underline{E}(\underline{r}, t')$ rispetto alla variabile t' . In realtà l'integrale di convoluzione dovrebbe essere per definizione esteso fra $-\infty$ e $+\infty$, ma questo si può facilmente ottenere assumendo che sia $\underline{\underline{\epsilon}} \equiv 0$ per $t' > t$.

Nel caso particolare omogeneo sparirà la dipendenza da \underline{r} , nel caso particolare isotropo sparirà il tensore.

Il caso di dispersività spaziale implicherebbe un'ulteriore integrazione spaziale del tipo:

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{r}, \underline{r}'; t, t') \cdot \underline{E}(\underline{r}', t') dV' dt'.$$

È questa la più generale relazione costitutiva lineare. Nel caso particolare di mezzo omogeneo risulta che $\underline{\underline{\epsilon}}$ dipende non separatamente da \underline{r} , \underline{r}' , ma solo per il tramite della loro distanza $|\underline{r} - \underline{r}'|$. Da questo punto di vista l'omogeneità è come già accennato il corrispondente spaziale della stazionarietà. Relazioni analoghe valgono per \underline{B} e \underline{J}_c :

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V \underline{\underline{\mu}}(\underline{r}, \underline{r}'; t, t') \cdot \underline{H}(\underline{r}', t') dV' dt',$$

$$\underline{J}_c(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^t \int_V \underline{\underline{\sigma}}(\underline{r}, \underline{r}'; t, t') \cdot \underline{E}(\underline{r}', t') dV' dt'.$$

1.7 Condizioni al contorno

Le due equazioni di Maxwell con i rotori, insieme alle relazioni costitutive appena viste, che forniscono le nove equazioni scalari mancanti, possono ora essere risolte, ma avranno in generale una pluralità di soluzioni (una volta assegnate le grandezze impresse). Per selezionare quella del nostro problema particolare occorrerà imporre delle opportune condizioni iniziali e al contorno, che permettono di selezionare, attraverso un teorema di unicità, una sola soluzione. Le condizioni iniziali riguardano il campo elettromagnetico a un certo istante, in tutti i punti dello spazio. Le condizioni al contorno riguardano il campo, in tutti gli istanti, su particolari superfici. Ad esempio è noto (e lo ritroveremo) che sulla superficie di un conduttore perfetto (cioè un mezzo avente conducibilità virtualmente infinita) occorrerà imporre in ogni istante la condizione di annullamento del campo elettrico tangenziale. Esiste poi anche una condizione al contorno cosiddetta all'infinito, che si applica al caso di regioni illimitate.

Normalmente in luogo delle equazioni di Maxwell (che sono del primo ordine accoppiate) viene risolta un'equazione delle onde o di Helmholtz (che è del secondo ordine in una variabile), per ricavare la quale dalle equazioni di Maxwell stesse è necessario come vedremo imporre un requisito sull'omogeneità del mezzo. Nella pratica ovviamente non sempre si avrà a che fare con un unico mezzo omogeneo, ma più spesso con un mezzo per così dire "omogeneo a tratti", cioè costituito da mezzi omogenei tra loro interfacciati. Quello che allora si fa normalmente è risolvere in ciascuna delle regioni l'equazione delle onde, e poi imporre delle condizioni di raccordo alle interfacce fra mezzi diversi. Tali condizioni cosiddette di continuità sono anch'esse degli esempi di condizioni al contorno (in inglese "boundary conditions").

Si è visto nel caso statico che la componente tangenziale di \underline{E} si conserva all'interfaccia, e così pure la componente normale di \underline{D} . Lo stesso valeva per la componente tangenziale di \underline{H} e per la componente normale di \underline{B} . Nel caso dinamico tali relazioni sono confermate, con una certa cautela per la condizione su \underline{H} , nel caso in cui uno dei due mezzi sia un conduttore perfetto e vi sia dunque una distribuzione superficiale di cariche e correnti.

Anzitutto non vi saranno in realtà in natura dei salti bruschi nelle caratteristiche dei mezzi, che porterebbero a derivare delle funzioni discontinue. Supporremo invece che le caratteristiche del mezzo varino con continuità in una regione di transizione di

spessore piccolo, ma finito, che poi sarà fatto tendere a zero mediante un'operazione di passaggio al limite. Supporremo inoltre che la superficie di separazione sia in quiete. L'altra osservazione riguarda la non indipendenza fra le condizioni di continuità, dovuta al fatto che le relazioni per \underline{D} e \underline{B} si ricavano in realtà dalle equazioni di Maxwell con la divergenza, mentre quelle per \underline{E} e \underline{H} si ottengono dalle equazioni con il rotore. Pertanto occorre e basta nel caso dinamico imporre queste ultime e le altre deriveranno di conseguenza, proprio come abbiamo fatto per le equazioni di Maxwell.

Partiamo allora dalla condizione per il campo \underline{H} , che deriva dalla

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t},$$

e consideriamo la regione cilindrica di transizione di altezza $2h$, superficie totale S_t , versore della normale (esterna) \underline{n}_t , superficie laterale S_3 e volume V , posta a cavallo dell'interfaccia. Sulla superficie di base S_1 le caratteristiche sono quelle del mezzo 1, sulla superficie di base S_2 quelle del mezzo 2. Integrando a V l'equazione di Maxwell e usando il teorema del rotore si ha:

$$\begin{aligned} \int_V \nabla \times \underline{H} dV &= \oint_{S_t} \underline{n}_t \times \underline{H} dS = \int_{S_1} \underline{n}_1 \times \underline{H}_1 dS + \int_{S_2} \underline{n}_2 \times \underline{H}_2 dS + \int_{S_3} \underline{n}_3 \times \underline{H}_3 dS = \\ &= \int_V \underline{J} dV + \int_V \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} dV. \end{aligned}$$

Passando ora al limite per $h \rightarrow 0$ si ha:

$$S_1, S_2 \rightarrow S, \quad \underline{H}_2 \rightarrow \underline{H}^+, \quad \underline{H}_1 \rightarrow \underline{H}^-,$$

ove la faccia positiva è quella verso cui è diretto il versore normale \underline{n} . Supponiamo inoltre, come è ragionevole, che \underline{H} e $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$ siano limitati nella regione di transizione, quindi si annulleranno l'integrale esteso a S_3 e l'integrale di $\frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$. La stessa cosa si può dire per l'integrale di \underline{J} se nessuno dei due mezzi è perfettamente conduttore (σ infinita).

Supponiamo ora invece che il mezzo 1, ad esempio, sia perfettamente conduttore. In questo caso alla superficie la densità di corrente può assumere valori infinitamente elevati in spessori infinitesimi e quindi il prodotto di un infinitesimo per un infinito

può dare un valore finito. Si ha dunque:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \underline{J} dV = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^{+h} \underline{J} dh dS = \int_S (\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^{+h} \underline{J} dh) dS = \int_S \underline{J}_S dS,$$

avendo posto $\underline{J}_S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^{+h} \underline{J} dh$. \underline{J}_S è detta densità di corrente superficiale e si misura in Ampère/m.

Si ottiene allora:

$$\int_S \underline{n} \times (\underline{H}^+ - \underline{H}^-) dS = \int_S \underline{J}_S dS,$$

e per l'arbitrarietà della scelta di S risulta :

$$\underline{n} \times (\underline{H}^+ - \underline{H}^-) = \underline{J}_S.$$

Moltiplicando vettorialmente a destra per \underline{n} si ha:

$$[\underline{n} \times (\underline{H}^+ - \underline{H}^-)] \times \underline{n} = \underline{J}_S \times \underline{n}.$$

Si noti a questo proposito che, come è noto, si ha:

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) \neq (\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C}.$$

Però se $\underline{A} \equiv \underline{C}$ risulta:

$$\underline{C} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{C} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{C} \times \underline{B} \times \underline{C},$$

e le parentesi non servono. In particolare se \underline{C} è un versore \underline{v}_o si ha:

$$\underline{v}_o \times \underline{B} \times \underline{v}_o = \underline{B}_\perp,$$

ove \underline{B}_\perp è la componente vettoriale di \underline{B} ortogonale a \underline{v}_o .

Quindi

$$\underline{H}_\tau^+ - \underline{H}_\tau^- = \underline{J}_S \times \underline{n},$$

ove col pedice τ ho indicato la parte tangenziale, per cui alla superficie di separazione tra due mezzi il campo magnetico tangenziale subisce una discontinuità pari alla densità di corrente superficiale ruotata di $\pi/2$ sul piano tangente.

Ripeto ancora che tale discontinuità si verifica soltanto per i conduttori perfetti, come si può assumere siano i metalli (oro, argento, rame,...) alle frequenze delle microonde (intorno a 10 GHz), ma non a frequenze ottiche. Ci sono poi i buoni conduttori (ma non perfetti) per i quali la corrente di conduzione è prevalente (molto maggiore) rispetto alla corrente di spostamento, e i buoni dielettrici per i quali avviene il contrario. In tutti questi casi la componente tangenziale di \underline{H} è continua.

Per dualità, e visto che non possono esistere correnti magnetiche superficiali indotte, il campo elettrico tangenziale (in assenza di correnti magnetiche superficiali impresse) sarà sempre continuo, ciò implica:

$$\underline{n} \times (\underline{E}^+ - \underline{E}^-) = 0 \quad \underline{J}_{mS} \equiv 0$$

ovvero

$$\underline{E}_\tau^+ - \underline{E}_\tau^- = 0.$$

Le condizioni viste valgono per ogni tipo di mezzo perché non sono state tirate in ballo le relazioni costitutive.

In particolare per esempio supponiamo che il mezzo 1 sia un conduttore perfetto ($\sigma \rightarrow \infty$). All'interno del conduttore perfetto il campo \underline{E} dev'essere come è ben noto identicamente nullo, altrimenti per la legge di Ohm locale $\underline{J} = \sigma \underline{E}$ dovrebbe risultare una corrente di volume \underline{J} infinita. Ma allora anche $\nabla \times \underline{E} = 0 \Rightarrow$ in assenza di correnti magnetiche impresse:

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \underline{B} = \text{cost.} \Rightarrow \underline{B} = 0 \Rightarrow \underline{H} = 0, \underline{D} = 0.$$

Si ha allora $\underline{E}^- = 0$ e $\underline{n} \times \underline{E}^+ = 0$, ovvero $\underline{E}_\tau^+ = 0$ (più semplicemente si scrive $\underline{n} \times \underline{E} = 0, \underline{E}_\tau = 0$); $\underline{n} \times \underline{H}^+ = \underline{J}_s$, ovvero $\underline{H}_\tau^+ = \underline{J}_s \times \underline{n}$ (più semplicemente $\underline{n} \times \underline{H} = \underline{J}_s, \underline{H}_\tau = \underline{J}_s \times \underline{n}$) ove i vettori del campo elettromagnetico sono valutati sulla superficie dalla parte del mezzo 2 e il vettore \underline{n} è orientato verso il mezzo 2.

Esaminiamo ora la condizione per l'induzione elettrica \underline{D} . Essa come si è detto non è indipendente dalle precedenti, perché discende dall'equazione $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$. Applicando stavolta il teorema della divergenza al cilindro, si ha:

$$\oint_{S_t} \underline{n}_t \cdot \underline{D} dS = \int_V \rho dV,$$

ossia analogamente a quanto già visto

$$\int_{S_1} \underline{n}_1 \cdot \underline{D}_1 dS + \int_{S_2} \underline{n}_2 \cdot \underline{D}_2 dS + \int_{S_3} \underline{n}_3 \cdot \underline{D}_3 dS = \int_V \rho dV .$$

Eseguendo ancora il passaggio al limite per $h \rightarrow 0$, si suppone che \underline{D} sia limitata nella regione di transizione. Non si potrà invece in generale fare la stessa ipotesi per ρ , se avviene che uno dei due mezzi sia perfettamente conduttore. Si ha in particolare:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_V \rho dV = \lim_{h \rightarrow 0} \int_S \int_{-h}^{+h} \rho dh dS = \int_S \left(\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^{+h} \rho dh \right) dS = \int_S \rho_S dS ,$$

ove $\rho_S = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-h}^{+h} \rho dh$ è detta densità superficiale di carica e si misura in $\frac{\text{Coulomb}}{m^2}$.

Con passaggi già visti segue:

$$\underline{n} \cdot (\underline{D}^+ - \underline{D}^-) = \rho_S ,$$

ove però tranne il caso del conduttore perfetto risulta $\rho_S \equiv 0$. Per dualità, vista l'assenza di cariche magnetiche, si ottiene subito (in assenza di cariche magnetiche superficiali impresse):

$$\underline{n} \cdot (\underline{B}^+ - \underline{B}^-) = 0 ,$$

essendo $\rho_{mS} \equiv 0$.

1.8 Polarizzazione dei vettori

Nel caso in cui una grandezza vettoriale è funzione sinusoidale del tempo, e le sue tre componenti hanno tutte la stessa pulsazione ω , scriveremo:

$$\underline{A}(t) = x_o A_x(t) + y_o A_y(t) + z_o A_z(t) ,$$

$$A_x(t) = |A_x| \cos(\omega t + \varphi_x) = \text{Re} [A_x e^{j\omega t}] ,$$

$$A_y(t) = |A_y| \cos(\omega t + \varphi_y) = \text{Re} [A_y e^{j\omega t}] ,$$

$$A_z(t) = |A_z| \cos(\omega t + \varphi_z) = \text{Re} [A_z e^{j\omega t}] ,$$

avendo definito le quantità scalari complesse (fasori):

$$A_x = |A_x| e^{j\varphi_x} = A_{xR} + jA_{xj},$$

$$A_y = |A_y| e^{j\varphi_y} = A_{yR} + jA_{yj},$$

$$A_z = |A_z| e^{j\varphi_z} = A_{zR} + jA_{zj}.$$

Si introduce ora il vettore (fasore) complesso \underline{A} avente come componenti i fasori delle componenti:

$$\underline{A} = \underline{x}_o A_x + \underline{y}_o A_y + \underline{z}_o A_z = \underline{A}_R + j\underline{A}_j,$$

ove

$$\underline{A}_R = \underline{x}_o A_{xR} + \underline{y}_o A_{yR} + \underline{z}_o A_{zR},$$

$$\underline{A}_j = \underline{x}_o A_{xj} + \underline{y}_o A_{yj} + \underline{z}_o A_{zj}.$$

La relazione fra il vettore complesso e quello nel tempo è la consueta, essendo i versori delle quantità reali:

$$\underline{A}(t) = \text{Re} [\underline{A} e^{j\omega t}] = \text{Re} [\underline{A}_R e^{j\omega t} + j\underline{A}_j e^{j\omega t}] = \underline{A}_R \cos(\omega t) - \underline{A}_j \sin(\omega t).$$

I vettori \underline{A}_R e \underline{A}_j , che non dipendono dal tempo, individuano un piano nel quale l'estremo libero di $\underline{A}(t)$ descrive un luogo geometrico al variare del tempo. Si può verificare che tale luogo geometrico è un'ellisse. Per mostrarlo, consideriamo sul piano \underline{A}_R , \underline{A}_j un sistema di riferimento cartesiano x , y avente l'asse x coincidente con la direzione di \underline{A}_R . Indichiamo inoltre con θ l'angolo orientato fra la direzione di \underline{A}_R e quella di \underline{A}_j . Le coordinate dell'estremo libero del vettore $\underline{A}(t)$ sono espresse da:

$$x(t) = A_R \cos(\omega t) - A_j \cos \theta \sin(\omega t),$$

$$y(t) = -A_j \sin \theta \sin(\omega t),$$

che rappresentano le equazioni parametriche del luogo geometrico cercato.

Come è ben noto, per ottenere l'equazione cartesiana del luogo è necessario eliminare la variabile t . Ricavando $\sin(\omega t)$ dalla seconda equazione si ha:

$$\sin(\omega t) = -\frac{y}{A_j \sin \theta},$$

e sostituendo nella prima equazione ottengo:

$$A_R \cos(\omega t) = x - \frac{y}{\sin \theta} \cos \theta = x - y \cot \theta.$$

Elevando al quadrato si ottiene:

$$A_R^2 \cos^2(\omega t) = A_R^2 [1 - \sin^2(\omega t)] = A_R^2 \left(1 - \frac{y^2}{A_j^2 \sin^2 \theta} \right) = x^2 - 2xy \cot \theta + y^2 \cot^2 \theta$$

e ordinando

$$x^2 - 2xy \cot \theta + y^2 \left(\cot^2 \theta + \frac{A_R^2}{A_j^2 \sin^2 \theta} \right) = A_R^2,$$

che rappresenta l'equazione di una conica, nella forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

il cui discriminante $b^2 - 4ac$ risulta:

$$4 \cot^2 \theta - 4 \left(\cot^2 \theta + \frac{A_R^2}{A_j^2 \sin^2 \theta} \right) = -\frac{4A_R^2}{A_j^2 \sin^2 \theta} < 0,$$

e dunque si tratta di un'ellisse, come del resto si poteva intuire visto che le coordinate dell'estremo libero si devono mantenere sempre limitate (ipotizzando che \underline{A} sia il vettore rappresentativo di una grandezza fisica) e quindi l'unica possibilità è l'ellisse. Si dice allora che il vettore $\underline{A}(t)$ è polarizzato ellitticamente.

Ci sono due importanti casi particolari: se $\theta = \pm\pi/2$ (cioè $\underline{A}_R \perp \underline{A}_j$) e inoltre $A_R = A_j$ segue l'equazione $x^2 + y^2 = A_R^2$ che rappresenta una circonferenza. In tal caso si dice che $\underline{A}(t)$ è polarizzato circolarmente. In particolare se $\theta = +\pi/2$, l'estremo libero di $\underline{A}(t)$ descrive la circonferenza in verso orario, se $\theta = -\pi/2$ in verso antiorario. In letteratura si parla anche rispettivamente di polarizzazione destra o sinistra.

L'altro caso notevole è quando $\underline{A}_R \times \underline{A}_j = 0$, ossia in uno dei casi $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\underline{A}_R = 0$, oppure $\underline{A}_j = 0$ (in questi ultimi due casi θ è indeterminato). In tale caso l'estremo libero di $\underline{A}(t)$ descrive un segmento di retta (in cui degenera l'ellisse) e si dice che $\underline{A}(t)$ è polarizzato linearmente.

Si noti che moltiplicando il vettore (fasore) complesso \underline{A} per una quantità scalare in generale complessa C si ottiene il fasore di un vettore funzione del tempo che ha

le stesse caratteristiche di polarizzazione di $\underline{A}(t)$. Infatti se poniamo $\underline{B} = C\underline{A}$, ne segue:

$$\begin{aligned}\underline{B}(t) &= \text{Re} [\underline{B} e^{j\omega t}] = \text{Re} [|C| e^{j\varphi_c} \underline{A} e^{j\omega t}] = \text{Re} [|C| \underline{A} e^{j(\omega t + \varphi_c)}] = \\ &= |C| \text{Re} \left[\underline{A} e^{j\omega(t + \varphi_c/\omega)} \right] = |C| \underline{A} \left(t + \frac{\varphi_c}{\omega} \right).\end{aligned}$$

Pertanto $\underline{B}(t)$ si ottiene da $\underline{A}(t)$ moltiplicandolo per un fattore reale positivo $|C|$ e traslandolo nel tempo della quantità φ_c/ω . Tali operazioni evidentemente non alterano le caratteristiche di polarizzazione del vettore. Dunque è sempre la parte vettoriale (e non quella scalare) di una certa grandezza ad essere responsabile della polarizzazione.

Si noti inoltre che se le nostre considerazioni si applicano a campi vettoriali funzioni di punto e del tempo, il vettore fasore \underline{A} e i vettori \underline{A}_R e \underline{A}_j saranno in generale delle funzioni di punto e vi saranno dei luoghi geometrici in cui la polarizzazione è circolare, oppure lineare. Nel caso particolare importante delle onde piane, invece, come si vedrà nel seguito, una data polarizzazione risulta la stessa in tutti i punti dello spazio.

Nel caso di fenomeni oscillatori smorzati (presenza di meccanismi di perdita), che si possono schematizzare con una pulsazione complessa $\omega = \omega_R + j\omega_j$, l'estremo libero di $\underline{A}(t)$ descrive una spirale nel piano individuato da \underline{A}_R , \underline{A}_j . Mentre per una dipendenza dal tempo più generale, il luogo geometrico descritto non è neppure una curva piana.

1.9 Equazioni di Maxwell e relazioni costitutive nel dominio della frequenza

Considerando ora per i nostri campi una dipendenza dal tempo più generale di quella sinusoidale, ossia una dipendenza dal tempo qualsiasi purché Fourier-trasformabile, possiamo considerare in luogo delle varie grandezze nel tempo le loro trasformate di Fourier, e in luogo delle derivate rispetto al tempo nelle varie equazioni la moltiplicazione per il fattore $j\omega$ (quindi si trasforma un'equazione differenziale in una algebrica, oppure in una differenziale per le altre variabili). Con riferimento per

esempio al campo elettrico, definiamo la trasformata di Fourier vettoriale:

$$\underline{E}(\underline{r}, \omega) = \mathfrak{F}[\underline{E}(\underline{r}, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(\underline{r}, t) e^{-j\omega t} dt,$$

con la relativa antitrasformata:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(\underline{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

ove quest'ultimo è in realtà un integrale improprio (integrale principale di Cauchy).

Con queste trasformazioni le equazioni di Maxwell diventano:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\underline{J}_{mi} - j\omega \underline{B} \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + \underline{J}_c + j\omega \underline{D} \end{cases}.$$

Si noti che la stessa forma delle equazioni si ha nel caso particolare monocromatico (metodo dei fasori). Le grandezze però sono concettualmente diverse e hanno ad esempio diverse dimensioni fisiche: infatti mentre il fasore di \underline{E} ha le stesse dimensioni del vettore nel tempo, la trasformata di Fourier di \underline{E} ha le dimensioni $(V/m) \cdot sec$, e così per le altre grandezze.

Vediamo ora come cambiano le relazioni costitutive nel dominio trasformato. Nel caso di mezzo *non dispersivo* nel tempo, ma in generale dissipativo, non omogeneo e anisotropo, si hanno le relazioni:

$$\underline{D}(\underline{r}, \omega) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega),$$

$$\underline{B}(\underline{r}, \omega) = \underline{\underline{\mu}}(\underline{r}) \cdot \underline{H}(\underline{r}, \omega),$$

$$\underline{J}_c(\underline{r}, \omega) = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega),$$

ove le diadi $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\mu}}$ e $\underline{\underline{\sigma}}$ sono quantità *reali e indipendenti da ω* . Si verifica inoltre che $\underline{\underline{\varepsilon}}$ e $\underline{\underline{\mu}}$ sono tensori simmetrici, e tale si può dimostrare dover essere $\underline{\underline{\sigma}}$ in virtù di proprietà di simmetria dei mezzi cristallini. Nel caso particolare omogeneo sparisce la dipendenza da \underline{r} , nel caso isotropo spariscono i tensori.

Se ora invece vogliamo considerare il caso di mezzo dispersivo nel tempo, si verifica che nel dominio trasformato le relazioni costitutive sono molto più semplici che nel dominio del tempo, se vale l'ipotesi di stazionarietà. Infatti, considerando

per esempio la

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}, t - t') \cdot \underline{E}(\underline{r}, t') dt',$$

che rappresenta un integrale di convoluzione (mezzo stazionario), passando nel dominio trasformato si ottiene il prodotto delle trasformate:

$$\underline{D}(\underline{r}, \omega) = \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}, \omega) \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega),$$

ove si osservi che $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}, \omega)$ è una funzione diadica *complessa* del punto e della *pulsazione*, le cui componenti sono le trasformate di Fourier delle componenti $\varepsilon_{ij}(\underline{r}, t - t')$ del tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{r}, t - t')$ rispetto alla variabile $t - t'$. Le solite semplificazioni si verificano nei casi omogeneo e isotropo, rimanendo comunque sempre il fatto essenziale che la costante dielettrica è ora complessa e dipendente da ω . Ovviamente considerazioni analoghe valgono per le relazioni fra \underline{B} e \underline{H} e fra \underline{J}_c ed \underline{E} .

Nel caso di fenomeni smorzati, si può intuire che la pulsazione divenga complessa, mentre come è noto la trasformata di Fourier richiede una variabile trasformata reale. Comunque in questo caso è sempre possibile una trattazione matematica con l'impiego della trasformata di Laplace, nella quale la variabile trasformata risulta complessa.

1.10 Mezzi dispersivi

Le relazioni costitutive viste finora rappresentano *il risultato dello studio del legame causa-effetto che sussiste tra le grandezze fisiche*. Vediamo un esempio in cui l'esame diretto del fenomeno permette di determinare l'espressione dei parametri e in particolare della costante dielettrica, con riferimento quindi ancora alla relazione fra \underline{D} ed \underline{E} .

Consideriamo in particolare il cosiddetto modello di Lorentz per lo studio della polarizzazione dielettrica. Si prende in esame un mezzo dielettrico non polare, in cui il baricentro delle cariche elettriche vincolate (le cariche libere danno luogo ai fenomeni di conducibilità) positive e quello delle negative coincidono in assenza di campo elettrico applicato. Sotto l'azione di un campo elettrico $\underline{E} = E \underline{e}_o$ (ove \underline{e}_o è il versore del campo elettrico stesso) i due baricentri si spostano l'uno rispetto all'altro di una distanza ℓ , dando origine a un dipolo elettrico di momento $q \ell \underline{e}_o$.

Se supponiamo di avere N dipoli uguali per unità di volume, il vettore intensità

di polarizzazione \underline{P} , che come è noto rappresenta il momento di dipolo per unità di volume, è dato da $\underline{P} = N q \ell \underline{e}_o = P \underline{e}_o$. Per ricavare la relazione fra \underline{P} ed \underline{E} , si consideri il movimento della carica $-q$ rispetto alla $+q$. Tale movimento si svolge nella direzione del campo applicato, ma in verso opposto (quindi lo spostamento della carica sarà $\underline{\ell} = -\ell \underline{e}_o$), sotto l'azione di varie forze, e in particolare la forza di Coulomb $-q \underline{E} = -q E \underline{e}_o$, oltre a una forza di richiamo che tende a riportare le due cariche nella posizione di equilibrio, cioè a farle coincidere: tale forza è, per piccoli valori di ℓ , una funzione crescente di ℓ che può essere approssimata (sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine, quindi linearizzazione) con $-k \underline{\ell} = k \ell \underline{e}_o$ e quindi come una forza elastica. Infine si avrà in generale una forza di smorzamento, dovuta alle collisioni (e quindi un termine dissipativo, che indica un trasferimento di energia da una forma a un'altra). Tale forza di smorzamento può essere ritenuta proporzionale alla velocità $\frac{d\ell}{dt}$ della carica, ed espressa da $-\beta \underline{v} = -\beta \frac{d\ell}{dt} = \beta \frac{d\ell}{dt} \underline{e}_o$ (attrito viscoso).

A questo punto applicando la seconda legge della dinamica $\underline{F} = m \underline{a}$ (ove $\underline{a} = \frac{d^2 \ell}{dt^2} = -\frac{d^2 \ell}{dt^2} \underline{e}_o$) proiettata nella direzione \underline{e}_o si ha:

$$-m \frac{d^2 \ell}{dt^2} = -q E + k \ell + \beta \frac{d\ell}{dt}.$$

Moltiplicando per $-N q$ e riarrangiando in termini della funzione ℓ e delle sue derivate si ha:

$$m N q \frac{d^2 \ell}{dt^2} + \beta N q \frac{d\ell}{dt} + k N q \ell = N q^2 E.$$

Ma ricordando che $P = N q \ell$ segue:

$$m \frac{d^2 P}{dt^2} + \beta \frac{dP}{dt} + k P = N q^2 E,$$

che è una relazione costitutiva $P = P(E)$ scritta sotto forma di equazione differenziale. Tra parentesi questo significa che se voglio ottenere la funzione $P = P(E)$ rimanendo nel dominio del tempo devo risolvere questa equazione differenziale, e naturalmente in qualche maniera dovrò integrare. Ecco il perché delle relazioni costitutive viste precedentemente in forma integrale.

Qui però decidiamo di passare nel dominio della frequenza e la nostra equazione differenziale diventa un'equazione algebrica

$$(-m\omega^2 + j\beta\omega + k)P = N q^2 E,$$

essendo ora P ed E le grandezze trasformate. La soluzione a questo punto è immediata:

$$P = \frac{N q^2}{k - m \omega^2 + j \beta \omega} E = \frac{N q^2}{m} \frac{1}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j \frac{\beta}{m} \omega} E = \frac{N q^2}{m} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2j \alpha \omega} E,$$

avendo posto

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

detta pulsazione di risonanza (si ricordi la teoria dell'oscillatore armonico) e

$$2\alpha = \frac{\beta}{m}$$

termine di smorzamento dovuto alla presenza di dissipazioni (fenomeni di perdita); risulta in genere $\alpha < \omega_o$.

Introducendo l'espressione di P appena trovata nella relazione costitutiva trasformata $\underline{D} = \varepsilon_o \underline{E} + \underline{P}$ si ottiene:

$$\underline{D} = \left[\varepsilon_o + \frac{N q^2}{m} \frac{1}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2j \alpha \omega} \right] \underline{E}.$$

Dunque per il modello considerato il mezzo è un dielettrico dispersivo nel tempo ma stazionario, la cui costante dielettrica è complessa e dipendente da ω :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_o + \frac{N q^2}{m} \frac{(\omega_o + \omega)(\omega_o - \omega) - 2j \alpha \omega}{(\omega_o + \omega)^2 (\omega_o - \omega)^2 + 4 \alpha^2 \omega^2} = \varepsilon_R(\omega) + j \varepsilon_j(\omega),$$

con

$$\varepsilon_R(\omega) = \varepsilon_o + \frac{N q^2}{m} \frac{(\omega_o + \omega)(\omega_o - \omega)}{(\omega_o + \omega)^2 (\omega_o - \omega)^2 + 4 \alpha^2 \omega^2},$$

$$\varepsilon_j(\omega) = - \frac{N q^2}{m} \frac{2 \alpha \omega}{(\omega_o + \omega)^2 (\omega_o - \omega)^2 + 4 \alpha^2 \omega^2}.$$

Antitrasformando la $\varepsilon(\omega)$ potrei ottenere la $\varepsilon(t)$ da usare nella

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \int_{-\infty}^t \varepsilon(t - t') \underline{E}(\underline{r}, t') dt'.$$

Osserviamo ora che nel campo di frequenze $\omega \ll \omega_o$ si ha:

$$\varepsilon_R(\omega) \simeq \varepsilon_o + \frac{N q^2}{m} \frac{1}{\omega_o^2} \quad \varepsilon_j(\omega) \simeq 0,$$

mentre per $\omega \gg \omega_o$ si ha

$$\varepsilon_R(\omega) = \varepsilon_o - \frac{N q^2}{m} \frac{1}{\omega^2} \quad \varepsilon_j(\omega) \simeq 0,$$

e in particolare $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_o$.

Nei dintorni della pulsazione di risonanza $\omega \simeq \omega_o$ e risulta:

$$\varepsilon_R(\omega) \simeq \varepsilon_o + \frac{N q^2}{m} \frac{1}{2\omega_o} \frac{\omega_o - \omega}{(\omega_o - \omega)^2 + \alpha^2}$$

$$\varepsilon_R(\omega_o) = \varepsilon_o,$$

$$\varepsilon_j(\omega) \simeq -\frac{N q^2}{m} \frac{1}{2\omega_o} \frac{\alpha}{(\omega_o - \omega)^2 + \alpha^2}$$

$$\varepsilon_j(\omega_o) = -\frac{N q^2}{m 2\omega_o \alpha}.$$

L'andamento di $\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_o}$ e di $\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_o}$ in funzione di $\frac{\omega}{\omega_o}$ (conviene sempre ricondursi a quantità normalizzate, e quindi adimensionali, per cui mi affranco dalle unità di misura e considero numeri puri, che hanno un qualche significato in sé) è rappresentato in figura. ε_R ed ε_j vengono spesso in letteratura chiamate ε' e $-\varepsilon''$, e si

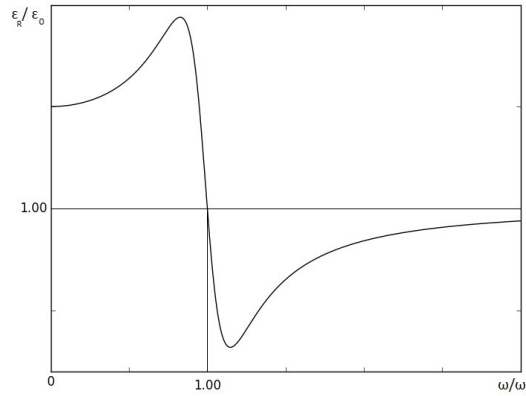


Figura 1.1: Andamento di $\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_o}$ in funzione di $\frac{\omega}{\omega_o}$.

pone $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$ per mettere in luce la presenza di una parte immaginaria negativa.

Per quanto riguarda la parte immaginaria, cambiata di segno per semplicità, si tratta di una curva a campana centrata su ω_o , denominata appunto lorentziana, caratterizzata dal fatto che diventa più alta e stretta al diminuire di α (cioè delle

perdite). Questo ci fa pensare subito alla funzione di Dirac, e infatti si dimostra che $\lim_{\alpha \rightarrow 0} [-\varepsilon_j(\omega)] = \pi \frac{Nq^2}{m2\omega_o} \delta(\omega - \omega_o)$. Si noti che questo è vero solo come passaggio al limite, perché se $\alpha = 0$ sin dall'inizio, risulta $\varepsilon_j(\omega) \equiv 0$.

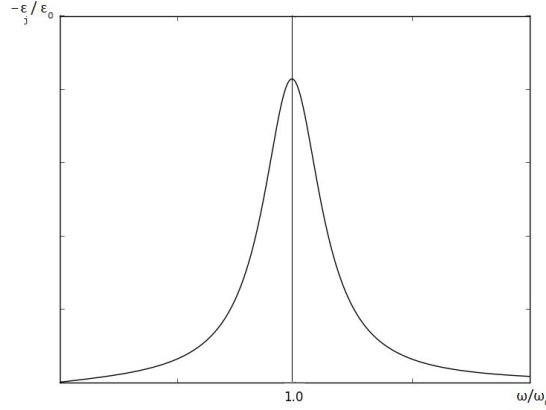


Figura 1.2: Andamento di $-\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_o}$ in funzione di $\frac{\omega}{\omega_o}$

Si noti una caratteristica generale: la presenza di una parte immaginaria diversa da zero è legata a fenomeni di perdita, di natura diversa dalle perdite per conduzione. Sono questi ad esempio i meccanismi sfruttati nel riscaldamento (ad esempio dei cibi) a microonde. Inoltre il segno negativo è significativo del fatto che si tratta di una potenza dissipata, come sarà chiaro nella successiva discussione del teorema di Poynting complesso. Tuttavia si potrebbe dimostrare che non può mai accadere che $\varepsilon_j(\omega) \equiv 0$ (il che poi è fisicamente plausibile perché non esisteranno mai mezzi materiali senza perdite) a causa delle cosiddette relazioni di Kramers-Krönig, che sono delle relazioni che legano la parte reale e la parte immaginaria di ε , e che stabiliscono che se la parte immaginaria fosse identicamente nulla, dovrebbe esserlo anche la parte reale. Queste proprietà sono di validità molto generale, per tutte le risposte in frequenza dei sistemi lineari e stazionari.

Si noti infine che l'andamento osservato per $\omega \rightarrow \infty$ ($\varepsilon_R \rightarrow \varepsilon_o$ e $\varepsilon_j \rightarrow 0$, per cui $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_o$) corrisponde al fatto che a frequenze molto alte i dipoli elementari non sono più in grado di seguire le oscillazioni del campo e il comportamento del dielettrico viene a coincidere con quello del vuoto.

Per quanto riguarda la permeabilità magnetica e la relazione costitutiva che lega \underline{M} ad \underline{H} si può studiare ad esempio un mezzo, detto ferrite magnetizzata, che risulta anisotropo e dispersivo nel tempo, cioè gli elementi della matrice $\underline{\underline{\mu}} = \mu_o \underline{\underline{\mu}}_r$ o almeno alcuni di essi risultano in generale funzioni complesse di ω . Risulta in coordinate

cartesiane:

$$\underline{\underline{\mu}}_r(\omega) = \begin{pmatrix} \mu_1(\omega) & j\mu_2(\omega) & 0 \\ -j\mu_2(\omega) & \mu_1(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con μ_1, μ_2 complesse.

Nel caso particolare di assenza di perdite le funzioni $\mu_1(\omega)$ e $\mu_2(\omega)$ diventano reali, e allora la matrice $\underline{\underline{\mu}}_r$ diventa una matrice cosiddetta hermitiana, cioè gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono complessi coniugati (e quindi gli elementi diagonali devono essere reali):

$$a_{ij} = a_{ji}^*$$

Si noti che nel caso particolare di matrici reali (cioè ad elementi reali) i concetti di matrice hermitiana e simmetrica coincidono. Troveremo più avanti ancora associate l'hermitianità della matrice e l'assenza di perdite (è un legame generale).

Sulle condizioni al contorno solo due parole: coincidono con quelle nel dominio del tempo, solo che valgono per le grandezze trasformate.

1.11 Teorema di Poynting

Ricaveremo ora una relazione integrale cui deve soddisfare ogni soluzione delle equazioni di Maxwell: il teorema di Poynting, di fondamentale importanza per la sua interpretazione energetica. Tale teorema si può stabilire sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza.

1.11.1 Teorema di Poynting nel dominio del tempo

Si consideri inizialmente il dominio del tempo. Partiamo ancora dalle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\underline{J}_{mi} - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + \underline{J}_c + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \end{cases}.$$

Moltiplichiamo la prima scalarmente per \underline{H} , la seconda scalarmente per \underline{E} e sottraiamo membro a membro. Si ottiene:

$$\underline{H} \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H} = -\underline{J}_{mi} \cdot \underline{H} - \underline{J}_i \cdot \underline{E} - \underline{J}_c \cdot \underline{E} - \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} - \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}.$$

A questo punto evochiamo la relazione vettoriale per la divergenza di un prodotto vettoriale $\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{B}$. Dunque il primo membro dell'uguaglianza vista risulta pari a $\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H})$. Possiamo a questo punto integrare a un generico volume V , racchiuso da una superficie chiusa S , e poi applicare al primo membro il teorema della divergenza. Si ha:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \underline{E} \times \underline{H} \, dS + \int_V \underline{J}_c \cdot \underline{E} \, dV + \int_V \left(\underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \right) dV = - \int_V (\underline{J}_i \cdot \underline{E} + \underline{J}_{mi} \cdot \underline{H}) \, dV.$$

La grandezza $\underline{E} \times \underline{H} = \underline{P}$ che ha le dimensioni di $\frac{V \cdot A}{m^2} = \frac{Watt}{m^2}$, e quindi di una potenza per unità di superficie, cioè di una densità superficiale di potenza, si chiama vettore di Poynting.

La quantità $\underline{J}_c \cdot \underline{E}$ rappresenta fisicamente la potenza per unità di volume (densità di potenza, $\frac{Watt}{m^3}$) fornita dal campo elettromagnetico alla densità di corrente di conduzione \underline{J}_c . Tale potenza viene dissipata per effetto Joule, e quindi convertita in calore. Ricordiamo infatti l'espressione della forza di Lorentz che agisce su una carica puntiforme q , la quale si muove con velocità \underline{v} :

$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}).$$

La potenza fornita dal campo elettromagnetico alla carica è data dal prodotto

$$P = \underline{F} \cdot \underline{v} = q(\underline{v} \cdot \underline{E} + \underline{v} \cdot \underline{v} \times \underline{B}) = q \underline{v} \cdot \underline{E},$$

per le note proprietà del prodotto misto. In maniera analoga, se considero la densità di carica ρ , essa sarà soggetta a una densità di forza \underline{f} (forza per unità di volume) pari a $\rho(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$, cui corrisponderà una densità di potenza fornita dal campo elettromagnetico pari a $p_c = \rho \underline{v} \cdot \underline{E} = \underline{J}_c \cdot \underline{E}$ essendo $\underline{J}_c = \rho \underline{v}$ la densità di corrente (di convezione) rappresentata dalla densità di carica in movimento.

In modo analogo il termine $p_i = -\underline{J}_i \cdot \underline{E}$ esprime, per il principio di azione e reazione (in virtù del segno meno), la densità di potenza fornita al campo dalla densità di corrente elettrica impressa. E per dualità il termine $p_{mi} = -\underline{J}_{mi} \cdot \underline{H}$ rappresenta la densità di potenza fornita al campo dalla densità di corrente magnetica impressa.

Nel caso di un mezzo isotropo, non dispersivo, ma dissipativo per conducibilità,

si ha:

$$p_c = \sigma \underline{E} \cdot \underline{E} = \sigma E^2 = \sigma(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2).$$

Dunque la p_c è una forma quadratica definita positiva delle componenti di \underline{E} . Infatti per un mezzo passivo (cioè che non simuli un generatore, per cui $\sigma > 0$) si ha $p_c > 0$ e $p_c = 0 \Leftrightarrow E_x = E_y = E_z = 0$.

Nel caso anisotropo la conducibilità è un tensore e si ha:

$$p_c = (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}) \cdot \underline{E} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_j \right) E_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} E_i E_j,$$

ancora una forma quadratica delle componenti di \underline{E} , che deve essere necessariamente definita positiva per un mezzo passivo. Ciò è equivalente, per le proprietà delle forme quadratiche, a richiedere che gli autovalori della matrice $\underline{\underline{\sigma}}$ in mezzi passivi siano tutti positivi (e quindi anzitutto reali).

Consideriamo ora il termine $p_E = \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$. Per mezzi isotropi e non dispersivi si ha:

$$p_E = \varepsilon \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 \right).$$

La quantità $w_E = \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D}$ rappresenta, come è noto dai corsi di Fisica, la densità di energia elettrica ($Joule/m^3$) immagazzinata, cioè l'energia elettrica immagazzinata nell'unità di volume. Essa dipende solo dal valore attuale di \underline{E} (è cioè una funzione di stato) ed è una forma quadratica definita positiva delle componenti di \underline{E} . Si ha allora:

$$p_E = \frac{\partial w_E}{\partial t},$$

e dunque p_E rappresenta la densità di potenza elettrica immagazzinata.

In modo duale il termine

$$p_H = \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

rappresenta la densità di potenza magnetica immagazzinata. Per mezzi isotropi e non dispersivi si ha:

$$p_H = \mu \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu \underline{H} \cdot \underline{H} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{H} \cdot \underline{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu H^2 \right).$$

La quantità $w_H = \frac{1}{2} \underline{H} \cdot \underline{B}$ rappresenta come è noto la densità di energia magnetica

immagazzinata. Essa dipende solo dal valore attuale di \underline{H} (è cioè una funzione di stato) ed è una forma quadratica definita positiva delle componenti di \underline{H} . Si ha dunque:

$$p_H = \frac{\partial w_H}{\partial t}.$$

Nel caso anisotropo le relazioni viste continuano a valere con l'inserimento dei tensori e si ha:

$$w_E = \frac{1}{2} \underline{E} \cdot (\underline{\varepsilon} \cdot \underline{E}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 E_i \left(\sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} E_i E_j,$$

e analogamente:

$$w_H = \frac{1}{2} \underline{H} \cdot (\underline{\mu} \cdot \underline{H}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mu_{ij} H_i H_j.$$

Tali forme quadratiche devono ancora, per il loro significato fisico di energie, essere definite positive. Questo pone dei vincoli ai tensori $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\mu}$, in quanto i loro autovalori debbono risultare tutti positivi.

Inoltre si può dimostrare che tali tensori devono risultare simmetrici (cioè matrici reali simmetriche, e dunque autovalori reali) affinché le energie siano appunto funzioni di stato (dipendenza solo dagli stati iniziale e finale, ma non dalla trasformazione seguita, assenza cioè di fenomeni di isteresi).

Nei mezzi dispersivi, infine, non è possibile definire delle energie come funzioni di stato.

Rimane da interpretare il termine che esprime il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie chiusa S . Visto il significato degli altri termini, in realtà il teorema di Poynting esprime il bilancio di potenza del campo elettromagnetico. Il secondo membro dell'uguaglianza rappresenta la potenza fornita dalle correnti impresse (cioè dalle sorgenti) al campo elettromagnetico. Per il principio di conservazione dell'energia i vari termini del primo membro esprimono le utilizzazioni o destinazioni di tale potenza. In particolare il flusso di \underline{P} rappresenta la potenza uscente (o entrante) attraverso la superficie chiusa S .

Si osservi che è però un errore in generale attribuire alla quantità $\underline{n} \cdot \underline{P}$ il significato di potenza che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione di \underline{n} . Basti pensare a un campo statico generato da cariche elettrostatiche e magneti

permanenti (quindi assenza di correnti). I campi \underline{E} , \underline{H} saranno in generale diversi da zero e non paralleli. Sarà perciò in generale diverso da zero il flusso di \underline{P} attraverso una superficie aperta unitaria. Ciò non corrisponde però a una potenza irradiata, in quanto le origini del campo sono statiche. Il flusso di \underline{P} attraverso una superficie chiusa risulta infatti nullo. Si ha:

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad \nabla \times \underline{H} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \underline{P} = 0 \quad \Rightarrow \oint_S \underline{n} \cdot \underline{P} dS = 0.$$

Si noti che:

$$\underline{n} \cdot \underline{P} = \underline{n} \cdot \underline{E} \times \underline{H} = \underline{n} \cdot \underline{E}_\tau \times \underline{H}_\tau,$$

dunque non ci può essere flusso di potenza all'interno di un conduttore perfetto ($\underline{E}_\tau = 0$). I conduttori nelle linee elettriche hanno dunque come è noto solo la funzione di guidare l'energia, che si trasmette in realtà attraverso il dielettrico interposto.

1.11.2 Teorema di Poynting nel dominio della frequenza

Passiamo ora a considerare il teorema di Poynting nel dominio della frequenza. Si parte stavolta dalle equazioni di Maxwell trasformate:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\underline{J}_{mi} - j\omega \underline{B} \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + \underline{J}_c + j\omega \underline{D} \end{cases}.$$

Moltiplichiamo scalarmente la prima equazione per \underline{H}^* , mentre coniughiamo la seconda³e poi la moltiplichiamo per \underline{E} :

$$\begin{aligned} \underline{H}^* \cdot \nabla \times \underline{E} &= -\underline{H}^* \cdot \underline{J}_{mi} - j\omega \underline{H}^* \cdot \underline{B}, \\ \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}^* &= \underline{E} \cdot \underline{J}_i^* + \underline{E} \cdot \underline{J}_c^* - j\omega \underline{E} \cdot \underline{D}^*. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro si ha:

$$\underline{H}^* \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}^* = -\underline{J}_{mi} \cdot \underline{H}^* - \underline{J}_i^* \cdot \underline{E} - \underline{J}_c^* \cdot \underline{E} - j\omega \underline{B} \cdot \underline{H}^* + j\omega \underline{E} \cdot \underline{D}^*.$$

³Si noti che ∇ è un operatore cosiddetto reale, in quanto è costituito da derivazioni rispetto a variabili reali e da versori reali, e quindi se opera su una funzione reale porge come risultato un'altra funzione reale. Si dice anche che il ∇ commuta con l'operazione di coniugazione:

$$(\nabla \times \underline{H})^* = \nabla \times \underline{H}^* = \underline{J}_i^* + \underline{J}_c^* - j\omega \underline{D}^*.$$

A questo punto procediamo come per l'analogo teorema nel dominio del tempo e dividiamo per 2, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_S \underline{n} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS + \frac{1}{2} \int_V \underline{J}_c^* \cdot \underline{E} dV + \frac{j\omega}{2} \int_V (\underline{B} \cdot \underline{H}^* - \underline{E} \cdot \underline{D}^*) dV = \\ = -\frac{1}{2} \int_V (\underline{J}_i^* \cdot \underline{E} + \underline{J}_{mi} \cdot \underline{H}^*) dV. \end{aligned}$$

Poniamo ora:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* & p_i &= -\frac{1}{2} \underline{J}_i^* \cdot \underline{E} \\ p_c &= \frac{1}{2} \underline{J}_c^* \cdot \underline{E} & p_{mi} &= -\frac{1}{2} \underline{J}_{mi} \cdot \underline{H}^* \\ p_H &= \frac{j\omega}{2} \underline{B} \cdot \underline{H}^* \\ p_E &= -\frac{j\omega}{2} \underline{E} \cdot \underline{D}^* \end{aligned},$$

ottenendo la forma più compatta:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \underline{P} dS + \int_V p_c dV + \int_V (p_H + p_E) dV = \int_V (p_i + p_{mi}) dV.$$

Questa relazione, il teorema di Poynting complesso, è valida sia nel caso di grandezze sinusoidali (fasori), sia nel dominio della trasformata di Fourier. Invece la seguente interpretazione del teorema vale soltanto in regime armonico, perché coinvolge le formule dei fasori.

Prendiamo ad esempio il termine relativo al flusso del vettore di Poynting nel dominio del tempo $\oint_S \underline{n} \cdot \underline{E} \times \underline{H} dS$ e di questo consideriamo il valor medio nel periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, definendolo al solito, per una generica funzione del tempo $f(t)$, come $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \overline{f(t)}$. Nell'ipotesi che il volume V e la superficie S siano in quiete, posso invertire gli integrali spaziale e temporale e quindi trasportare l'operazione di media sul prodotto $\underline{E}(r, t) \times \underline{H}(r, t)$. Sfruttando ora la relazione con i fasori si ha:

$$\begin{aligned} \underline{E}(r, t) \times \underline{H}(r, t) &= \text{Re} \left[\underline{E}(r) e^{j\omega t} \right] \times \frac{1}{2} \left[\underline{H}(r) e^{j\omega t} + \underline{H}^*(r) e^{-j\omega t} \right] = \\ &= \text{Re} \left[\frac{1}{2} \underline{E}(r) \times \underline{H}(r) e^{2j\omega t} \right] + \text{Re} \left[\frac{1}{2} \underline{E}(r) \times \underline{H}^*(r) \right], \end{aligned}$$

ove ho portato dentro la parte reale una quantità reale (la semisomma di due coniugati) e ho sfruttato la linearità dell'operatore parte reale. Calcolando ora la media si ottiene:

$$\overline{\underline{E}(\underline{r}, t) \times \underline{H}(\underline{r}, t)}^t = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \underline{E}(\underline{r}) \times \underline{H}^*(\underline{r}) \right],$$

in quanto il fattore $e^{2j\omega t}$ ha valor medio nullo. Abbiamo quindi trovato che la parte reale del vettore di Poynting complesso è uguale alla media nel periodo del vettore di Poynting nel dominio del tempo. Si noti peraltro che il vettore di Poynting complesso non risulta essere il fasore del corrispondente vettore nel dominio del tempo.

In modo del tutto analogo si può dimostrare lo stesso risultato per gli altri termini senza derivate, e quindi:

$$\begin{aligned} \overline{-\underline{J}_i(\underline{r}, t) \cdot \underline{E}(\underline{r}, t)}^t &= \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} \underline{J}_i^*(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) \right], \\ \overline{-\underline{J}_{mi}(\underline{r}, t) \cdot \underline{H}(\underline{r}, t)}^t &= \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} \underline{J}_{mi}(\underline{r}) \cdot \underline{H}^*(\underline{r}) \right], \\ \overline{\underline{J}_c(\underline{r}, t) \cdot \underline{E}(\underline{r}, t)}^t &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \underline{J}_c^*(\underline{r}) \cdot \underline{E}(\underline{r}) \right]. \end{aligned}$$

Consideriamo ora i termini con le derivate. Si ha per esempio:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \frac{\partial \underline{D}(\underline{r}, t)}{\partial t} &= \operatorname{Re} \left[\underline{E}(\underline{r}) e^{j\omega t} \right] \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\underline{D}(\underline{r}) e^{j\omega t} + \underline{D}^*(\underline{r}) e^{-j\omega t} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\underline{E}(\underline{r}) e^{j\omega t} \right] \cdot \frac{1}{2} j\omega \left[\underline{D}(\underline{r}) e^{j\omega t} - \underline{D}^*(\underline{r}) e^{-j\omega t} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} j\omega \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}(\underline{r}) e^{2j\omega t} \right] + \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} j\omega \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}^*(\underline{r}) \right]. \end{aligned}$$

Per cui:

$$\overline{\underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \frac{\partial \underline{D}(\underline{r}, t)}{\partial t}}^t = \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} j\omega \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}^*(\underline{r}) \right].$$

In modo analogo o duale si trova la:

$$\overline{\underline{H}(\underline{r}, t) \cdot \frac{\partial \underline{B}(\underline{r}, t)}{\partial t}}^t = \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{2} j\omega \underline{H}(\underline{r}) \cdot \underline{B}^*(\underline{r}) \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} j\omega \underline{B}(\underline{r}) \cdot \underline{H}^*(\underline{r}) \right],$$

essendo uguale la parte reale di due numeri coniugati.

Concludiamo allora che la parte reale dell'uguaglianza che esprime il teorema di Poynting nel dominio della frequenza coincide con il valor medio nel periodo dell'uguaglianza che esprime lo stesso teorema nel dominio del tempo, e rappresenta quindi il valor medio nel periodo del bilancio di potenza per la regione considerata.

Passiamo ora in rassegna alcuni tipi di materiali e vediamo le espressioni particolari assunte da p_c nel dominio della frequenza. Nel caso non dispersivo e isotropo risulta $\underline{J}_c = \sigma \underline{E}$ con σ reale, si ha quindi $p_c = \frac{1}{2} \sigma \underline{E}^* \cdot \underline{E}$ che è una quantità reale non negativa, in accordo con il suo significato fisico di potenza trasferita e non scambiata⁴. Nel caso anisotropo (sempre non dispersivo) si ha:

$$p_c = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}^*) \cdot \underline{E}.$$

Per verificare sotto quali condizioni questa quantità risulta reale, consideriamo prima il caso più generale di mezzo anisotropo dispersivo, in cui il tensore $\underline{\underline{\sigma}}$ è in generale complesso. Si ha allora:

$$p_c = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{E}^*) \cdot \underline{E}.$$

Per essere reale, dev'essere nulla la differenza tra p_c e il suo coniugato:

$$\frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{E}^*) \cdot \underline{E} - \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{E}) \cdot \underline{E}^* = 0,$$

ossia, sviluppando i prodotti scalari

$$\sum_{i=1}^3 E_i \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}^* E_j^* - \sum_{j=1}^3 E_j^* \sum_{i=1}^3 \sigma_{ji} E_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ji}) E_i E_j^* = 0.$$

⁴Si ricordi che per vettori reali la quantità:

$$A^2 = \underline{A} \cdot \underline{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

che si può definire come il quadrato di un vettore, risulta definita positiva, e si può assumere come modulo del vettore la sua radice quadrata con determinazione positiva $|\underline{A}| = +\sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}}$. Nel caso di vettori complessi la quantità $A^2 = \underline{A} \cdot \underline{A}$ in generale non è neppure reale. Per ottenere una quantità reale positiva il modulo si definisce come:

$$|\underline{A}| = +\sqrt{\underline{A} \cdot \underline{A}^*} = +\sqrt{A_x A_x^* + A_y A_y^* + A_z A_z^*} = +\sqrt{|A_x|^2 + |A_y|^2 + |A_z|^2}.$$

Spesso in letteratura si parla di ampiezza invece che di modulo, benché però il termine ampiezza può anche denotare a volte un fattore moltiplicativo complesso.

La precedente relazione deve valere qualunque sia il campo che si propaga in quel mezzo. Dunque l'unica possibilità è che sia $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ji}$ cioè $\underline{\sigma}$ è un diadico cosiddetto hermitiano. Nel caso non dispersivo, $\underline{\sigma}$ reale, tale condizione si riconduce a quella di simmetria, già verificata per le proprietà del reticolo cristallino. Se il mezzo poi è passivo, dovrà risultare anche $p_c > 0$: questo significa autovalori positivi per la matrice.

Passiamo ora a considerare la densità di potenza p_E , iniziando dal caso di mezzo non dispersivo, in cui era possibile definire una funzione di stato densità di energia elettrica nel dominio del tempo:

$$w_E(\underline{r}, t) = \frac{1}{2} \underline{E}(\underline{r}, t) \cdot \underline{D}(\underline{r}, t).$$

Si ponga ora nel dominio trasformato:

$$w_E(\underline{r}) = \frac{1}{4} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}^*(\underline{r}) \quad \Rightarrow \quad p_E(\underline{r}) = -2j\omega w_E(\underline{r}).$$

Sfruttando ancora le relazioni dei fasori si ottiene:

$$w_E(\underline{r}, t) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{4} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}(\underline{r}) e^{2j\omega t} \right] + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{4} \underline{E}(\underline{r}) \cdot \underline{D}^*(\underline{r}) \right].$$

Mediando rispetto al tempo si ha:

$$\overline{w_E(\underline{r}, t)}^t = \operatorname{Re}[w_E(\underline{r})].$$

Prendiamo in esame ora l'espressione di $w_E(\underline{r})$. Per un mezzo isotropo risultava $\underline{D} = \varepsilon \underline{E}$, con ε reale (e positiva) indipendente da ω . Dunque

$$w_E(\underline{r}) = \frac{1}{4} \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^* = \frac{1}{4} \varepsilon |\underline{E}|^2$$

è una quantità reale, per cui posso omettere la parte reale nella relazione precedente. Si tratta inoltre di una quantità definita positiva, in accordo col suo significato fisico di densità di energia. Ne segue che la densità di potenza $p_E(\underline{r})$ risulta immaginaria pura, e quindi:

$$\overline{p_E(\underline{r}, t)}^t = \operatorname{Re}[p_E(\underline{r})] = 0,$$

in accordo con il suo significato fisico di potenza scambiata. Come si è visto infatti

nella teoria dei circuiti (elettrotecnica), il fatto che una potenza complessa sia puramente immaginaria significa che la potenza attiva (che era la parte reale) risulta nulla e che quindi si tratta di potenza tutta reattiva, immagazzinata e scambiata⁵, non di potenza effettivamente trasportata e dissipata.

Se il mezzo è anisotropo (sempre non dispersivo) si aveva $\underline{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E}$ con $\underline{\underline{\varepsilon}}$ reale, indipendente da ω e simmetrico. Si ha allora che:

$$w_E(\underline{r}) = \frac{1}{4} \underline{E} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{E}^*)$$

è quantità ancora reale, in modo analogo a quanto visto precedentemente per p_c . Ne segue ancora che $p_E(\underline{r})$ è puramente immaginaria. Dovrà poi risultare $w_E(\underline{r}) > 0$ per ragioni fisiche, cioè autovalori positivi.

Nel caso invece di mezzo dispersivo, non si può più definire una funzione di stato densità di energia elettrica⁶. Nel caso isotropo la relazione costitutiva era:

$$\underline{D} = \varepsilon(\omega) \underline{E} = [\varepsilon_R(\omega) + j\varepsilon_J(\omega)] \underline{E}.$$

Risulta allora per la densità di potenza:

$$p_E(\underline{r}) = -\frac{j\omega}{2} \underline{E} \cdot (\varepsilon_R - j\varepsilon_J) \underline{E}^* = -\frac{j\omega}{2} \varepsilon_R \underline{E} \cdot \underline{E}^* - \frac{\omega}{2} \varepsilon_J \underline{E} \cdot \underline{E}^*,$$

e si ha:

$$\overline{p_E(\underline{r}, t)}^t = \text{Re}[p_E(\underline{r})] = -\frac{\omega}{2} \varepsilon_J(\omega) \underline{E} \cdot \underline{E}^*.$$

Quindi se $\varepsilon_J(\omega) \equiv 0$ la potenza attiva risulta nulla e si hanno perdite dielettriche nulle. Se invece il mezzo è dissipativo (come peraltro impongono le relazioni di Kramers-Krönig) e passivo la potenza attiva dovrà essere positiva e dunque $\varepsilon_J(\omega) < 0$.

Nel caso anisotropo la densità di potenza è:

$$p_E = -\frac{j\omega}{2} \underline{E} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}^* \cdot \underline{E}^*).$$

La potenza attiva risulta nulla⁷ se la quantità $\underline{E} \cdot (\underline{\underline{\varepsilon}}^* \cdot \underline{E}^*)$ è reale, cioè se il tensore $\underline{\underline{\varepsilon}}$ è hermitiano. Questo si dimostra in modo analogo a quanto visto per il tensore $\underline{\underline{\sigma}}$.

⁵Potenza che va e viene nei condensatori e negli induttori.

⁶Questo caso corrisponde come già visto a possibile presenza di perdite dielettriche.

⁷E quindi non ci sono perdite dielettriche.

Se invece $\underline{\underline{\epsilon}}$ non è hermitiano e il mezzo è passivo, tale potenza attiva dovrà essere positiva.

Considerazioni duali valgono per p_H , e per la corrispondente densità di energia magnetica:

$$w_H = \frac{1}{4} \underline{B} \cdot \underline{H}^*.$$

In particolare nel caso non dispersivo vale la relazione:

$$p_H(r) = 2j\omega w_H(r).$$

Nella discussione precedente ci siamo trovati di fronte a quantità del tipo:

$$\underline{E} \cdot (\underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{E}^*) \quad \underline{E} \cdot (\underline{\underline{\epsilon}}^* \cdot \underline{E}^*) \quad \underline{H}^* \cdot (\underline{\underline{\mu}} \cdot \underline{H}).$$

Si tratta, nel formalismo matriciale, di strutture del tipo (cfr. A. Ghizzetti, *Complementi ed esercizi di Analisi I*, volume 1), considerando ad esempio il caso della conducibilità:

$$\left(\underline{E} \right) \left(\underline{\underline{\sigma}}^* \right) \left(\underline{E}^* \right)$$

polinomio omogeneo di secondo grado in più variabili (complesse). Ma questo è proprio uno dei modi di descrivere una forma quadratica delle componenti di \underline{E} . In sostanza la matrice rappresenta univocamente la forma quadratica.

Se la matrice è hermitiana, anche la forma quadratica si dirà hermitiana. In questo caso il determinante della matrice stessa e tutti gli autovalori risultano numeri reali (ricordo fra l'altro la proprietà generale che il determinante è il prodotto degli autovalori, ognuno naturalmente preso con la sua molteplicità). Come abbiamo già visto, se la matrice è hermitiana, qualunque siano i valori delle variabili (nel nostro caso le componenti dei campi), il valore assunto dalla forma è sempre reale. È vero anche il viceversa.

Inoltre si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché la forma hermitiana sia definita positiva (il che per noi è importante per ragioni fisiche quando consideriamo la potenza dissipata e la densità di energia) è che gli autovalori (reali) della matrice siano tutti positivi.

Nel caso di mezzi dispersivi le matrici $\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\underline{\mu}}$ risultano complesse. Si osservi che ogni matrice complessa si può scrivere nel modo seguente⁸:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}' - j \underline{\underline{\epsilon}}'' \quad , \quad \text{con} \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}' &= \frac{\underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\epsilon}}^{T*}}{2} , \\ \underline{\underline{\epsilon}}'' &= j \frac{\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^{T*}}{2} . \end{aligned}$$

come è facile verificare. Si noti ora che $\underline{\underline{\epsilon}}'$ ed $\underline{\underline{\epsilon}}''$ sono in generale anch'esse complesse, non sono cioè la parte reale e la parte immaginaria di $\underline{\underline{\epsilon}}$. Però questa scomposizione è importante perché sia $\underline{\underline{\epsilon}}'$ che $\underline{\underline{\epsilon}}''$ sono matrici hermitiane (mentre invece le matrici, reali, parte reale e parte immaginaria non sono in generale simmetriche e quindi non sono hermitiane). Infatti dire che una matrice è hermitiana è equivalente a dire che la matrice coincide con la sua trasposta coniugata (così come dire che una matrice è simmetrica è equivalente a dire che la matrice coincide con la sua trasposta). Tenendo conto che la trasposta di una somma è uguale alla somma delle trasposte (e la stessa cosa vale ovviamente per i coniugati), la proprietà predetta si vede subito. Come dunque una matrice hermitiana è in qualche modo una generalizzazione di uno scalare reale, queste due matrici sono in un certo senso generalizzazioni della parte reale e della parte immaginaria (cambiata di segno) di uno scalare. Nel caso di $\underline{\underline{\epsilon}}$, $\underline{\underline{\mu}}$ la “parte immaginaria” è legata (come già visto per il caso scalare) a fenomeni di perdita, e deve essere “negativa”, per cui le matrici $\underline{\underline{\epsilon}}''$ ed $\underline{\underline{\mu}}''$ dovranno essere definite positive, cioè avere gli autovalori positivi (sempre se il mezzo è passivo).

1.12 Teorema di unicità

Il teorema di Poynting appena visto può essere adoperato per dimostrare il teorema di unicità, il quale fornisce una condizione sufficiente affinché sia unica la soluzione di un problema elettromagnetico.

Sia data una regione in quiete di volume V occupata da un mezzo (lineare, stazionario) *non dispersivo*, delimitata da una superficie chiusa S .

⁸Per $\underline{\underline{\epsilon}}^{T*}$ si intende la trasposta coniugata di $\underline{\underline{\epsilon}}$.

1.12.1 Teorema di unicità nel dominio del tempo

Consideriamo inizialmente la situazione nel dominio del tempo. Sotto le seguenti condizioni il campo elettromagnetico è unico in ogni punto di V e in ogni istante $t > t_o$ ove t_o è un istante (iniziale) arbitrario:

1. il campo sia soluzione delle equazioni di Maxwell e soddisfi le relazioni costitutive;
2. per $t = t_o$ siano assegnati il campo elettrico e il campo magnetico in ogni punto di V (condizioni iniziali);
3. per ogni istante $t > t_o$ sia assegnato su ogni punto di S o il campo elettrico tangenziale o il campo magnetico tangenziale (condizioni al contorno).

I teoremi di unicità si dimostrano in genere per assurdo, supponendo che esistano due campi elettromagnetici diversi che soddisfino entrambi alle condizioni di cui sopra. Mostriamo che essi devono essere necessariamente uguali. Indicheremo le due soluzioni di campo con un apice e con due apici. Le correnti impresse (sorgenti del campo) devono ovviamente essere le stesse nei due casi. Si può allora scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{E}' = -\underline{J}_{mi} - \frac{\partial B'}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H}' = \underline{J}_i + \underline{J}'_c + \frac{\partial D'}{\partial t} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{E}'' = -\underline{J}_{mi} - \frac{\partial B''}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H}'' = \underline{J}_i + \underline{J}''_c + \frac{\partial D''}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Definendo ora dei campi e delle correnti differenza:

$$\begin{aligned} \underline{E}_d &= \underline{E}' - \underline{E}'' , & \underline{B}_d &= \underline{B}' - \underline{B}'' , \\ \underline{H}_d &= \underline{H}' - \underline{H}'' , & \underline{J}_{cd} &= \underline{J}'_c - \underline{J}''_c , \\ \underline{D}_d &= \underline{D}' - \underline{D}'' . \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro le equazioni di Maxwell per i due casi si ottengono delle equazioni di Maxwell omogenee per il campo differenza:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \underline{E}_d = -\frac{\partial \underline{B}_d}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H}_d = \underline{J}_{cd} + \frac{\partial \underline{D}_d}{\partial t} \end{array} \right. .$$

Il campo differenza soddisfa anche le relazioni costitutive, in virtù della linearità del mezzo, in quanto ad esempio:

$$\underline{D}_d = \underline{D}' - \underline{D}'' = \underline{D}(\underline{E}') - \underline{D}(\underline{E}'') = \underline{D}(\underline{E}' - \underline{E}'') = \underline{D}(\underline{E}_d).$$

Essendo il teorema di Poynting una conseguenza delle equazioni di Maxwell, possiamo applicarlo al campo differenza nel volume V , tenendo conto della non dispersività e del fatto che non ci sono ora grandezze impresse:

$$\oint_S \underline{n} \cdot \underline{E}_d \times \underline{H}_d dS + \int_V p_{cd} dV + \frac{d}{dt} \int_V (W_{E_d} + W_{H_d}) dV = 0$$

(avendo portato la derivata temporale fuori dall'integrale, nell'ipotesi di volume V in quiete).

Osserviamo a questo punto che il flusso del vettore di Poynting per il campo differenza risulta nullo per le nostre ipotesi, in quanto sulla superficie S o è assegnata la componente tangenziale del campo elettrico, per cui è assegnata $\underline{n} \times \underline{E} \Rightarrow \underline{n} \times \underline{E}' = \underline{n} \times \underline{E}'' \Rightarrow \underline{n} \times \underline{E}_d = 0$ e $\underline{n} \cdot \underline{E}_d \times \underline{H}_d = \underline{n} \times \underline{E}_d \cdot \underline{H}_d = 0$ avendo usato la proprietà del prodotto misto secondo la quale posso scambiare il punto con la croce; oppure è assegnata la componente tangenziale del campo magnetico, per cui è assegnata $\underline{n} \times \underline{H} \Rightarrow \underline{n} \times \underline{H}' = \underline{n} \times \underline{H}'' \Rightarrow \underline{n} \times \underline{H}_d = 0$ e $\underline{n} \cdot \underline{E}_d \times \underline{H}_d = -\underline{n} \cdot \underline{H}_d \times \underline{E}_d = -\underline{n} \times \underline{H}_d \cdot \underline{E}_d = 0$. Rimane dunque la relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_V (W_{E_d} + W_{H_d}) dV = - \int_V p_{cd} dV.$$

A questo punto integro nel tempo i due membri da t_o a t , chiamando ora per chiarezza t' la variabile interna. Ricordo che l'integrale definito di una derivata è pari alla funzione da derivare, calcolata agli estremi. Per cui:

$$\begin{aligned} \int_{t_o}^t \left[\frac{d}{dt'} \int_V (W_{E_d} + W_{H_d}) dV \right] dt' &= \left[\int_V (W_{E_d} + W_{H_d}) dV \right]_t - \left[\int_V (W_{E_d} + W_{H_d}) dV \right]_{t_o} = \\ &= - \int_{t_o}^t \left(\int_V p_{cd} dV \right) dt'. \end{aligned}$$

Sfruttiamo a questo punto le condizioni iniziali, non ancora usate, secondo le quali per $t = t_o$ sono assegnati \underline{E} e \underline{H} in $V \Rightarrow \underline{E}' \equiv \underline{E}'' \Rightarrow \underline{E}_d \equiv 0$ e $\underline{H}' \equiv \underline{H}'' \Rightarrow \underline{H}_d \equiv 0$

in $V \Rightarrow$ all'istante iniziale $W_{E_d} = W_{H_d} \equiv 0$ in V . Resta dunque:

$$\left[\int_V (W_{E_d} + W_{H_d}) dV \right]_t = - \int_{t_0}^t \left(\int_V p_{cd} dV \right) dt'.$$

Osserviamo ora che W_{E_d} e p_{cd} sono forme quadratiche definite positive delle componenti di \underline{E}_d , mentre W_{H_d} è una forma quadratica definita positiva delle componenti di \underline{H}_d . Dunque l'uguaglianza appena scritta è possibile solo se i due integrali sono entrambi nulli. Considerando il primo, ed essendo questo l'integrale della somma di due quantità positive, segue che entrambe le quantità W_{E_d} e W_{H_d} si annullano, e dunque risulta $\underline{E}_d = \underline{H}_d \equiv 0 \Rightarrow \underline{E}' \equiv \underline{E}''$ e $\underline{H}' \equiv \underline{H}''$ in ogni punto di V e $\forall t > t_0$. Il teorema è dunque dimostrato, anche se il mezzo è non dissipativo ($p_{cd} \equiv 0$ essendo $\sigma = 0$).

1.12.2 Teorema di unicità nel dominio della frequenza

Utilizziamo ora il teorema di Poynting complesso per ricavare il teorema di unicità nel dominio della frequenza. In questo caso, essendo stata eliminata la dipendenza dal tempo, non ci sono condizioni iniziali ma solo condizioni al contorno. Facendo riferimento al solito volume V racchiuso da una superficie chiusa S e con normale esterna \underline{n} , è unico in ogni punto di V il campo elettromagnetico che sia soluzione delle equazioni di Maxwell e delle relazioni costitutive, e di cui sia assegnata in ogni punto di S o la componente tangenziale del campo elettrico o la componente tangenziale del campo magnetico. Supporremo inoltre che il mezzo all'interno del volume V sia non dispersivo.

Anche in questo caso il teorema si dimostra per assurdo procedendo in maniera analoga, supponendo l'esistenza di due soluzioni che soddisfino entrambe le condizioni poste, e considerando poi un campo elettromagnetico differenza che sarà soluzione delle equazioni di Maxwell omogenee nel dominio della frequenza. Infine applichiamo al campo differenza il teorema di Poynting complesso. Si ha:

$$\frac{1}{2} \oint_S \underline{n} \cdot \underline{E}_d \times \underline{H}_d^* dS + \int_V p_{cd} dV + 2j\omega \int_V (w_{H_d} - w_{E_d}) dV = 0.$$

Il primo integrale si annulla per le condizioni al contorno, in modo del tutto analogo a quanto avviene nel dominio del tempo, ricordando solo che $\underline{n} \times \underline{H}_d = 0$ implica coniugando $\underline{n} \times \underline{H}_d^* = 0$.

Restano gli altri due integrali, il primo dei quali è puramente reale, il secondo puramente immaginario (nell'ipotesi ovviamente che ω sia reale, cioè assenza di fenomeni di smorzamento). Occorre quindi che entrambi si annullino. Dalla relazione:

$$\int_V p_{cd} dV = 0$$

nel caso di mezzo dissipativo (conducibilità non nulla) segue che, essendo p_{cd} una forma quadratica definita positiva delle componenti del campo elettrico differenza, tale campo deve annullarsi nel volume V . Si annullerà quindi anche w_{Ed} , per cui resta:

$$2\omega \int_V w_{Hd} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_d \equiv 0 \quad \text{in } V,$$

essendo w_{Hd} una forma quadratica definita positiva delle componenti del campo magnetico. Si ha in definitiva in V :

$$\underline{E}' \equiv \underline{E}'' \quad , \quad \underline{H}' \equiv \underline{H}'' ,$$

e il teorema è dimostrato.

Nel caso invece di mezzo non dissipativo (conducibilità nulla) il primo integrale si annulla comunque, senza imporre alcuna condizione sul campo elettrico; a questo punto, visto che nel secondo integrale compare una differenza di quantità dipendenti in generale dalla pulsazione ω , esso costituisce un'equazione in ω che, risolta, fornisce dei particolari valori di frequenza in corrispondenza dei quali il teorema di unicità non vale. Si tratta delle cosiddette frequenze di risonanza del sistema, cui corrispondono particolari coppie $\underline{E}_d, \underline{H}_d$ non identicamente nulle, che rappresentano il campo elettromagnetico di oscillazioni libere, cioè soluzioni non identicamente nulle del sistema delle equazioni di Maxwell omogenee.

In appendice notiamo tre cose. La prima è che il teorema continua a valere se in luogo delle condizioni al contorno di assegnazione delle componenti tangenziali di \underline{E} o di \underline{H} su S vale la seguente condizione, detta di impedenza:

$$\underline{E}_\tau = \zeta_S \underline{H}_\tau \times \underline{n} ,$$

ove \underline{E}_τ e \underline{H}_τ sono i campi tangenziali e ζ_S è una quantità complessa, denominata

impedenza superficiale, nulla nel caso particolare di conduttore perfetto e di cui si assume positiva la parte reale (per mezzi passivi). Tale condizione al contorno viene di solito impiegata per caratterizzare mezzi intermedi fra il conduttore perfetto e il dielettrico perfetto, cioè i mezzi realistici.

La seconda osservazione è che se ω è una quantità complessa, cioè in presenza di smorzamenti, il teorema non vale per particolari valori di ω anche per mezzi dissipativi. A tali valori di ω corrispondono le oscillazioni libere smorzate.

La terza osservazione è che invece il teorema vale anche per mezzi a conducibilità nulla, se in luogo delle dissipazioni per effetto Joule entrano in gioco altri tipi di perdite, in particolare le perdite dielettriche e magnetiche, legate alla costante dielettrica e alla permeabilità. In questo caso infatti il mezzo risulterà dispersivo, con ε oppure μ dotate di parte immaginaria (negativa). Nell'espressione del teorema di unicità sopravvive il termine:

$$\frac{1}{2} j\omega \int_V (\underline{H}_d^* \cdot \underline{B}_d - \underline{E}_d \cdot \underline{D}_d^*) dV,$$

dal quale è ora possibile stralciare un termine reale (legato alla parte immaginaria), che permette di azzerare separatamente il campo elettrico (o il campo magnetico). Si può concludere quindi che l'unicità vale ogni qual volta è presente un qualche meccanismo di perdita, e quindi nei casi più realistici. Si ricordi infine che nel dominio del tempo, invece, l'unicità valeva sempre.

1.13 Equazione delle onde

Invece di risolvere il sistema delle due equazioni differenziali di Maxwell del primo ordine accoppiate (insieme alle relazioni costitutive), si preferisce passare ad un'equazione del secondo ordine, però in una sola variabile vettoriale, uno dei due campi. Si tratta dell'equazione delle onde. Tale equazione si può considerare sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza.

Nel dominio del tempo è stata già considerata nel corso di Fisica II nel caso di assenza di sorgenti. È evidente che poi nella pratica le sorgenti ci dovranno essere, ma le consideriamo esterne alla regione in cui vogliamo risolvere le nostre equazioni. Partendo dalle equazioni di Maxwell in un mezzo isotropo e non dispersivo:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H} = \sigma \underline{E} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{cases} .$$

Se eseguiamo il rotore della prima otteniamo:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = \nabla \nabla \cdot \underline{E} - \nabla^2 \underline{E} = -\nabla \times \left(\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \right).$$

Supponiamo a questo punto che il mezzo sia omogeneo (questa è un'ipotesi sempre necessaria per ricavare l'equazione delle onde), e applicando il teorema di inversione dell'ordine delle derivate, ricavo:

$$\nabla \nabla \cdot \underline{E} - \nabla^2 \underline{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{H}).$$

Inserisco ora la seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \nabla \cdot \underline{E} - \nabla^2 \underline{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \underline{E} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right).$$

D'altra parte (sempre sfruttando l'ipotesi di omogeneità del mezzo):

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Quindi:

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu \sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}.$$

Nell'ipotesi di assenza di cariche libere si ha l'equazione omogenea:

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu \sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Nel caso particolare di mezzo non dissipativo ($\sigma = 0$) segue la nota equazione di d'Alembert:

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \underline{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0,$$

avendo introdotto la velocità della luce nel mezzo:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

Si usa anche a volte l'operatore dalembertiano:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

cosicché l'equazione diventa semplicemente:

$$\square \underline{E} = 0.$$

Si osservi che operando la trasformata di Fourier (rispetto al tempo) dell'equazione di d'Alembert si ottiene:

$$\nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{E} = \nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0,$$

con $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$, essendo $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{v}$ il cosiddetto numero d'onda nel mezzo o anche la costante di propagazione, o il numero d'onda di propagazione del mezzo. Tale equazione ben nota si chiama equazione di Helmholtz e come si vedrà tra breve ha validità più generale, anche per il caso di mezzi (temporalmente) dispersivi.

Il numero d'onda è legato alla lunghezza d'onda nel mezzo λ dalla relazione:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Si ha inoltre la fondamentale relazione:

$$v = \lambda f.$$

Si noti che λ gioca il ruolo di periodo spaziale del campo, mentre k è una sorta di pulsazione spaziale.

Nel vuoto si ha in particolare:

$$k_o = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_o},$$

essendo⁹:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}}, \quad v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}.$$

⁹Quindi nei mezzi materiali la luce è più lenta che nel vuoto.

Questo significa che in un mezzo materiale è come se il campo si restringesse rispetto al vuoto, dal momento che la lunghezza d'onda diminuisce¹⁰. Molto spesso nei mezzi che consideriamo in pratica si può assumere $\mu_r = 1$. La frequenza invece è sempre la stessa nei vari mezzi considerati.

1.13.1 Equazione di Helmholtz

Ricaviamo ora l'equazione di Helmholtz, non omogenea, a partire dalle equazioni di Maxwell nel dominio trasformato. Consideriamo ancora un mezzo omogeneo, isotropo, ma anche generalmente dispersivo:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\underline{J}_{mi} - j\omega\mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + \sigma \underline{E} + j\omega\varepsilon \underline{E} = \underline{J}_i + (\sigma + j\omega\varepsilon)\underline{E} \end{cases}.$$

Per compattezza di notazione si pone in genere:

$$j\omega\varepsilon_c = \sigma + j\omega\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + j\omega\varepsilon_c \underline{E},$$

con:

$$\varepsilon_c = \varepsilon + \frac{\sigma}{j\omega} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$$

costante dielettrica equivalente (complessa in generale). Notare che nella nuova coppia di equazioni vale il principio di dualità, con le trasformazioni:

$$\varepsilon_c \rightarrow \mu \quad \mu \rightarrow \varepsilon_c.$$

Prendendo le divergenze si ha, sempre nella solita ipotesi di mezzo omogeneo:

$$\begin{aligned} 0 = -\nabla \cdot \underline{J}_{mi} - j\omega\mu \nabla \cdot \underline{H} &\quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{H} = -\frac{\nabla \cdot \underline{J}_{mi}}{j\omega\mu}, \\ 0 = \nabla \cdot \underline{J}_i + j\omega\varepsilon_c \nabla \cdot \underline{E} &\quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{E} = -\frac{\nabla \cdot \underline{J}_i}{j\omega\varepsilon_c}. \end{aligned}$$

A questo punto prendo il rotore della prima equazione e sostituisco la seconda:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = \nabla \nabla \cdot \underline{E} - \nabla^2 \underline{E} = -\nabla \times \underline{J}_{mi} - j\omega\mu (\underline{J}_i + j\omega\varepsilon_c \underline{E}).$$

¹⁰Quindi, ad esempio, adoperando dei dielettrici con ε_r elevata posso miniaturizzare dei componenti, ad esempio i risonatori.

Sostituisco l'espressione ottenuta per la divergenza di \underline{E} :

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = \nabla \times \underline{J}_{mi} + j\omega\mu \underline{J}_i - \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{J}_i}{j\omega\epsilon_c},$$

avendo posto ora $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c$.

Come si vede, questa equazione ha un termine noto piuttosto complicato (in particolare fra l'altro si richiede la derivabilità delle grandezze impresse). In modo duale, facendo il rotore della seconda equazione di Maxwell e sostituendovi la prima, si ricava l'equazione del campo magnetico:

$$\nabla^2 \underline{H} + k^2 \underline{H} = -\nabla \times \underline{J}_i + j\omega\epsilon_c \underline{J}_{mi} - \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{J}_{mi}}{j\omega\mu}.$$

Si noti che una soluzione di questa equazione di Helmholtz non è necessariamente soluzione delle equazioni di Maxwell, occorre imporre anche la condizione sulla divergenza. Una volta ottenuto uno dei due campi, l'altro è ricavabile dall'equazione di Maxwell del rotore di quello noto.

Si noti infine che trasformando secondo Fourier l'equazione

$$\nabla^2 \underline{E} - \mu\sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0$$

si ottiene:

$$\nabla^2 \underline{E} - j\omega\mu\sigma \underline{E} + \omega^2 \mu \epsilon \underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \underline{E} + \omega^2 \mu \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \underline{E} = 0,$$

da cui sostituendo ϵ_c :

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0.$$

1.14 Potenziali elettrodinamici

Risulta talvolta utile risolvere il problema elettromagnetico non direttamente in termini di campi, ma facendo uso di funzioni scalari e vettoriali ausiliarie (in modo analogo a quanto già visto in elettrostatica e magnetostatica), rappresentando il campo elettromagnetico mediante tali funzioni, che prendono il nome di potenziali elettrodinamici. Di essi sono stati considerati diversi tipi. Per introdurre i più usa-

ti conviene anzitutto, supponendo valida l'ipotesi di linearità, applicare il principio di sovrapposizione degli effetti alle equazioni di Maxwell non omogenee. Suppongo prima assenti le correnti magnetiche impresse, poi assenti quelle elettriche impresse, e nel caso generale sommo i due risultati.

Partiamo dal dominio della frequenza. Prendendo allora $\underline{J}_{mi} \equiv 0$ si ha:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + j\omega\varepsilon_c \underline{E} \end{cases} .$$

Nell'ipotesi di mezzo omogeneo, prendendo la divergenza della prima, si ha:

$$\nabla \cdot \underline{H} = 0 ,$$

che nell'ipotesi di dominio a connessione superficiale semplice consente di porre:

$$\underline{H} = \nabla \times \underline{A} ,$$

con \underline{A} potenziale vettore, definito evidentemente a meno del gradiente di una funzione scalare Φ , in quanto se pongo:

$$\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Phi$$

segue:

$$\underline{H} = \nabla \times \underline{A}' .$$

La non univocità del campo vettoriale \underline{A} deriva dal fatto che di esso è assegnato il rotore ma non la sua divergenza. Esiste infatti un teorema di analisi vettoriale, il teorema di Helmholtz, il quale stabilisce che un campo vettoriale è univocamente determinato qualora se ne assegnino rotore e divergenza.

Sostituendo la $\underline{H} = \nabla \times \underline{A}$ nella prima equazione di Maxwell si ha:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \nabla \times \underline{A} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\underline{E} + j\omega\mu \underline{A}) = 0 ,$$

da cui, se il dominio è a connessione lineare semplice, segue:

$$\underline{E} + j\omega\mu \underline{A} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -j\omega\mu \underline{A} - \nabla V .$$

La quantità V si dice potenziale scalare. Abbiamo dunque espresso il campo elettromagnetico in termini di una coppia di potenziali. Non si tratta dell'unica scelta possibile: esistono per esempio anche i cosiddetti potenziali di Hertz.

Si noti ora che se cambio il potenziale vettore secondo la trasformazione $\underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Phi$ (che lascia invariato il campo magnetico, come deve essere) devo poi cambiare il potenziale scalare per avere invariato anche il campo elettrico. Risulta infatti:

$$\begin{aligned}\underline{E} &= -j\omega\mu(\underline{A}' - \nabla\Phi) - \nabla V = -j\omega\mu\underline{A}' + j\omega\mu\nabla\Phi - \nabla V = \\ &= -j\omega\mu\underline{A}' - \nabla(V - j\omega\mu\Phi) = -j\omega\mu\underline{A}' - \nabla V'\end{aligned}$$

se si pone $V' = V - j\omega\mu\Phi$. La trasformazione:

$$\begin{cases} \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\Phi \\ V' = V - j\omega\mu\Phi \end{cases}$$

viene chiamata trasformazione di *gauge* (o di gioco), ove Φ è una funzione scalare arbitraria.

A questo punto il problema si sposta su come determinare la coppia \underline{A} , V . Allo scopo inseriamo la $\underline{H} = \nabla \times \underline{A}$ nella seconda equazione di Maxwell, e si ha:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \underline{J}_i + j\omega\varepsilon_c \underline{E},$$

da cui:

$$\nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} = \underline{J}_i + j\omega\varepsilon_c (-j\omega\mu \underline{A} - \nabla V) = \underline{J}_i + \omega^2 \mu \varepsilon_c \underline{A} - j\omega\varepsilon_c \nabla V.$$

La precedente equazione, in cui compaiono entrambi i potenziali, si semplifica molto se \underline{A} e V soddisfano la condizione (o gauge) detta di Lorenz:

$$\nabla \cdot \underline{A} = -j\omega\varepsilon_c V,$$

(si noti che non è l'unica scelta possibile, ad esempio esiste anche la cosiddetta condizione di Coulomb) per cui si ottiene l'equazione di Helmholtz non omogenea nella sola incognita \underline{A} :

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\underline{J}_i.$$

Come si vede, tale equazione ha un termine noto molto più semplice della corrispondente equazione per \underline{E} (o per \underline{H}), e in particolare non si richiede la derivabilità delle grandezze impresse. Tale equazione si risolve con il metodo della cosiddetta funzione di Green.

Supponiamo ora di avere una coppia di potenziali \underline{A}_o, V_o che non soddisfi la condizione di Lorenz: è possibile allora, utilizzando le trasformazioni di gauge, ottenere una nuova coppia \underline{A}, V che la soddisfi, con un'opportuna scelta della funzione Φ . Del resto questo significa, con riferimento ancora al teorema di Helmholtz, assegnare anche la divergenza di \underline{A} , di cui era stato assegnato già il rotore. Partendo dalle:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_o + \nabla\Phi, \\ V &= V_o - j\omega\mu\Phi, \end{aligned}$$

dovrà ora essere:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\underline{A}_o + \nabla\Phi) &= -j\omega\varepsilon_c (V_o - j\omega\mu\Phi) \\ \Rightarrow \nabla \cdot \underline{A}_o + \nabla \cdot \nabla\Phi &= -j\omega\varepsilon_c V_o - \omega^2\mu\varepsilon_c \Phi \\ \Rightarrow \nabla^2\Phi + k^2\Phi &= -\nabla \cdot \underline{A}_o - j\omega\varepsilon_c V_o, \end{aligned}$$

che è ancora un'equazione di Helmholtz non omogenea nella variabile Φ , visto che il termine noto è diverso da zero per ipotesi.

Una volta stabilita la condizione di Lorenz, si può esprimere il potenziale scalare in funzione di quello vettore:

$$V = \frac{\nabla \cdot \underline{A}}{-j\omega\varepsilon_c},$$

e si può quindi scrivere, in termini solo di \underline{A} :

$$\underline{E} = -j\omega\mu \underline{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \underline{A}}{j\omega\varepsilon_c}.$$

Si consideri infine il caso duale con $\underline{J}_i \equiv 0$ e $\underline{J}_{mi} \neq 0$. Allora, prendendo la

divergenza della seconda equazione di Maxwell segue, sempre nell'ipotesi di mezzo omogeneo

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -\nabla \times \underline{F}$$

ove il segno meno è stato introdotto perché \underline{F} risulti la grandezza duale di \underline{A} , avendosi:

$$\underline{A} \rightarrow \underline{F} \quad , \quad \underline{F} \rightarrow -\underline{A}.$$

Sempre per dualità si ottiene l'equazione per \underline{H} :

$$\underline{H} = -j\omega\varepsilon_c \underline{F} - \nabla U = -j\omega\varepsilon_c \underline{F} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{F}}{j\omega\mu},$$

essendo U il potenziale scalare duale di V . Si ha:

$$V \rightarrow U \quad , \quad U \rightarrow -V.$$

L'equazione da risolvere è in questo caso:

$$\nabla^2 \underline{F} + k^2 \underline{F} = -\underline{J}_{mi}.$$

Accenniamo ora alla corrispondente trattazione nel dominio del tempo. Supponiamo per semplicità che il mezzo sia isotropo non dispersivo e non dissipativo. Nel caso $\underline{J}_{mi} = 0$ si ha:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{H} = \underline{J}_i + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{cases}.$$

Prendendo ancora la divergenza della prima equazione per mezzi omogenei e usando il teorema di inversione si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{H}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{H} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underline{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{H} = \nabla \times \underline{A}$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \left(\underline{E} + \mu \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \nabla V.$$

Poi si ha dalla seconda equazione:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \underline{A} &= \nabla \nabla \cdot \underline{A} - \nabla^2 \underline{A} = \underline{J}_i + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} - \nabla V \right) = \\ &= \underline{J}_i - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} - \varepsilon \nabla \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione di Lorenz:

$$\nabla \cdot \underline{A} = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}$$

segue l'equazione di d'Alembert non omogenea per il potenziale vettore:

$$\nabla^2 \underline{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{A}}{\partial t^2} = -\underline{J}_i.$$

Una volta risolta tale equazione otteniamo \underline{A} , poi \underline{H} e poi \underline{E} dalla condizione di Lorenz che porge¹¹

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \nabla \cdot \underline{A} dt' \\ \Rightarrow \quad \underline{E} &= -\mu \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \nabla \nabla \cdot \underline{A} dt'. \end{aligned}$$

Segue poi l'altro caso duale.

¹¹Si noti che nelle corrispondenti formule nel dominio della frequenza si ha al posto dell'integrazione una divisione per $j\omega$.

Proprietà delle onde elettromagnetiche piane

2.1 Funzioni d'onda

Consideriamo ora l'equazione di Helmholtz omogenea per una generica funzione d'onda vettoriale \underline{A} (non necessariamente un campo elettromagnetico):

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = 0.$$

Proiettiamo questa equazione sui tre assi cartesiani x, y, z ricordando che in tali coordinate si ha che le componenti cartesiane del laplaciano vettoriale sono i laplaciani (scalari) delle componenti, per cui si ha, per esempio nella direzione x :

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0.$$

Ci si può allora sempre ricondurre a un'equazione scalare, e quindi a funzioni d'onda scalari $A(x, y, z)$ soddisfacenti la $\nabla^2 A + k^2 A = 0$.

La generica funzione d'onda scalare complessa si potrà sempre scrivere:

$$A(x, y, z) = M(x, y, z) e^{-j\Phi(x, y, z)},$$

avendone evidenziato modulo e fase (quest'ultima detta anche iconale). Della fase siamo in genere interessati solo alle variazioni, in altri termini la funzione Φ è in genere definita a meno di una costante additiva.

Nel caso particolare in cui si abbia $\Phi(x, y, z) = cost$ in una certa regione di spazio, l'onda si dice stazionaria in quella regione. Se invece la relazione precedente non è identicamente verificata, l'onda si dice progressiva e la relazione, per diversi valori della costante, definisce una famiglia di superfici che prendono il nome di superfici equifase. La particolare forma di tali superfici (ad esempio piani, cilindri, sfere) si usa per denominare l'onda (onda piana, cilindrica, sferica).

Si definisce vettore di fase il vettore $\underline{\beta} = \nabla\Phi$. Si può dimostrare che, in quanto gradiente, la sua direzione è la direzione in cui si ha la massima variazione di fase e inoltre $\underline{\beta}$ è ortogonale alle superfici equifase. Per un'onda stazionaria risulta $\underline{\beta} \equiv 0$.

Come è noto, la sovrapposizione di due onde progressive di uguale modulo e di fase opposta dà luogo ad un'onda stazionaria. Ponendo infatti:

$$\begin{aligned} A_1(x, y, z) &= M(x, y, z) e^{-j\Phi(x, y, z)}, \\ A_2(x, y, z) &= M(x, y, z) e^{j\Phi(x, y, z)}, \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} A_1(x, y, z) + A_2(x, y, z) &= M(x, y, z) \left[e^{j\Phi(x, y, z)} + e^{-j\Phi(x, y, z)} \right] \\ &= 2M(x, y, z) \cos \left[\Phi(x, y, z) \right], \end{aligned}$$

che è una funzione reale. Pertanto la sua fase vale zero (o π) in tutto lo spazio e l'onda è stazionaria.

L'equazione $M(x, y, z) = cost$ definisce, se non è identicamente verificata, una famiglia di superfici che prendono il nome di superfici equiampiezza. Un'onda si dice uniforme (o più spesso, in letteratura, omogenea) se l'ampiezza è costante sulle superfici equifase. Ciò si verifica o se la relazione precedente è identicamente verificata, ovvero se le superfici equifase coincidono con superfici equiampiezza.

Tornando ora nel dominio del tempo, in regime monocromatico si ha:

$$A(x, y, z, t) = \text{Re} \left[A(x, y, z) e^{j\omega t} \right] = M(x, y, z) \cos \left[\omega t - \Phi(x, y, z) \right].$$

La funzione $\Psi(x, y, z, t) = \omega t - \Phi(x, y, z)$ rappresenta la variazione della fase nello spazio e nel tempo. Si definisce a questo punto velocità di fase v_r nella direzione del vettore \underline{r}_o la velocità di un osservatore che si muova in quella direzione in maniera

tale da non osservare variazioni di fase. Per tale osservatore dovrà pertanto essere:

$$\begin{aligned} d\Psi = 0 &\quad \Rightarrow \quad \omega dt - d\Phi = 0 \\ \Rightarrow \omega dt - \frac{\partial\Phi}{\partial r} dr &= \omega dt - \nabla\Phi \cdot \underline{r}_o dr = \\ = \omega dt - \underline{\beta} \cdot \underline{r}_o dr &= \omega dt - \beta_r dr = 0 \\ \Rightarrow v_r = \frac{dr}{dt} &= \frac{\omega}{\beta_r}. \end{aligned}$$

Si osservi che non esiste un vettore \underline{v} velocità di fase: la velocità di fase è una grandezza essenzialmente scalare, cioè v_r non può essere la componente secondo \underline{r}_o di questo ipotetico vettore. Infatti se un tale vettore esistesse dovrebbe essere:

$$\underline{v} = \underline{x}_o \frac{\omega}{\beta_x} + \underline{y}_o \frac{\omega}{\beta_y} + \underline{z}_o \frac{\omega}{\beta_z},$$

$$\text{con } \underline{v} \cdot \underline{r}_o \neq \frac{\omega}{\underline{\beta} \cdot \underline{r}_o} = v_r.$$

2.2 Onde piane

Si vuole ora studiare una soluzione particolare dell'equazione di Helmholtz omogenea nello spazio libero (cioè privo di superfici di discontinuità) in un mezzo omogeneo, isotropo, eventualmente dispersivo. L'equazione nel campo elettrico è la seguente:

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0.$$

Procediamo secondo la tecnica cosiddetta della separazione delle variabili e consideriamo soluzioni della forma (operando in coordinate cartesiane):

$$\underline{E}(x, y, z) = \underline{E}_o X(x) Y(y) Z(z),$$

essendo \underline{E}_o un vettore (in generale complesso) costante e X, Y, Z tre funzioni scalari (in generale complesse). Introducendo questa forma di soluzione nell'equazione si ottiene¹:

$$\underline{E}_o \left(\frac{d^2 X}{dx^2} Y Z + X \frac{d^2 Y}{dy^2} Z + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} \right) + k^2 \underline{E}_o XYZ = 0.$$

¹Si noti che $\nabla^2 \underline{E} = \underline{E}_o \nabla^2 (XYZ)$

Posso mettere in evidenza \underline{E}_o (che dovrà sicuramente essere diverso da zero, altrimenti si otterrebbe la soluzione banale identicamente nulla, sempre presente per ogni equazione omogenea) e applicare la legge di annullamento del prodotto, per cui dovrà essere:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} YZ + X \frac{d^2 Y}{dy^2} Z + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0.$$

Supponendo $XYZ \neq 0$ e dividendo per esso si ottiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0,$$

ove il primo addendo dipende solo da x , il secondo solo da y , il terzo solo da z , mentre il quarto è costante.

Derivando allora rispetto a x si ottiene:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{cost} = -k_x^2,$$

essendo k_x una generica costante complessa. In modo analogo, derivando rispetto a y e rispetto a z si ottiene:

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{cost} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \text{cost} = -k_z^2.$$

Ho quindi ottenuto tre equazioni dei moti armonici. Le tre costanti non sono indipendenti, dovendo essere:

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2.$$

La precedente condizione, detta di separabilità, deve valere affinché le tre equazioni dei moti armonici siano equivalenti all'equazione di partenza. In particolare, le tre costanti k_x , k_y e k_z non possono essere contemporaneamente nulle, essendo $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c \neq 0$.

Prendiamo ora in esame la prima equazione:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0.$$

Per ottenere l'integrale generale devo considerare separatamente i due casi $k_x \neq 0$ e $k_x = 0$. Nel primo caso si ha:

$$X(x) = X_o^+ e^{-jk_x x} + X_o^- e^{jk_x x},$$

con X_o^+ e X_o^- costanti complesse arbitrarie. Potevo in modo equivalente scrivere la soluzione in termini di funzioni sinusoidali, ma la scelta fatta è più congeniale per esprimere onde progressive nello spazio libero, in assenza di ostacoli che possano generare riflessioni e onde stazionarie. In particolare il primo addendo rappresenta un'onda che si propaga nel verso delle x positive, il secondo addendo un'onda che si propaga nel verso delle x negative, da qui gli apici usati. Se invece $k_x = 0$ si ha:

$$X(x) = X_{01} x + X_{02},$$

con X_{01} e X_{02} generiche costanti complesse. Espressioni del tutto analoghe si ottengono per $Y(y)$ e $Z(z)$.

A questo punto selezioniamo ulteriormente la soluzione particolare, ponendo $X_o^- = 0$ (consideriamo termini che si propagano nel solo verso positivo delle x) e analogamente $Y_o^- = Z_o^- = 0$ se $k_x \neq 0$, mentre se $k_x = 0$ si pone $X_{01} = 0$, per cui rimane $X(x) = cost$, ma tale costante si può pensare conglobata con l'altro caso, che forniva il termine esponenziale, permettendo che possa essere anche $k_x = 0$. In modo analogo pongo $Y_{01} = Z_{01} = 0$. Rimettendo insieme i vari pezzi e conglobando le costanti residue X_o^+ , Y_o^+ e Z_o^+ nel vettore costante \underline{E}_o , si ha:

$$\underline{E}(x, y, z) = \underline{E}_o e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}.$$

In questa espressione il fattore vettoriale (costante) determina le caratteristiche di polarizzazione, mentre il fattore esponenziale scalare (dipendente dalle coordinate) determina le caratteristiche di propagazione.

Definendo un vettore di propagazione complesso:

$$\underline{k} = k_x \underline{x}_o + k_y \underline{y}_o + k_z \underline{z}_o,$$

e ricordando che:

$$\underline{r} = x \underline{x}_o + y \underline{y}_o + z \underline{z}_o,$$

si ha:

$$k_x x + k_y y + k_z z = \underline{k} \cdot \underline{r}.$$

Quindi per l'espressione del campo elettrico abbiamo in definitiva:

$$\underline{E}(x, y, z) = \underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}.$$

Su questa soluzione, oltre alla condizione di separabilità² che deriva dal fatto di essere un'onda, cioè una soluzione dell'equazione di Helmholtz, deve anche valere la condizione $\nabla \cdot \underline{E} = 0$, che avevo adoperato per ricavare l'equazione di Helmholtz dalle equazioni di Maxwell.

Si osservi in proposito che per una forma funzionale del tipo $\underline{E} = \underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}$ l'operatore ∇ viene a coincidere con il vettore $-j\underline{k}$, per l'espressione che assumono in questo caso le derivate spaziali. Si ha infatti:

$$\nabla = \underline{x}_o(-jk_x) + \underline{y}_o(-jk_y) + \underline{z}_o(-jk_z) = -j\underline{k},$$

da cui:

$$\nabla(e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}) = -j\underline{k} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}},$$

$$\nabla \cdot (\underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}) = -j\underline{k} \cdot \underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}},$$

$$\nabla \times (\underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}) = -j\underline{k} \times \underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}},$$

e inoltre:

$$\nabla^2 e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = \nabla \cdot \nabla (e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}) = -\underline{k} \cdot \underline{k} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}}$$

$$\Rightarrow (\nabla^2 + k^2) e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = 0 \quad \text{se} \quad \underline{k} \cdot \underline{k} = k^2,$$

come doveva essere. E infine:

²

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c.$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 (\underline{E}_o e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) &= \nabla \cdot \nabla (\underline{E}_o e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \\
&= -\underline{\mathbf{k}} \cdot (\underline{\mathbf{k}} \underline{E}_o) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -(\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{k}}) \underline{E}_o e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
\Rightarrow (\nabla^2 + k^2)(\underline{E}_o e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) &= 0 \quad \text{se} \quad \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathbf{k}} = k^2.
\end{aligned}$$

come doveva essere.

Tornando alla condizione $\nabla \cdot \underline{E} = 0$, segue per quanto visto che:

$$-j\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{E}_o e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0.$$

L'esponenziale è sempre $\neq 0$, anche nel campo complesso, quindi:

$$\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{E}_o = 0.$$

Questa è la condizione per cui la nostra onda piana è anche soluzione delle equazioni di Maxwell.

Separando la parte reale e la parte immaginaria delle componenti di $\underline{\mathbf{k}}$, si ha:

$$k_x = \beta_x - j\alpha_x,$$

$$k_y = \beta_y - j\alpha_y,$$

$$k_z = \beta_z - j\alpha_z,$$

e definendo i due vettori reali:

$$\underline{\beta} = \underline{x}_o \beta_x + \underline{y}_o \beta_y + \underline{z}_o \beta_z,$$

$$\underline{\alpha} = \underline{x}_o \alpha_x + \underline{y}_o \alpha_y + \underline{z}_o \alpha_z,$$

che prendono il nome rispettivamente di *vettore di fase* e *vettore di attenuazione*, si ha:

$$\underline{E}(x, y, z) = \underline{E}(\mathbf{r}) = \underline{E}_o e^{-j\underline{\beta}\cdot\mathbf{r}} e^{-\underline{\alpha}\cdot\mathbf{r}}.$$

Per capire meglio il significato dei vettori $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$, consideriamo il caso di una generica funzione d'onda vettoriale. Se le tre componenti hanno la stessa fase (a meno di

una costante), si possono generalizzare direttamente e univocamente i concetti di superficie equifase, vettore di fase e velocità di fase (nel regime sinusoidale). Se inoltre le tre componenti presentano un fattore d'ampiezza comune (contenente la dipendenza dalle coordinate), è possibile estendere il concetto di superficie equiampiezza e di onda uniforme. Ebbene, questo è proprio il caso delle nostre onde piane nello spazio libero. C'è un comune fattore di fase $e^{-j\underline{\beta} \cdot \underline{r}}$ e si ha quindi:

$$\Phi(x, y, z) = \underline{\beta} \cdot \underline{r} = \beta_x x + \beta_y y + \beta_z z.$$

Dunque il vettore di fase per l'onda generica

$$\nabla \Phi = \underline{x}_o \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \underline{z}_o \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \beta_x \underline{x}_o + \beta_y \underline{y}_o + \beta_z \underline{z}_o$$

coincide proprio con il $\underline{\beta}$. C'è poi un fattore comune di ampiezza $e^{-\alpha \cdot \underline{r}}$.

Per determinare le superfici equifase, osserviamo che se due punti P e P' , individuati dai vettori \underline{r} ed \underline{r}' , appartengono a una superficie equifase, deve essere $\Phi(\underline{r}) = \Phi(\underline{r}')$, e dunque:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{r} = \underline{\beta} \cdot \underline{r}' \quad \Rightarrow \quad \underline{\beta} \cdot (\underline{r} - \underline{r}') = 0.$$

Pertanto il vettore $\underline{r} - \underline{r}' = \overrightarrow{P'P}$ deve essere ortogonale a $\underline{\beta}$, deve cioè giacere su un piano ortogonale a $\underline{\beta}$. Se ne conclude che le superfici equifase sono i piani normali a $\underline{\beta}$, definiti dall'equazione $\underline{\beta} \cdot \underline{r} = \text{cost}$. Si tratta dunque di un'onda piana. La direzione del vettore $\underline{\beta}$ prende il nome di direzione di propagazione.

In modo analogo le superfici equiampiezza sono i piani normali ad $\underline{\alpha}$. In particolare quindi l'onda piana risulta uniforme se $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ sono paralleli, ovvero se $\underline{\alpha} = 0$ (mentre invece non può mai essere $\underline{\beta} = 0$, come si vedrà tra breve).

La velocità di fase nella direzione di $\underline{\beta}$ è data dalla relazione:

$$v_\beta = \frac{\omega}{\beta}.$$

Invece in una direzione \underline{r}_o che forma con $\underline{\beta}$ un angolo $\theta < \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$v_r = \frac{\omega}{\beta_r} = \frac{\omega}{\beta \cos \theta} = \frac{v_\beta}{\cos \theta} \geq v_\beta.$$

2.3 Proprietà generali delle onde piane

Consideriamo ora di nuovo la condizione di separabilità:

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c = \omega^2 \mu \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) = \omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \sigma ,$$

nel caso in cui il mezzo sia non dispersivo, per cui ε , μ sono reali positive e σ è reale non negativo. Allora k^2 è un numero complesso con parte reale positiva e parte immaginaria negativa (o nulla): sul piano complesso dunque esso è situato nel quarto quadrante (o sull'asse reale positivo). La sua radice quadrata k avrà due possibili determinazioni (opposte): nel quarto (o sul semiasse reale positivo) e nel secondo (o sul semiasse reale negativo). Per convenzione scegliamo la prima, per cui porremo:

$$k = k_R - j k_J \quad \text{con} \quad k_R > 0 \quad \text{e} \quad k_J \geq 0 .$$

Ricordando ora che $\underline{k} = \underline{\beta} - j \underline{\alpha}$ si ottiene:

$$(\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) \cdot (\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) = \beta^2 - \alpha^2 - 2j \underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \omega^2 \mu \varepsilon - j \omega \mu \sigma ,$$

essendo al solito $\beta^2 = \underline{\beta} \cdot \underline{\beta}$ e $\alpha^2 = \underline{\alpha} \cdot \underline{\alpha}$. Uguagliando parti reali e parti immaginarie si ricava:

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \\ \underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = \frac{\omega \mu \sigma}{2} \end{cases} .$$

Dalla prima uguaglianza risulta $\beta \neq 0$ e $\beta > \alpha$. Inoltre i vettori $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ formano un angolo acuto, essendo il loro prodotto scalare positivo.

Consideriamo ora il caso particolare di mezzo non dissipativo ($\sigma = 0$). In questo caso si ha $\underline{\beta} \cdot \underline{\alpha} = 0$, che può essere verificata o per $\underline{\alpha} = 0$, o per $\underline{\alpha}$ ortogonale a $\underline{\beta}$. Dunque anche in assenza di perdite può esistere un vettore di attenuazione $\underline{\alpha}$ non nullo, purché ortogonale al vettore di fase $\underline{\beta}$. Nel primo caso ($\underline{\alpha} = 0$) si ha un'onda piana uniforme non attenuata, per la quale:

$$\underline{k} \equiv \underline{\beta} = \beta \underline{\beta}_o = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \underline{\beta}_o = k \underline{\beta}_o ,$$

essendo $\underline{\beta}_o$ il versore della direzione di $\underline{\beta}$. In questo caso particolare quindi la costante k rappresenta il modulo del vettore di propagazione \underline{k} : in generale non è vero. Inoltre

sempre in questo caso si ha per la velocità di fase nella direzione del $\underline{\beta}$:

$$v_{\beta} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v,$$

coincidente con la velocità della luce nel mezzo³. Nel vuoto come si è già visto si ha $c \simeq 3 \cdot 10^8$ [m/s]. In direzioni diverse da quella di $\underline{\beta}$ si ha una velocità di fase maggiore di v .

L'altra possibilità per mezzi privi di perdite, cioè $\underline{\beta} \perp \underline{\alpha}$, dà luogo a un'onda piana non uniforme, attenuata in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione, e con:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon + \alpha^2} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon + \frac{\alpha^2}{\omega^2}} > k,$$

per cui risulta:

$$v_{\beta} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon + \frac{\alpha^2}{\omega^2}}} < v.$$

Qui inoltre la velocità di fase dipende da ω pur essendo il mezzo non dispersivo. Inoltre in questo caso ci sarà un cono intorno alla direzione di $\underline{\beta}$, per le direzioni all'interno del quale la velocità di fase è minore di v . In generale quando la velocità di fase è minore della velocità della luce, l'onda si dice *lenta*. Nelle direzioni al di fuori del cono l'onda presenta invece una velocità di fase maggiore di v e viene detta *onda veloce*.

Consideriamo ora il caso in cui il mezzo sia dissipativo e quindi $\sigma \neq 0$. In tale situazione sicuramente il vettore $\underline{\alpha}$ dev'essere non nullo e inoltre $\underline{\beta}$ e $\underline{\alpha}$ non possono essere perpendicolari. Potranno però risultare paralleli e si ha dunque in tal caso l'onda uniforme e attenuata, con $\underline{\beta} = \beta \underline{\beta}_o$ e $\underline{\alpha} = \alpha \underline{\beta}_o$. Si ha dunque:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha} = (\beta - j\alpha) \underline{\beta}_o.$$

Inoltre dalla relazione generale:

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j \underline{\beta} \cdot \underline{\alpha}$$

segue in questo caso:

³Si noti che nella nostra ipotesi di mezzo non dispersivo la velocità di fase non dipende da ω .

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 - 2j\beta\alpha = (\beta - j\alpha)^2 \Rightarrow k = \beta - j\alpha \Rightarrow \underline{k} = k \underline{\beta}_o.$$

La condizione $\underline{k} = k \underline{\beta}_o$, con k reale o complesso, è dunque tipica delle onde uniformi.

A questo punto, dopo aver considerato le proprietà di propagazione, cominciamo ad esaminare le proprietà di polarizzazione della singola onda piana, che risultano legate, come già accennato, alla sola parte vettoriale \underline{E}_o . Partiamo in particolare dalla relazione:

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0.$$

Ponendo:

$$\underline{k} = \underline{\beta} - j\underline{\alpha},$$

$$\underline{E}_o = \underline{E}_{oR} + j\underline{E}_{oJ},$$

risulta:

$$(\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) \cdot (\underline{E}_{oR} + j\underline{E}_{oJ}) = 0$$

$$\Rightarrow (\underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oR} + \underline{\alpha} \cdot \underline{E}_{oJ}) + j(\underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oJ} - \underline{\alpha} \cdot \underline{E}_{oR}) = 0.$$

Separando parte reale e parte immaginaria si ottiene:

$$\begin{cases} \underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oR} + \underline{\alpha} \cdot \underline{E}_{oJ} = 0 \\ \underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oJ} - \underline{\alpha} \cdot \underline{E}_{oR} = 0 \end{cases}.$$

In realtà queste condizioni non sono molto espressive almeno nella forma generale, mentre possono esserlo in casi particolari.

Noto il campo elettrico di un'onda piana, il corrispondente campo magnetico si può determinare dalla prima equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} \Rightarrow -j \underline{k} \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{k} \times \underline{E}}{\omega\mu} = \frac{\underline{k} \times \underline{E}_o}{\omega\mu} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = \underline{H}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}},$$

avendo posto $\underline{H}_o = \frac{\underline{k} \times \underline{E}_o}{\omega\mu}$. Dunque il campo magnetico è espresso da una funzione d'onda dello stesso tipo di quella del campo elettrico e che sarà quindi soluzione della $\nabla^2 \underline{H} + k^2 \underline{H} = 0$.

Verifichiamo ora che si ha $\nabla \cdot \underline{H} = 0$, che nelle ipotesi poste coincide con la $\underline{k} \cdot \underline{H}_o = 0$:

$$\underline{k} \cdot \underline{H}_o = \underline{k} \cdot \frac{\underline{k} \times \underline{E}_o}{\omega\mu} = \frac{\underline{k} \times \underline{k} \cdot \underline{E}_o}{\omega\mu} = 0.$$

Verifichiamo ora anche la seconda equazione di Maxwell $\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}$. Si ha:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H} &= -j\underline{k} \times \underline{H} = \frac{-j\underline{k} \times (\underline{k} \times \underline{E}_o)}{\omega\mu} e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = \\ &= -\frac{j}{\omega\mu} \left[\underline{k} (\underline{k} \cdot \underline{E}_o) - \underline{E}_o (\underline{k} \cdot \underline{k}) \right] e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = \\ &= \frac{j}{\omega\mu} k^2 \underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}. \end{aligned}$$

Nota \underline{H} , il campo \underline{E} si ricava dalla:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon_c \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{E} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon_c} (-j\underline{k}) \times \underline{H} = -\frac{1}{\omega\varepsilon_c} \underline{k} \times \underline{H}_o e^{-j\underline{k} \cdot \underline{r}} \\ \Rightarrow \quad \underline{E}_o &= -\frac{\underline{k} \times \underline{H}_o}{\omega\varepsilon_c}. \end{aligned}$$

2.3.1 Onda piana uniforme non attenuata

Vediamo ora il caso particolare di mezzo non dispersivo e non dissipativo (ε e μ reali positive e $\sigma = 0$), per cui deve aversi $\underline{\alpha} = 0$ oppure $\underline{\beta} \perp \underline{\alpha}$. Nel primo caso $\underline{k} \equiv \underline{\beta}$ e le relazioni viste precedentemente si riducono a:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oR} = 0 \quad , \quad \underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oJ} = 0.$$

Col procedimento duale si trova:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{H}_{oR} = 0 \quad , \quad \underline{\beta} \cdot \underline{H}_{oJ} = 0 .$$

Inoltre dalla $\underline{H} = \frac{\underline{k} \times \underline{E}}{\omega\mu}$ segue essendo \underline{k} reale:

$$\underline{H}_{oR} = \frac{\underline{\beta} \times \underline{E}_{oR}}{\omega\mu} \quad , \quad \underline{H}_{oJ} = \frac{\underline{\beta} \times \underline{E}_{oJ}}{\omega\mu} ,$$

e le duali:

$$\underline{E}_{oR} = -\frac{\underline{\beta} \times \underline{H}_{oR}}{\omega\varepsilon} \quad , \quad \underline{E}_{oJ} = -\frac{\underline{\beta} \times \underline{H}_{oJ}}{\omega\varepsilon} .$$

Introduciamo ora alcune denominazioni molto usate per le onde elettromagnetiche. Un'onda si dice *trasversa elettrica* (TE, detta anche H) rispetto ad una certa direzione se il campo elettrico è ortogonale a quella direzione. Invece si dice *trasversa magnetica* (TM, detta anche E) rispetto a una direzione se il campo magnetico è ortogonale a quella direzione. Infine l'onda si dice TEM se sia il campo elettrico sia il campo magnetico sono ortogonali rispetto a quella direzione. Per quanto detto prima, allora, l'onda piana uniforme non attenuata è TEM rispetto alla direzione di propagazione.

Inoltre dalle formule precedenti si vede che abbiamo due gruppi di relazioni, che contengono o solo i vettori \underline{E}_{oR} e \underline{H}_{oR} oppure solo i vettori \underline{E}_{oJ} e \underline{H}_{oJ} . Ciò in sostanza l'onda può essere scomposta in due onde indipendenti polarizzate linearmente. L'onda risultante dalla sovrapposizione delle due è generalmente polarizzata ellitticamente.

Prendiamo in considerazione una delle due onde polarizzate linearmente, la prima, e poniamo:

$$\underline{E}_{oR} = E_{oR} \underline{e}_o \quad , \quad \underline{H}_{oR} = H_{oR} \underline{h}_o .$$

Dalla $\underline{\beta} \cdot \underline{E}_{oR} = 0$ dovrà dunque essere:

$$\underline{\beta}_o \cdot \underline{e}_o = 0 ,$$

per cui $\underline{\beta}_o \times \underline{e}_o$ è un versore (modulo unitario), e inoltre:

$$H_{oR} \underline{h}_o = \frac{\beta E_{oR}}{\omega\mu} \underline{\beta}_o \times \underline{e}_o ,$$

da cui ricavo:

$$\underline{h}_o = \underline{\beta}_o \times \underline{e}_o,$$

per cui i tre versori \underline{e}_o , \underline{h}_o , $\underline{\beta}_o$ formano nell'ordine una terna trirettangola destra, e:

$$H_{oR} = \frac{\beta E_{oR}}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\mu} E_{oR} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{oR},$$

$$E_{oR} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_{oR}.$$

Come si vede il rapporto tra le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico è una quantità (dalle dimensioni fisiche di un'impedenza) che dipende solo dalle caratteristiche del mezzo. Si pone:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

che prende il nome di impedenza caratteristica del mezzo e si misura in Ohm. In particolare per il vuoto si ha:

$$\zeta_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \simeq 120 \pi [\Omega] \simeq 377 [\Omega].$$

Si osservi che $\omega\mu = k\zeta$, perciò:

$$\underline{H} = \frac{1}{\zeta} \underline{\beta}_o \times \underline{E}, \quad (2.1)$$

$$\underline{E} = -\frac{k \times \underline{H}}{\omega\varepsilon} = -\frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{\beta}_o \times \underline{H} = \frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H} \times \underline{\beta}_o.$$

Si osservi ora che:

$$\frac{k}{\omega\varepsilon} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \zeta$$

↓

$$\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{\beta}_o. \quad (2.2)$$

Si osservi che la (2.2) poteva essere ricavata anche dalla (2.1) moltiplicando a destra per $\underline{\beta}_o$ e ricordando che essendo \underline{E} trasverso rispetto a $\underline{\beta}_o$ risulta

$$\underline{\beta}_o \times \underline{E} \times \underline{\beta}_o = \underline{E}.$$

Oppure ancora si poteva moltiplicare a sinistra la (2.1) per $\underline{\beta}_o$, da cui:

$$\underline{\beta}_o \times \underline{H} = \frac{1}{\zeta} \underline{\beta}_o \times (\underline{\beta}_o \times \underline{E}) = -\frac{1}{\zeta} \underline{E},$$

ossia

$$\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{\beta}_o.$$

Infatti in generale si ha che (si noti che in questo caso la parentesi a primo membro è necessaria)

$$\underline{v}_o \times (\underline{v}_o \times \underline{A}) = \underline{v}_o (\underline{v}_o \cdot \underline{A}) - \underline{A} (\underline{v}_o \cdot \underline{v}_o) = -(\underline{A} - A_v \underline{v}_o) = -\underline{A}_\perp$$

(essendo \underline{A}_\perp il componente di \underline{A} ortogonale rispetto alla direzione di \underline{v}_o).

Consideriamo infine l'espressione del vettore di Poynting per questo tipo di onda.

Si avrà:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \frac{1}{2} \underline{E}_o e^{-j\underline{\beta} \cdot \underline{r}} \times \underline{H}_o^* e^{j\underline{\beta} \cdot \underline{r}} = \frac{1}{2} \underline{E}_o \times \frac{\underline{\beta} \times \underline{E}_o^*}{\omega\mu} = \\ &= \frac{1}{2\omega\mu} [\underline{\beta} (\underline{E}_o \cdot \underline{E}_o^*) - \underline{E}_o^* (\underline{E}_o \cdot \underline{\beta})] = \frac{1}{2\omega\mu} \underline{\beta} |\underline{E}_o|^2 = \frac{1}{2\zeta} |\underline{E}_o|^2 \underline{\beta}_o. \end{aligned}$$

Si tratta dunque di un vettore reale, costante e diretto come $\underline{\beta}$.

Considerazioni analoghe valgono per l'altra onda, associata a \underline{E}_{oJ} e \underline{H}_{oJ} .

2.3.2 Onda piana non uniforme attenuata perpendicolarmente alla direzione di propagazione

Passiamo ora a considerare il caso dell'altra onda, con $\underline{\beta} \perp \underline{\alpha}$. Supponiamo dapprima che il campo elettrico sia polarizzato linearmente: in questo caso \underline{E}_{oR} e \underline{E}_{oJ} sono paralleli, e dunque hanno lo stesso versore, che si può assumere come versore del vettore complesso, che poi potremo moltiplicare per un'ampiezza stavolta complessa⁴. Si ha cioè:

$$\underline{E}_o = (E_{oR} + j E_{oJ}) \underline{e}_o.$$

Torniamo ora alla condizione generale $\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0$ che diventa:

$$(\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) \cdot (E_{oR} + j E_{oJ}) \underline{e}_o = 0.$$

⁴in realtà è possibile verificare che questa proprietà caratterizza i vettori polarizzati linearmente.

Eliminando $E_{oR} + j E_{oJ}$, sicuramente non nullo, e separando la parte reale da quella immaginaria si ottiene:

$$\underline{\beta} \cdot \underline{e}_o = 0 \quad , \quad \underline{\alpha} \cdot \underline{e}_o = 0 .$$

Risulta che \underline{e}_o , $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ formano, nell'ordine, una terna trirettangola. Inoltre la $\underline{\beta} \cdot \underline{e}_o = 0$ ci dice che l'onda è di tipo TE rispetto alla direzione di propagazione.

Per il campo magnetico si ha, applicando la relazione generale per le onde piane:

$$\begin{aligned} \underline{H}_o &= \frac{1}{\omega\mu} (\underline{\beta} - j \underline{\alpha}) \times (E_{oR} + j E_{oJ}) \underline{e}_o = \\ &= \frac{E_{oR} + j E_{oJ}}{\omega\mu} \underline{\beta} \times \underline{e}_o - j \frac{E_{oR} + j E_{oJ}}{\omega\mu} \underline{\alpha} \times \underline{e}_o = \underline{H}_{o\alpha} + \underline{H}_{o\beta} , \end{aligned}$$

essendo:

$$\underline{H}_{o\alpha} = \frac{E_{oR} + j E_{oJ}}{\omega\mu} \underline{\beta} \times \underline{e}_o = \frac{E_{oR} + j E_{oJ}}{\omega\mu} \beta \underline{\alpha}_o ,$$

e

$$\underline{H}_{o\beta} = -j \frac{E_{oR} + j E_{oJ}}{\omega\mu} \underline{\alpha} \times \underline{e}_o = j \frac{E_{oR} + j E_{oJ}}{\omega\mu} \alpha \underline{\beta}_o .$$

In generale dunque il vettore \underline{H}_o è polarizzato ellitticamente nel piano individuato da $\underline{\alpha}$ e da $\underline{\beta}$, quindi l'onda non è TM rispetto alla direzione di propagazione.

Consideriamo ora il vettore di Poynting per quest'onda TE. Si avrà:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E}_o e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}} \times \underline{H}_o^* e^{j \underline{k}^* \cdot \underline{r}} = \frac{1}{2} \underline{E}_o \times \frac{\underline{k}^* \times \underline{E}_o^*}{\omega\mu} e^{-j(\underline{k} - \underline{k}^*) \cdot \underline{r}} = \\ &= \frac{1}{2\omega\mu} [\underline{k}^* (\underline{E}_o \cdot \underline{E}_o^*) - \underline{E}_o^* (\underline{E}_o \cdot \underline{k}^*)] e^{-j(\underline{k} - \underline{k}^*) \cdot \underline{r}} = \frac{1}{2\omega\mu} |\underline{E}_o|^2 e^{-2\alpha \cdot \underline{r}} (\underline{\beta} + j \underline{\alpha}) , \end{aligned}$$

in quanto essendo $\underline{e}_o \cdot \underline{k} = 0$ segue anche $\underline{e}_o \cdot \underline{k}^* = 0$, da cui $\underline{E}_o \cdot \underline{k}^* = 0$. In questo caso dunque il vettore di Poynting è complesso, ha una componente reale diretta come $\underline{\beta}$ e una immaginaria diretta come $\underline{\alpha}$. Inoltre non è più costante, ma decade esponenzialmente nella direzione di $\underline{\alpha}$.

Possiamo ora supporre dualmente che sia il campo magnetico ad essere polarizzato linearmente:

$$\underline{H}_o = (H_{oR} + j H_{oJ}) \underline{h}_o ,$$

e dalla relazione generale $\underline{k} \cdot \underline{H}_o = 0$ segue $\underline{\beta} \cdot \underline{h}_o = 0$ e $\underline{\alpha} \cdot \underline{h}_o = 0$. Stavolta \underline{h}_o , $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ formano una terna trirettangola e l'onda è di tipo TM rispetto alla direzione di propagazione.

Per il campo elettrico si ha:

$$\begin{aligned}\underline{E}_o &= -\frac{1}{\omega\varepsilon} (\underline{\beta} - j\underline{\alpha}) \times (H_{oR} + jH_{oJ}) \underline{h}_o = \\ &= -\frac{H_{oR} + jH_{oJ}}{\omega\varepsilon} \underline{\beta} \times \underline{h}_o + j\frac{H_{oR} + jH_{oJ}}{\omega\varepsilon} \underline{\alpha} \times \underline{h}_o = \underline{E}_{o\alpha} + \underline{E}_{o\beta},\end{aligned}$$

essendo

$$\underline{E}_{o\alpha} = -\frac{H_{oR} + jH_{oJ}}{\omega\varepsilon} \underline{\beta} \times \underline{h}_o = -\frac{H_{oR} + jH_{oJ}}{\omega\varepsilon} \beta \underline{\alpha}_o,$$

e

$$\underline{E}_{o\beta} = j\frac{H_{oR} + jH_{oJ}}{\omega\varepsilon} \underline{\alpha} \times \underline{h}_o = -j\frac{H_{oR} + jH_{oJ}}{\omega\varepsilon} \alpha \underline{\beta}_o.$$

Dunque in generale il campo elettrico risulta polarizzato ellitticamente nel piano individuato da $\underline{\alpha}$ e da $\underline{\beta}$, quindi l'onda non è TE rispetto alla direzione di propagazione.

Per il vettore di Poynting si ha:

$$\begin{aligned}\underline{P} &= \frac{1}{2} \underline{E}_o e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}} \times \underline{H}_o^* e^{j\underline{k}^*\cdot\underline{r}} = \\ &= -\frac{1}{2\omega\varepsilon} (\underline{k} \times \underline{H}_o) \times \underline{H}_o^* e^{-j(\underline{k}-\underline{k}^*)\cdot\underline{r}} = \frac{1}{2\omega\varepsilon} [\underline{k}(\underline{H}_o^* \cdot \underline{H}_o) - \underline{H}_o(\underline{H}_o^* \cdot \underline{k})] e^{-j(\underline{k}-\underline{k}^*)\cdot\underline{r}} = \\ &= \frac{|\underline{H}_o|^2}{2\omega\varepsilon} e^{-2\alpha\cdot\underline{r}} \underline{k} = \frac{|\underline{H}_o|^2}{2\omega\varepsilon} e^{-2\alpha\cdot\underline{r}} (\beta - j\alpha).\end{aligned}$$

Anche in questo caso dunque il vettore di Poynting ha una parte reale diretta come $\underline{\beta}$ e una parte immaginaria diretta come $\underline{\alpha}$, e decade esponenzialmente nella direzione di $\underline{\alpha}$.

2.3.3 Onda piana uniforme attenuata

Consideriamo infine il caso di un'onda piana uniforme, ma stavolta attenuata, dunque il mezzo sarà dissipativo. Si avrà in questo caso:

$$\underline{k} = (\beta - j\alpha) \underline{\beta}_o = k \underline{\beta}_o = \omega \sqrt{\mu\varepsilon_c} \underline{\beta}_o.$$

Si è già visto che la condizione $\underline{k} = k \underline{\beta}_o$ è quella che caratterizza le onde uniformi.

Dalla relazione generale $\underline{k} \cdot \underline{E}_o = 0$ segue $\underline{\beta}_o \cdot \underline{E}_o = 0$. Inoltre si ha:

$$\underline{H}_o = \frac{k}{\omega\mu} \underline{\beta}_o \times \underline{E}_o \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_o \cdot \underline{\beta}_o = 0,$$

dunque anche in questo caso di mezzo dissipativo l'onda piana uniforme è TEM rispetto alla direzione di propagazione.

Si noti inoltre che se supponiamo che il campo elettrico sia polarizzato linearmente, cioè $\underline{E}_o = E_o \underline{e}_o$ con E_o quantità scalare in generale complessa, si ha, dalla condizione generale, $\underline{\beta}_o \cdot \underline{e}_o = 0$ e per il campo magnetico:

$$\underline{H}_o = \frac{k E_o}{\omega \mu} \underline{\beta}_o \times \underline{e}_o = H_o \underline{h}_o,$$

ove $\underline{h}_o = \underline{\beta}_o \times \underline{e}_o$ è un versore, essendo $\underline{\beta}_o$ ed \underline{e}_o ortogonali, mentre:

$$\begin{aligned} H_o &= \frac{k}{\omega \mu} E_o = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon_c}}{\omega \mu} E_o = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\mu}} E_o \\ &\Downarrow \\ E_o &= \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} H_o = \zeta H_o. \end{aligned}$$

Dall'ipotesi dunque di campo elettrico polarizzato linearmente, segue che anche il campo magnetico dev'essere polarizzato linearmente. Inoltre i tre versori \underline{e}_o , \underline{h}_o , $\underline{\beta}_o$ formano, nell'ordine, una terna trirettangola destra.

La quantità $\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}$ rappresenta l'espressione più generale (complessa) dell'impedenza caratteristica del mezzo (dissipativo). Naturalmente valgono nel caso generale con ζ complesso le espressioni:

$$\underline{H}_o = \frac{1}{\zeta} \underline{\beta}_o \times \underline{E}_o \quad , \quad \underline{E}_o = \zeta \underline{H}_o \times \underline{\beta}_o.$$

Il vettore di Poynting è espresso dalla:

$$\underline{P} = \frac{1}{2} E_o \underline{e}_o e^{-j\beta \underline{\beta}_o \cdot \underline{r}} e^{-\alpha \underline{\beta}_o \cdot \underline{r}} \times H_o^* \underline{h}_o e^{j\beta \underline{\beta}_o \cdot \underline{r}} e^{-\alpha \underline{\beta}_o \cdot \underline{r}} = \frac{1}{2} \zeta |H_o|^2 e^{-2\alpha \underline{\beta}_o \cdot \underline{r}} \underline{\beta}_o.$$

Si tratta di un vettore complesso diretto come $\underline{\beta}_o$ e che si attenua esponenzialmente nella stessa direzione.

L'ipotesi iniziale di campo elettrico polarizzato linearmente non lede in realtà la generalità del problema, perché una qualsiasi onda piana uniforme, polarizzata in generale ellitticamente, si può esprimere come la somma di due onde di quel tipo. Stabilendo, ad esempio, un sistema cartesiano xy su una superficie equifase, possiamo considerare una prima onda avente \underline{E} polarizzato lungo \underline{x}_o (e allora nec-

essariamente \underline{H} lungo \underline{y}_o), una seconda con \underline{E} polarizzato lungo \underline{y}_o (e \underline{H} polarizzato necessariamente lungo \underline{x}_o).

2.4 Spettro di onde piane

Mostriamo ora esplicitamente l'importanza delle onde piane come mattoni elementari con i quali si può esprimere, mediante una sovrapposizione, un'onda qualsiasi (ad es. cilindrica, sferica, etc.).

Prenderemo in considerazione un mezzo semplice, omogeneo, isotropo, non dispersivo e non dissipativo. Abbiamo già visto come l'equazione di Helmholtz si poteva vedere come ottenuta mediante una trasformazione di Fourier rispetto al tempo dell'equazione di d'Alembert. Ci viene allora in mente di poter trasformare ulteriormente rispetto alle altre coordinate. Per esempio, rispetto alla variabile x , si avrà:

$$\underline{E}(k_x, y, z, \omega) = \mathcal{F}_x [\underline{E}(x, y, z, \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(x, y, z, \omega) e^{jk_x x} dx,$$

e l'inversa:

$$\underline{E}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(k_x, y, z, \omega) e^{-jk_x x} dk_x.$$

L'equazione di Helmholtz si scrive in coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} + k^2 \underline{E} = 0$$

↓

$$-k_x^2 \underline{E} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} + k^2 \underline{E} = 0.$$

La derivata seconda rispetto a x si trasforma infatti come è noto in una moltiplicazione per $-k_x^2$. Per ritrovare il campo nel dominio del tempo devo svolgere una doppia antitrasformata, rispetto a k_x e rispetto a ω .

A questo punto trasformo anche rispetto a y , e l'equazione diventa differenziale ordinaria:

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dz^2} + (k^2 - k_x^2 - k_y^2) \underline{E} = 0.$$

la cui incognita è il campo $\underline{E}(k_x, k_y, z, \omega)$, dal quale risalgo al campo nel tempo

mediante un'antitrasformata tripla:

$$\underline{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(k_x, k_y, z, \omega) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} dk_x dk_y d\omega .$$

Se ora trasformo l'equazione anche rispetto alla variabile z si ottiene:

$$(k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \underline{E} = 0 ,$$

la cui incognita è il campo quattro volte trasformato $\underline{E}(k_x, k_y, k_z, \omega)$, dal quale si potrebbe pensare di ottenere il campo reale mediante la

$$\underline{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(k_x, k_y, k_z, \omega) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} dk_x dk_y dk_z d\omega .$$

Questa è l'espressione dello spettro di onde piane, che mostra come un generico campo elettrico, purché quattro volte trasformabile secondo Fourier rispetto alle variabili spaziali e al tempo, si possa esprimere come una sovrapposizione (integrale) di onde piane di ampiezza infinitesima:

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \underline{E}(k_x, k_y, k_z, \omega) dk_x dk_y dk_z d\omega ,$$

ovviamente costante rispetto a x, y, z, t .

Notiamo però che tale generico campo elettrico non deve solo essere una funzione quattro volte Fourier trasformabile, ma deve anche essere un'onda, cioè una soluzione dell'equazione di Helmholtz, e quindi tale che la sua trasformata quadrupla soddisfi la

$$(k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) \underline{E} = 0 ,$$

che ammette soluzioni diverse da quella banale identicamente nulla solo se

$$k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 \mu \varepsilon = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 .$$

Si ritrova dunque in questo dominio quattro volte trasformato la condizione di separabilità che risultava, nel caso di singola onda piana, dall'ipotesi di separazione delle variabili per l'equazione di Helmholtz.

Sarebbe dunque un errore antitrasformare rispetto alle quattro variabili, perché

non sono indipendenti. Scegliamo ad esempio di non trasformare rispetto alla variabile z . In questo caso posso risolvere l'equazione differenziale ordinaria vista precedentemente, che ammette per

$$(k^2 - k_x^2 - k_y^2) \neq 0$$

l'integrale generale

$$\underline{E}(k_x, k_y, z, \omega) = \underline{E}_1(k_x, k_y, \omega) e^{-j\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cdot z} + \underline{E}_2(k_x, k_y, \omega) e^{j\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} \cdot z},$$

che posso poi inserire nell'integrale triplo visto prima per ottenere il campo $\underline{E}(x, y, z, t)$.

Ricordiamo inoltre che per mezzi dissipativi non è lecito assumere k_x, k_y, k_z, ω tutti reali, come è invece richiesto dalla definizione di trasformata di Fourier. Dovrò pertanto ricorrere alla trasformata di Laplace.

Si osservi poi che le onde piane dello spettro non sono tutte uniformi: all'esterno infatti del cosiddetto "cerchio di visibilità" $k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ tali onde risultano non uniformi attenuate nella direzione \underline{z}_o . Si ha $k_z = -j\alpha_z$ e dunque:

$$\underline{\beta} = k_x \underline{x}_o + k_y \underline{y}_o \quad , \quad \underline{\alpha} = \alpha_z \underline{z}_o \quad , \quad \underline{\beta} \perp \underline{\alpha}.$$

Tuttavia per grandi valori di z la parte non uniforme (o non omogenea, o, come viene denominata in letteratura, evanescente) risulta attenuata a livelli trascurabili.

Lo spettro di onde piane considerato viene detto anche spettro angolare, perché al variare dei numeri d'onda cambia anche l'angolazione dell'onda piana elementare.

2.5 Determinazione del campo elettrico di un'onda monocromatica in un semispazio

Supponiamo di voler dare un'espressione per il campo elettrico di un'onda monocromatica, nel semispazio $z \geq 0$. In questo caso l'integrale triplo visto nel caso generale diviene un integrale doppio rispetto a una coppia di numeri d'onda, per esempio k_x e k_y . Inoltre, dal momento che la regione d'interesse è indefinita, per $z \geq 0$ si possono considerare le onde piane componenti che viaggiano nel verso positivo delle

z . Risulta quindi per il fasore del campo elettrico:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} e^{-jk_z z} dk_x dk_y,$$

con $k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_x^2 - k_y^2}$. Sul piano $z = 0$ si ha:

$$\underline{E}(x, y, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y,$$

ossia il campo elettrico sul piano $z = 0$ è l'antitrasformata doppia di Fourier della funzione di ampiezza dello spettro $\underline{E}(k_x, k_y)$. Invertendo la trasformazione si ha allora:

$$\underline{E}(k_x, k_y) = \mathcal{F}[\underline{E}(x, y, 0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(x, y, 0) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy.$$

In sostanza quindi, per ottenere il campo elettrico nel semispazio è sufficiente conoscere il campo stesso sul piano $z = 0$ (cfr. il principio di Huygens per le onde sferiche elementari, che costituiscono come le onde piane un insieme completo). Si ha dunque:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(x', y', 0) e^{j(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \right] e^{-j(k_x x + k_y y)} e^{-jk_z z} dk_x dk_y.$$

Riarrangiando l'espressione precedente si può scrivere:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \underline{E}(x', y', 0) \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j[k_x(x-x') + k_y(y-y') + k_z z]} dk_x dk_y \right\} dx' dy'.$$

La quantità in parentesi graffa si dice *propagatore diretto* $h^z(x - x', y - y')$. Dunque risulta:

$$\underline{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h^z(x - x', y - y') \underline{E}(x', y', 0) dx' dy',$$

cioè il campo propagato si esprime con una doppia convoluzione fra il campo sul piano $z = 0$ e il propagatore h^z .

Quindi il processo di propagazione dal piano $z = 0$ a un generico piano $z = cost > 0$ ha sul campo $\underline{E}(x', y', 0)$ lo stesso effetto del passaggio attraverso un sistema lineare e permanente di risposta impulsiva h^z . Posso allora introdurre una funzione di trasferimento $H^z(k_x, k_y)$. Per averne l'espressione si noti che anche $\underline{E}(x, y, z)$ si

può scrivere come una doppia antitrasformata di Fourier, nella forma:

$$\begin{aligned}\underline{E}(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underline{E}(k_x, k_y) e^{-jk_z z} \right] e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{E}^z(k_x, k_y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y,\end{aligned}$$

avendo posto $\underline{E}^z(k_x, k_y) = \underline{E}(k_x, k_y) e^{-jk_z z}$. In pratica è come se prendessi il piano $z = cost > 0$ come un nuovo piano di riferimento. Si ha dunque per la funzione di trasferimento:

$$H^z(k_x, k_y) = e^{-jk_z z}.$$

2.6 Onde piane non monocromatiche

Abbiamo in precedenza introdotto il concetto di velocità di fase per un'onda generica. Abbiamo poi parlato in particolare delle onde piane. Per il caso di onda piana uniforme in un mezzo non dissipativo si ha per la costante di fase (modulo del vettore di fase) $\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ che nel caso di mezzo non dispersivo risulta una funzione lineare della frequenza. La velocità di fase poi nella direzione di $\underline{\beta}$ coincideva con la velocità di propagazione della luce nel mezzo ($v_\beta = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = v$), che nelle ipotesi fatte risulta una costante.

Nel caso generale di mezzo dispersivo si considerano usualmente dei diagrammi detti diagrammi di dispersione o di Brillouin (dal nome del fisico francese che studiò questi fenomeni), che normalmente portano in ascissa la pulsazione o la frequenza e in ordinata il numero d'onda o la costante di fase; oppure in ascissa il numero d'onda e in ordinata la pulsazione: questa è la loro versione classica.

È chiaro che nel caso di mezzo non dispersivo il diagramma suddetto è una retta con una certa pendenza ϕ rispetto all'asse delle ascisse, e si ha evidentemente:

$$v_\beta = \frac{\omega}{\beta} = \tan \phi.$$

Nel caso di mezzo dispersivo si avrà invece una curva, e nella relazione precedente l'angolo ϕ (e quindi la velocità di fase) dipende da ω . Come già accennato, la conseguenza di questo fatto è che per un campo elettromagnetico non monocromatico (si pensi a un segnale modulato impiegato nelle telecomunicazioni) le singole componen-

ti di frequenza si propagano con diverse velocità di fase e dunque la configurazione del campo cambia in generale durante la propagazione.

2.6.1 Velocità di battimento

Per precisare le considerazioni precedenti, consideriamo dapprima il fenomeno del battimento, cioè vediamo quale campo risulta dalla sovrapposizione di due onde piane uniformi monocromatiche di frequenza diversa ma uguale ampiezza, propagantisi entrambe nella direzione z . I campi elettrici istantanei saranno:

$$\underline{E}_1(z, t) = \text{Re}[\underline{E}_o e^{j(\omega_1 t - \beta_1 z)}],$$

$$\underline{E}_2(z, t) = \text{Re}[\underline{E}_o e^{j(\omega_2 t - \beta_2 z)}].$$

A questo punto poniamo:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2},$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Da cui

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) - \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2},$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) + \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}.$$

Poi poniamo:

$$\bar{\beta} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2},$$

$$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1.$$

Si noti che è in generale $\bar{\beta} \neq \beta(\bar{\omega})$, perché la legge di dispersione non è in generale lineare. Risulta poi, similmente:

$$\beta_1 = \bar{\beta} - \frac{\Delta\beta}{2},$$

$$\beta_2 = \bar{\beta} + \frac{\Delta\beta}{2}.$$

Per il campo complessivo si ha:

$$\underline{E}(z, t) = \underline{E}_1(z, t) + \underline{E}_2(z, t) = \text{Re}\{\underline{E}_o e^{j[(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2})t - (\bar{\beta} - \frac{\Delta\beta}{2})z]} + \underline{E}_o e^{j[(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2})t - (\bar{\beta} + \frac{\Delta\beta}{2})z]}\} =$$

$$= \operatorname{Re}\{\underline{E}_o e^{j(\bar{\omega}t - \bar{\beta}z)} [e^{-j(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z)} + e^{j(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z)}]\} = 2 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z\right) \operatorname{Re}[\underline{E}_o e^{j(\bar{\omega}t - \bar{\beta}z)}].$$

Il campo risultante quindi si può vedere come un'onda piana avente come pulsazione la media delle due e come costante di fase la media delle due, però con ampiezza (reale) non costante, modulata dal fattore $2 \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z)$. A questo effetto si dà il nome di battimento.

La velocità di fase di quest'onda nella direzione z sarà $\bar{\omega}/\bar{\beta}$. L'ampiezza dell'onda costituisce l'involuppo del battimento e varia con lo spazio e con il tempo, muovendosi però nella direzione z come se fosse una sagoma rigida. Possiamo definire la velocità con cui si sposta l'involuppo come la velocità di un osservatore che si muova nella direzione z in modo tale da non osservare variazioni di ampiezza. Per tale osservatore dovrà perciò essere:

$$\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}z = \text{cost}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\omega dt - \Delta\beta dz = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\omega dt = \Delta\beta dz$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = v_b.$$

La quantità v_b si dice velocità di battimento.

2.6.2 Velocità di gruppo di un pacchetto d'onde

Consideriamo ora il caso più generale di un campo funzione delle variabili z e t rappresentato, come antitrasformata di Fourier, da uno spettro di onde piane uniformi propagantisi nella direzione z :

$$\underline{E}(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}_o(\omega) e^{-j\beta(\omega)z} e^{j\omega t} d\omega$$

(è un caso particolare degli spettri visti precedentemente in assenza di due numeri d'onda, k_x e k_y , e in cui ho deciso di fare l'integrazione rispetto a ω , ma potevo ovviamente farla anche rispetto a β).

Facciamo l'ulteriore ipotesi che l'ampiezza $\underline{E}_o(\omega)$ sia diversa da zero solo nella banda $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ e che si tratti come si dice di un "pacchetto d'onde", cioè valga la condizione

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_o \quad \text{con} \quad \omega_o = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

A questo punto posso sviluppare la funzione (di dispersione) $\beta = \beta(\omega)$ in serie di Taylor di punto iniziale ω_o e fermarmi ai termini del primo ordine:

$$\beta(\omega) \simeq \beta(\omega_o) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} (\omega - \omega_o) = \beta_o + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} \Delta\omega,$$

avendo posto

$$\beta_o = \beta(\omega_o), \quad \text{diverso da} \quad \frac{\beta(\omega_1) + \beta(\omega_2)}{2}$$

$$\Delta\omega = \omega - \omega_o \Rightarrow \omega = \omega_o + \Delta\omega.$$

Introducendo nell'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{E}(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \underline{E}_o(\omega) e^{-j(\beta_o + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} \Delta\omega)z} e^{j(\omega_o + \Delta\omega)t} d\omega = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \underline{E}_o(\omega) e^{j\Delta\omega(t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} z)} d\omega \right] e^{-j\beta_o z} e^{j\omega_o t}. \end{aligned}$$

Tale espressione si può vedere ancora una volta come un'onda piana uniforme di pulsazione uguale a quella di centro banda, di costante di fase corrispondente a tale pulsazione e di velocità di fase pari a ω_o/β_o , però con ampiezza (in questo caso complessa) non costante. Il fattore moltiplicativo complesso rappresenta l'involuppo (complesso) di modulazione.

Anche in questo caso, come è avvenuto per il battimento, posso definire una velocità dell'involuppo che si muove come se fosse una sagoma rigida, cioè la velocità con cui un osservatore deve muoversi nella direzione z per non osservare variazioni nell'ampiezza (complessa). Dovrà perciò essere, al variare di z e di t ,

$$\begin{aligned} t - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} z = cost &\Rightarrow dt - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} dz = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow dt = \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o} dz &\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_o}} = v_g. \end{aligned}$$

Tale velocità prende il nome di velocità di gruppo del pacchetto d'onde. Se la funzione

$\beta = \beta(\omega)$ risulta invertibile, detta $\omega = \omega(\beta)$ la funzione inversa, si ha $v_g = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta_o}$.

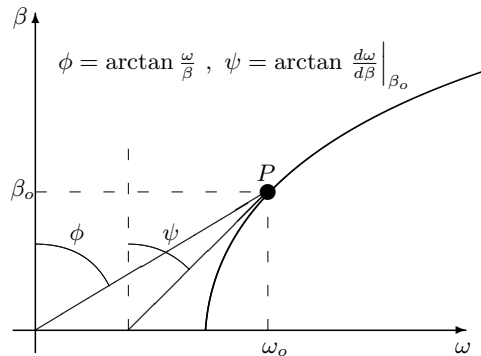


Figura 2.1: Velocità di gruppo.

Si noti che nel caso di un mezzo non dispersivo la velocità v_g è indipendente da ω_o e coincide con la velocità di fase nella direzione z . Infatti se tutte le onde componenti si propagano alla stessa velocità, anche il loro involuppo si propaga a quella velocità.

Si osservi che se la banda non è stretta, non è lecito considerare solo il primo ordine nello sviluppo di Taylor della funzione di dispersione e il pacchetto si deforma durante la propagazione. Si devono introdurre in tal caso altre velocità (teoria dei precursori di Brillouin).

Se il fenomeno propagatorio non è più unidirezionale, cioè se la direzione di propagazione delle onde componenti il pacchetto varia, occorre generalizzare la trattazione. Riprendiamo in considerazione lo spettro di onde piane rappresentato da un integrale triplo, però stavolta scegliamo di non integrare rispetto alla pulsazione, ma rispetto ai tre numeri d'onda. Si avrà:

$$\underline{E}(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}_o(\underline{k}) e^{j[\omega(\underline{k})t - \underline{k} \cdot \underline{r}]} dk_x dk_y dk_z.$$

Supponiamo ora che l'ampiezza $\underline{E}_o(\underline{k}) = \underline{E}_o(k_x, k_y, k_z)$ risulti diversa da zero solo per

$$k_{x1} \leq k_x \leq k_{x2} \quad , \quad k_{y1} \leq k_y \leq k_{y2} \quad , \quad k_{z1} \leq k_z \leq k_{z2} \quad ,$$

e che inoltre sia

$$k_{x2} - k_{x1} \ll |k_{xo}| \quad ,$$

essendo:

$$k_{xo} = \frac{k_{x1} + k_{x2}}{2} \quad ,$$

e analogamente sia:

$$k_{y2} - k_{y1} \ll |k_{y0}| \quad , \quad k_{z2} - k_{z1} \ll |k_{z0}| \quad ,$$

con

$$k_{y0} = \frac{k_{y1} + k_{y2}}{2} \quad , \quad k_{z0} = \frac{k_{z1} + k_{z2}}{2} \quad .$$

Siamo a questo punto in presenza di un pacchetto di onde piane, e posso sviluppare la funzione di tre variabili $\omega(\underline{k}) = \omega(k_x, k_y, k_z)$ in serie di Taylor di punto iniziale $\underline{k}_o = \underline{x}_o k_{x0} + \underline{y}_o k_{y0} + \underline{z}_o k_{z0}$ arrestando lo sviluppo al primo ordine. Si ha allora:

$$\omega(\underline{k}) \simeq \omega(\underline{k}_o) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_{\underline{k}_o} (k_x - k_{x0}) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|_{\underline{k}_o} (k_y - k_{y0}) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right|_{\underline{k}_o} (k_z - k_{z0}) \quad .$$

Definendo ora il vettore $\underline{\Delta k} = \underline{k} - \underline{k}_o = \underline{x}_o(k_x - k_{x0}) + \underline{y}_o(k_y - k_{y0}) + \underline{z}_o(k_z - k_{z0}) \Rightarrow \underline{k} = \underline{k}_o + \underline{\Delta k}$ si ha:

$$\omega(\underline{k}) \simeq \omega(\underline{k}_o) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \right|_{\underline{k}_o} \underline{x}_o \cdot \underline{\Delta k} + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_y} \right|_{\underline{k}_o} \underline{y}_o \cdot \underline{\Delta k} + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \right|_{\underline{k}_o} \underline{z}_o \cdot \underline{\Delta k} \quad .$$

Definisco inoltre l'operatore (nabla nello spazio dei numeri d'onda):

$$\nabla_k = \underline{x}_o \frac{\partial}{\partial k_x} + \underline{y}_o \frac{\partial}{\partial k_y} + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial k_z} \quad ,$$

ottenendo la notazione più compatta:

$$\omega(\underline{k}) \simeq \omega(\underline{k}_o) + \nabla_k \omega \Big|_{\underline{k}_o} \cdot \underline{\Delta k};$$

per cui l'esponenziale che compare nell'integrale si può scrivere così:

$$e^{j[\omega(\underline{k}) t - \underline{k} \cdot \underline{r}]} \simeq e^{j[\omega(\underline{k}_o) t - \underline{k}_o \cdot \underline{r}]} e^{j(\nabla_k \omega|_{\underline{k}_o} \cdot \underline{\Delta k} t - \underline{\Delta k} \cdot \underline{r})} = e^{j[\omega(\underline{k}_o) t - \underline{k}_o \cdot \underline{r}]} e^{j(\nabla_k \omega|_{\underline{k}_o} t - \underline{r}) \cdot \underline{\Delta k}} \quad .$$

Si ha infine per il campo nel tempo:

$$\underline{E}(x, y, z, t) = \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k_{x1}}^{k_{x2}} \int_{k_{y1}}^{k_{y2}} \int_{k_{z1}}^{k_{z2}} \underline{E}_o(\underline{k}) e^{j(\nabla_k \omega|_{\underline{k}_o} t - \underline{r}) \cdot \underline{\Delta k}} dk_x dk_y dk_z \right] e^{j[\omega(\underline{k}_o) t - \underline{k}_o \cdot \underline{r}]} \quad .$$

Abbiamo ottenuto ancora una volta un'onda piana uniforme modulata, di vettore d'onda \underline{k}_o e di pulsazione $\omega(\underline{k}_o)$. La velocità di fase in una certa direzione \underline{r}_o sarà al

solito $\frac{\omega(\underline{k}_o)}{k_{or}}$.

Si può definire anche in questo caso una velocità dell'involuppo. Affinché un osservatore non veda variazioni di ampiezza al variare di \underline{r} e di t , dovrà essere $\nabla_{\underline{k}_o} \omega \Big|_{\underline{k}_o} t - \underline{r} = \underline{cost}$, da cui differenziando si ha:

$$\nabla_{\underline{k}_o} \omega \Big|_{\underline{k}_o} dt - d\underline{r} = 0 \Rightarrow d\underline{r} = \nabla_{\underline{k}_o} \omega \Big|_{\underline{k}_o} dt \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \nabla_{\underline{k}_o} \omega \Big|_{\underline{k}_o},$$

che rappresenta la velocità di gruppo per il pacchetto di onde piane considerato. A differenza della velocità di fase, quindi, la velocità di gruppo è definita in generale come un vettore.

Facciamo vedere ora, per inciso, che vale la seguente relazione tra una certa variazione di frequenza Δf e la corrispondente variazione di lunghezza d'onda $\Delta \lambda$: $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$. Sappiamo che $\omega = 2\pi f \Rightarrow \Delta \omega = 2\pi \Delta f$. D'altra parte $v = \lambda f$, e ponendo $\Delta f = f_2 - f_1$ assumendo $f_2 > f_1$, $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ con $\lambda_1 > \lambda_2$

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f_2 - f_1}{f_1} = \frac{\frac{v}{\lambda_2} - \frac{v}{\lambda_1}}{\frac{v}{\lambda_1}} = \frac{\lambda_1 v - \lambda_2 v}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}.$$

Il rapporto $\frac{\Delta f}{f}$ è importante per valutare ad esempio la bontà di un risonatore, definita dal cosiddetto fattore di merito o fattore di qualità Q, un parametro che risulta inversamente proporzionale a $\frac{\Delta f}{f}$, dove Δf è in questo caso la larghezza convenzionale del picco di risonanza (per esempio la larghezza a 3 decibel dal massimo o dal minimo, oppure la larghezza a metà altezza). Più è alto il Q, più il picco è stretto e quindi la curva di risonanza è selettiva. Il caso ideale sarebbe la delta di Dirac, il caso più realistico è la curva lorentziana, come quella vista in precedenza per $\varepsilon_j(\omega)$, che infatti rappresenta fenomeni di perdita dovuti ad assorbimento per risonanza.

2.7 Riflessione e trasmissione di onde piane da una interfaccia piana: incidenza normale

Finora abbiamo considerato la propagazione di onde piane nello spazio libero. Rivediamo ora gli effetti della presenza di una superficie piana di separazione tra due semispazi occupati da mezzi diversi, supposti omogenei, isotropi, generalmente dispersivi e dissipativi. Partiamo dal caso più semplice di incidenza normale lungo la

direzione z (nel verso positivo) di un'onda piana uniforme, proveniente da un mezzo 1 di costanti $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$. L'altro semispazio è occupato da un mezzo 2 di costanti $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$.

Prendiamo in esame inoltre il caso di polarizzazione lineare, visto che la più generale polarizzazione ellittica si può esprimere come sovrapposizione di due casi di polarizzazione lineare. Quindi consideriamo ad esempio il campo elettrico dell'onda incidente polarizzato lungo la direzione x (o meglio scegliamo la direzione x come coincidente con quella di polarizzazione del campo elettrico).

In tutti i problemi in presenza di ostacoli, problemi di "scattering" (diffusione) o di diffrazione, si parla sempre di campo incidente per indicare in sostanza il campo che si avrebbe se l'ostacolo non ci fosse. Tale campo si suppone noto. Quindi in qualche modo il campo incidente è un campo ideale: la presenza dell'ostacolo, che in questo caso molto semplice è l'interfaccia piana indefinita, impone delle condizioni aggiuntive (le condizioni al contorno) che non possono essere soddisfatte dal solo campo incidente e che richiedono nel mezzo 1 la presenza, oltre ad esso, di un'ulteriore parte del campo totale: il campo riflesso. Nel mezzo 2 invece il campo assume caratteristiche diverse e prende il nome di campo trasmesso.

Per il campo elettrico incidente si avrà dunque:

$$\underline{E}^i(x, y, z) = \underline{E}_o^i e^{-j\underline{k}^i \cdot \underline{r}},$$

con

$$\underline{E}_o^i = E_o^i \underline{e}_o^i = E_o^i \underline{x}_o,$$

$$\underline{k}^i = k_1 \underline{\beta}_o^i = k_1 z_o = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_{c1}} z_o.$$

Di conseguenza, come visto in precedenza, anche il campo magnetico incidente deve essere polarizzato linearmente e si ha:

$$\underline{H}^i = \underline{H}_o^i e^{-j\underline{k}^i \cdot \underline{r}},$$

con

$$\underline{H}_o^i = H_o^i \underline{h}_o^i,$$

$$\underline{h}_o^i = \underline{\beta}_o^i \times \underline{e}_o^i = z_o \times \underline{x}_o = \underline{y}_o.$$

Si ha inoltre la relazione di impedenza tra le ampiezze:

$$E_o^i = \zeta_1 H_o^i = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{c1}}} H_o^i.$$

Nell'ipotesi di assenza di correnti superficiali sulla superficie $z=0$ (se nessuno dei due mezzi è conduttore perfetto), le condizioni al contorno richiedono la continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico. È in tal modo possibile determinare il campo elettromagnetico delle due onde incognite (riflessa e trasmessa).

Supponiamo per ragioni di simmetria che anche tali onde siano piane. Poniamo allora per il campo riflesso:

$$\begin{aligned} \underline{E}^r(x, y, z) &= \underline{E}_o^r e^{-jk^r \cdot \underline{r}}, \\ \underline{H}^r(x, y, z) &= \underline{H}_o^r e^{-jk^r \cdot \underline{r}}, \end{aligned}$$

e per quello trasmesso:

$$\begin{aligned} \underline{E}^t(x, y, z) &= \underline{E}_o^t e^{-jk^t \cdot \underline{r}}, \\ \underline{H}^t(x, y, z) &= \underline{H}_o^t e^{-jk^t \cdot \underline{r}}. \end{aligned}$$

Si noti ora che l'esistenza stessa di condizioni al contorno per $z = 0$

$$\underline{n} \times (\underline{E}_2 - \underline{E}_1) = 0,$$

$$\underline{n} \times (\underline{H}_2 - \underline{H}_1) = 0,$$

(con \underline{n} diretta dal mezzo 1 al mezzo 2, cioè $\underline{n} \equiv \underline{z}_o$), condizioni che debbano essere soddisfatte per tutti i punti del piano (e in ogni istante) implica che la legge di variazione spaziale (e anche la pulsazione, in caso di regime sinusoidale) sia la stessa per $z = 0$. Dovrà quindi essere:

$$k_x^r = k_x^t = k_x^i,$$

$$k_y^r = k_y^t = k_y^i;$$

per cui essendo $k_x^i = k_y^i = 0$ ne segue che anche l'onda riflessa e quella trasmessa viaggiano nella direzione z e sono onde (piane) uniformi (e quindi TEM rispetto alla

direzione z). Si ha dunque:

$$\underline{k}^r = k_1 \underline{\beta}_o^r = -k_1 \underline{z}_o,$$

in quanto l'onda riflessa si propaga nel verso negativo delle z . Per l'onda trasmessa si ha:

$$\underline{k}^t = k_2 \underline{\beta}_o^t = k_2 \underline{z}_o = \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_{c2}} \underline{z}_o.$$

Con le posizioni viste la condizione al contorno diventa:

$$\underline{z}_o \times [\underline{E}_o^t - (\underline{E}_o^i + \underline{E}_o^r)] = 0,$$

$$\underline{z}_o \times [\underline{H}_o^t - (\underline{H}_o^i + \underline{H}_o^r)] = 0.$$

Per quanto riguarda la polarizzazione dei campi riflesso e trasmesso, essendo nulla la componente lungo y del campo elettrico dell'onda incidente, non c'è motivo di ritenere che i campi elettrici dell'onda riflessa e trasmessa possano avere componenti non nulle secondo y . Si avrà quindi:

$$\underline{E}_o^r = E_o^r \underline{x}_o,$$

$$\underline{E}_o^t = E_o^t \underline{x}_o,$$

e quindi anche le onde riflessa e trasmessa risultano polarizzate linearmente. La condizione al contorno per il campo elettrico diventa:

$$\underline{z}_o \times \underline{x}_o [E_o^t - (E_o^i + E_o^r)] = 0$$

↓

$$E_o^t = E_o^i + E_o^r.$$

Per il campo magnetico, risultano i versori:

$$\underline{h}_o^r = \underline{\beta}_o^r \times \underline{e}_o^r = -\underline{z}_o \times \underline{x}_o = -\underline{y}_o \Rightarrow \underline{H}_o^r = -H_o^r \underline{y}_o,$$

$$\underline{h}_o^t = \underline{\beta}_o^t \times \underline{e}_o^t = \underline{z}_o \times \underline{x}_o = \underline{y}_o \Rightarrow \underline{H}_o^t = H_o^t \underline{y}_o.$$

La condizione al contorno per il campo magnetico diventa allora:

$$\underline{z}_o \times \underline{y}_o [H_o^t - (H_o^i - H_o^r)] = 0$$

↓

$$H_o^t = H_o^i - H_o^r .$$

Facendo uso della relazione di impedenza si conclude che:

$$\frac{E_o^t}{\zeta_2} = \frac{E_o^i}{\zeta_1} - \frac{E_o^r}{\zeta_1} .$$

Abbiamo dunque ricavato un sistema lineare di due equazioni lineari nelle due incognite E_o^r e E_o^t , che ci permette di determinare completamente le onde riflessa e trasmessa. Si ha, combinando le due equazioni:

$$\frac{E_o^i - E_o^r}{\zeta_1} = \frac{E_o^i + E_o^r}{\zeta_2}$$

↓

$$E_o^r \left(\frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2} \right) = E_o^i \left(\frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2} \right) .$$

Definendo il coefficiente di riflessione del campo elettrico Γ_E come il rapporto tra le ampiezze (complesse) del campo elettrico dell'onda riflessa e di quella incidente, si ricava:

$$\Gamma_E = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\frac{1}{\zeta_1} - \frac{1}{\zeta_2}}{\frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2}} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} - 1}{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} + 1}$$

↓

$$E_o^r = \Gamma_E E_o^i \quad e \quad E_o^t = (1 + \Gamma_E) E_o^i .$$

Si conclude dunque che, nel caso di incidenza normale, se i due mezzi sono diversi c'è sempre riflessione. Nel caso di incidenza obliqua invece, come si vedrà, esiste una condizione in cui si verifica trasmissione totale (angolo di Brewster).

Si definisce analogamente un coefficiente di trasmissione del campo elettrico

$$T_E = \frac{E_o^t}{E_o^i} = 1 + \Gamma_E = 1 + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{\zeta_2 + \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2\zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2}{1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{2}{1 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2}} .$$

Analoghi coefficienti si definiscono per il campo magnetico:

$$\Gamma_H = \frac{H_o^r}{H_o^i} = \frac{\frac{E_o^r}{\zeta_1}}{\frac{E_o^i}{\zeta_1}} = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \Gamma_E ,$$

$$T_H = \frac{H_o^t}{H_o^i} = \frac{\frac{E_o^t}{\zeta_2}}{\frac{E_o^i}{\zeta_1}} = \frac{\zeta_1 E_o^t}{\zeta_2 E_o^i} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} T_E = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} (1 + \Gamma_H) = \frac{2\zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1} = \frac{2}{1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}}.$$

Come osservazione conclusiva si noti che le espressioni ottenute per i coefficienti di riflessione e di trasmissione valgono qualunque sia la polarizzazione dell'onda incidente. Nel caso di incidenza obliqua, invece, si vedrà che le espressioni dei coefficienti dipendono dalla polarizzazione.

Consideriamo ora il caso particolare di mezzi non dispersivi, e inoltre il mezzo 1 sia un dielettrico non dissipativo ($\sigma_1 = 0$) e il mezzo 2 un buon conduttore ($\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_2$). Si noti che sarà anche $\sigma_2 \gg \omega\varepsilon_1$ perché le costanti dielettriche degli usuali mezzi materiali differiscono al più di uno o due ordini di grandezza. Supponiamo infine che nessuno dei due mezzi sia ferromagnetico $\Rightarrow \mu_2 \simeq \mu_1$. Si ha allora:

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}},$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{c2}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{j\omega\varepsilon_{c2}}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\varepsilon_2}} \simeq \sqrt{\frac{j\omega\mu_1}{\sigma_2}} = \sqrt{j} \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\sigma_2}}.$$

Si ricordi ora che:

$$\sqrt{j} = j^{\frac{1}{2}} = (e^{j\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+j)}{\sqrt{2}}$$

↓

$$\zeta_2 \simeq (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\sigma_2}}.$$

Per cui si ha per il rapporto tra le impedenze in modulo:

$$\left| \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right| \simeq \left| (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{2\sigma_2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \right| = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_1}{2\sigma_2}} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_1}{\sigma_2}} \ll 1.$$

Posso quindi porre:

$$\Gamma_E = \Gamma_H \simeq -1,$$

mentre

$$T_E \simeq 0 \quad , \quad T_H \simeq 2.$$

Tuttavia si badi che non è lecito estrapolare da queste formule i valori per il caso del conduttore perfetto ($\sigma_2 \rightarrow \infty$), perché in quel caso non è più vera la condizione di continuità per la componente tangenziale del campo magnetico, in quanto compare

anche la densità superficiale di corrente. Il caso del conduttore perfetto deve essere perciò studiato a parte.

Consideriamo allora un mezzo 1 che sia un dielettrico non dissipativo ($\sigma_1 = 0$) e un mezzo 2 che sia un conduttore perfetto ($\sigma_2 \rightarrow \infty$). Di conseguenza il campo elettrico e quello magnetico nella regione 2 sono ovunque nulli ($T_E = T_H = 0$). Le condizioni al contorno diventano soltanto:

$$-\underline{z}_o \times \underline{x}_o (E_o^i + E_o^r) = 0 \Rightarrow E_o^r = -E_o^i \text{ e } \underline{E}_o^r = -\underline{E}_o^i$$

↓

$$\Gamma_E = -1.$$

Siccome il modulo del campo riflesso è uguale al modulo del campo incidente, si parla di riflessione totale. Tale condizione, per incidenza normale, si verifica solo in presenza di conduttori perfetti, mentre per incidenza obliqua può verificarsi anche per due mezzi dielettrici, qualora l'angolo di incidenza sia scelto opportunamente in una certa regione.

Per il campo magnetico, sfruttando la relazione d'impedenza, si ha:

$$\begin{cases} H_o^r = -H_o^i \\ \Gamma_H = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{H}_o^r = -H_o^r \underline{y}_o = H_o^i \underline{y}_o = \underline{H}_o^i.$$

La situazione è rappresentata graficamente in figura. Dalla condizione al contorno

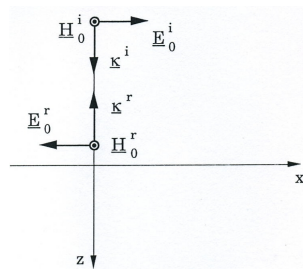


Figura 2.2: Riflessione totale nel caso di incidenza normale.

per la componente tangenziale del campo magnetico posso ora determinare l'entità delle correnti superficiali:

$$\underline{J}_S = -\underline{z}_o \times \underline{y}_o (H_o^i - H_o^r) = 2 H_o^i \underline{x}_o = 2 \frac{E_o^i}{\zeta_1} \underline{x}_o.$$

Nella regione 1 dunque il campo elettrico totale e il campo magnetico totale sono espressi da:

$$\begin{aligned}\underline{E}_1(z) &= \underline{E}^i(z) + \underline{E}^r(z) = E_o^i \underline{x}_o \left(e^{-jk_1 z} - e^{jk_1 z} \right) = -2j E_o^i \sin(k_1 z) \underline{x}_o, \\ \underline{H}_1(z) &= \underline{H}^i(z) + \underline{H}^r(z) = H_o^i \underline{y}_o \left(e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z} \right) = \\ &= 2 H_o^i \cos(k_1 z) \underline{y}_o = 2 \frac{E_o^i}{\zeta_1} \cos(k_1 z) \underline{y}_o.\end{aligned}$$

Dunque il campo elettromagnetico totale rappresenta un'onda stazionaria, in quanto la sua fase non varia con le coordinate.

Per capire meglio la natura dei campi, calcoliamoli anche nel dominio del tempo. Assumendo di essere in regime sinusoidale, e ponendo $E_o^i = |E_o^i| e^{j\varphi}$, si ha:

$$\begin{aligned}\underline{E}_1(z, t) &= \text{Re} [\underline{E}_1(z) e^{j\omega t}] = \text{Re} \left[-2j |E_o^i| \sin(k_1 z) \underline{x}_o e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = \\ &= 2 |E_o^i| \sin(k_1 z) \sin(\omega t + \varphi) \underline{x}_o, \\ \underline{H}_1(z, t) &= \text{Re} [\underline{H}_1(z) e^{j\omega t}] = \text{Re} \left[2 \frac{|E_o^i|}{\zeta_1} \cos(k_1 z) \underline{y}_o e^{j(\omega t + \varphi)} \right] = \\ &= 2 \frac{|E_o^i|}{\zeta_1} \cos(k_1 z) \cos(\omega t + \varphi) \underline{y}_o.\end{aligned}$$

Il campo elettrico e quello magnetico sono dunque ortogonali nello spazio e in quadratura (sfasamento di $\frac{\pi}{2}$) nel tempo. Ciò del resto risultava anche dalle espressioni dei fasori (presenza del fattore $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$). Si tratta dunque del tipico andamento dell'onda stazionaria, con la separazione delle dipendenze spaziali e temporali, e la presenza di nodi, a distanza:

$$\frac{1}{2} \frac{2\pi}{k_1} = \frac{\lambda_1}{2}.$$

I nodi del campo magnetico corrispondono ai ventri del campo elettrico.

Vediamo infine l'espressione del vettore di Poynting complesso per il campo totale. Si ha:

$$\begin{aligned}\underline{P}_1(z) &= \frac{1}{2} \underline{E}_1(z) \times \underline{H}_1^*(z) = -\frac{1}{2} 2j E_o^i \sin(k_1 z) \underline{x}_o \times 2 \frac{E_o^{i*}}{\zeta_1} \cos(k_1 z) \underline{y}_o = \\ &= -2j \frac{|E_o^i|^2}{\zeta_1} \sin(k_1 z) \cos(k_1 z) \underline{z}_o = -j \frac{|E_o^i|^2}{\zeta_1} \sin(2k_1 z) \underline{z}_o.\end{aligned}$$

Si tratta, come si vede, di una quantità puramente immaginaria, non si ha dunque un trasferimento di potenza attiva, la potenza è puramente reattiva. Questo è evidentemente tipico delle onde stazionarie, per le quali in effetti non si ha una vera propagazione ondosa.

2.8 Riflessione e trasmissione (rifrazione) di onde piane da una interfaccia piana: incidenza obliqua

Passiamo ora a considerare il caso di incidenza obliqua sempre di un'onda piana uniforme. Notiamo subito che in questo caso i risultati che otterremo saranno dipendenti dalla polarizzazione, mentre questo non si verifica per incidenza normale. Supporremo inizialmente entrambi i mezzi isotropi, non dispersivi e stavolta non dissipativi, per cui l'onda piana uniforme incidente sarà non attenuata. Prenderemo inoltre come piano zx , detto piano di incidenza, quel ben preciso piano che contiene la normale alla superficie di separazione e la direzione dell'onda piana incidente. Conseguentemente sarà per costruzione $k_y^i = 0$. Si ha inoltre:

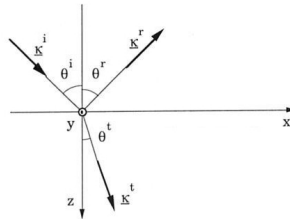


Figura 2.3: Riflessione e trasmissione (rifrazione) nel caso di incidenza obliqua.

$$k_x^i = k_1 \sin \theta^i \quad , \quad k_z^i = k_1 \cos \theta^i .$$

Anche in questo caso dobbiamo ammettere che l'onda incidente ecciti un'onda riflessa nella regione 1 e un'onda trasmessa o rifratta nella regione 2. Supporremo inoltre che tali onde siano ancora onde piane.

Ancora, dalla continuità delle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico segue l'uguaglianza fra i numeri d'onda tangenziali:

$$\begin{aligned} k_x^r &= k_x^i & , & & k_x^t &= k_x^i \\ k_y^r &= k_y^i = 0 & , & & k_y^t &= k_y^i = 0 \end{aligned}$$

Dunque anche i vettori d'onda riflesso e trasmesso giacciono nel piano zx . Ne seguirà allora che:

$$\begin{aligned} k_x^r &= k_1 \sin \theta^r & , & & k_x^t &= k_2 \sin \theta^t \\ k_z^r &= -k_1 \cos \theta^r & , & & k_z^t &= k_2 \cos \theta^t \end{aligned}$$

Si noti che gli angoli θ^i , θ^r e θ^t interessano tra 0 e $\pi/2$, quindi sia il coseno che il seno di tali angoli sono positivi.

Dalla relazione $k_x^r = k_x^i$ segue allora:

$$k_1 \sin \theta^r = k_1 \sin \theta^i \quad \Rightarrow \quad \sin \theta^r = \sin \theta^i \quad \Rightarrow \quad \theta^r = \theta^i ,$$

che è la ben nota legge della riflessione. Invece dalla $k_x^t = k_x^i$ si ottiene:

$$k_2 \sin \theta^t = k_1 \sin \theta^i , \tag{2.3}$$

che costituisce la ben nota legge della rifrazione o di Snell. Si ricava allora per l'angolo di rifrazione:

$$\sin \theta^t = \frac{k_1}{k_2} \sin \theta^i = \frac{\omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta^i = \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}} \sin \theta^i = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \sin \theta^i .$$

Si noti che si ottengono soluzioni reali per l'angolo di trasmissione solo se:

$$\sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta^i \leq 1 ,$$

quindi inizialmente dovremo supporre che l'angolo di incidenza e i parametri dei due mezzi siano tali da soddisfare questa relazione.

Riassumendo, si è visto che le cosiddette caratteristiche “cinematiche” proprie della cosiddetta ottica geometrica (o ottica dei raggi, che essenzialmente coinvolge i vettori d'onda e non le ampiezze), cioè il fatto che i tre vettori d'onda debbano giacere nello stesso piano, il fatto che l'angolo di incidenza e quello di riflessione siano uguali e la legge di Snell, derivano semplicemente dall'esistenza di condizioni al contorno per $z = 0$ valide in tutti i punti del piano. Le cosiddette proprietà “dinamiche”, cioè i moduli dei campi riflesso e trasmesso, derivano invece dal tipo di condizioni. Altre proprietà dinamiche, legate alle ampiezze complesse, sono gli eventuali cambiamenti di fase e di polarizzazione in riflessione e in trasmissione. Le proprietà dinamiche

sono quindi precisate da opportuni coefficienti di riflessione e trasmissione che sono generalizzazioni di quelli analoghi considerati per incidenza normale. La differenza è che tali coefficienti, detti di Fresnel, dipendono dal tipo di polarizzazione (lineare) assunta per l'onda incidente.

Come si era già visto, l'onda incidente, polarizzata generalmente in modo ellittico, si può pensare sempre decomposta in due polarizzazioni lineari. Si vedrà che i coefficienti di Fresnel per le due polarizzazioni sono diversi. In particolare ne scegliamo una col campo elettrico diretto lungo \underline{y}_o . Tale campo è quindi parallelo alla superficie di separazione e ortogonale al piano di incidenza (mentre il campo magnetico sarà giacente sul piano d'incidenza). Con riferimento al caso della superficie terrestre, a tale tipo di polarizzazione si dà il nome di orizzontale; essa si può anche chiamare TE rispetto alla direzione z . L'altra polarizzazione avrà invece il campo magnetico diretto lungo \underline{y}_o e il campo elettrico giacente sul piano di incidenza: quest'ultimo avrà allora anche una componente verticale e perciò a tale tipo di polarizzazione si dà il nome di polarizzazione verticale; essa si può anche chiamare parallela (al piano di incidenza) o TM rispetto alla direzione z .

2.8.1 Polarizzazione orizzontale

Consideriamo prima il caso di polarizzazione orizzontale. Si ha:

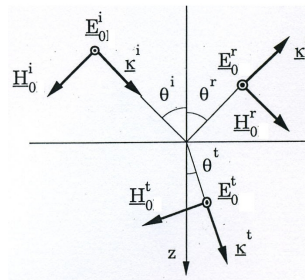


Figura 2.4: Riflessione e trasmissione nel caso di polarizzazione orizzontale.

$$\underline{E}_o^i = E_o^i \underline{y}_o,$$

e di conseguenza:

$$\underline{H}_o^i = \frac{1}{\omega \mu_1} \underline{k}^i \times \underline{E}_o^i = \frac{k_1}{\omega \mu_1} (\sin \theta^i \underline{x}_o + \cos \theta^i \underline{z}_o) \times E_o^i \underline{y}_o =$$

$$= \frac{E_o^i}{\zeta_1} (\sin \theta^i z_o - \cos \theta^i x_o) ,$$

anch'esso ovviamente polarizzato linearmente e giacente sul piano di incidenza. Essendo il campo elettrico incidente tutto tangenziale e diretto secondo y , per considerazioni di simmetria possiamo ipotizzare anche \underline{E}_o^r ed \underline{E}_o^t diretti lungo y e quindi $\underline{E}_o^r = E_o^r \underline{y}_o$, $\underline{E}_o^t = E_o^t \underline{y}_o$. Per i rispettivi campi magnetici si ha:

$$\begin{aligned} \underline{H}_o^r &= \frac{1}{\omega \mu_1} \underline{k}^r \times \underline{E}_o^r = \frac{k_1}{\omega \mu_1} (\sin \theta^r x_o - \cos \theta^r z_o) \times E_o^r \underline{y}_o = \\ &= \frac{E_o^r}{\zeta_1} (\sin \theta^r z_o + \cos \theta^r x_o) , \\ \underline{H}_o^t &= \frac{1}{\omega \mu_2} \underline{k}^t \times \underline{E}_o^t = \frac{k_2}{\omega \mu_2} (\sin \theta^t x_o + \cos \theta^t z_o) \times E_o^t \underline{y}_o = \\ &= \frac{E_o^t}{\zeta_2} (\sin \theta^t z_o - \cos \theta^t x_o) . \end{aligned}$$

Anche questi due campi sono polarizzati linearmente sul piano di incidenza.

A questo punto applico la condizione di continuità per il campo elettrico tangenziale. Tale condizione risulta identica a quella per incidenza normale:

$$E_o^t = E_o^i + E_o^r . \quad (2.4)$$

Per quanto riguarda la condizione di continuità per il campo magnetico tangenziale:

$$z_o \times [\underline{H}_o^t - (\underline{H}_o^i + \underline{H}_o^r)] = 0 ,$$

sono allora significative solo le componenti di campo lungo x , e qui entrano in gioco gli angoli:

$$-\frac{E_o^t}{\zeta_2} \cos \theta^t - \left(-\frac{E_o^i}{\zeta_1} \cos \theta^i + \frac{E_o^r}{\zeta_1} \cos \theta^r \right) = 0 ,$$

e, tenendo conto che $\theta^r = \theta^i$,

$$\frac{E_o^t}{\zeta_2} \cos \theta^t - \frac{E_o^i - E_o^r}{\zeta_1} \cos \theta^i = 0 .$$

Utilizzando la (2.4) si ottiene:

$$\frac{E_o^i + E_o^r}{\zeta_2} \cos \theta^t = \frac{E_o^i - E_o^r}{\zeta_1} \cos \theta^i ,$$

$$E_o^r \left(\frac{\cos \theta^t}{\zeta_2} + \frac{\cos \theta^i}{\zeta_1} \right) = E_o^i \left(\frac{\cos \theta^i}{\zeta_1} - \frac{\cos \theta^t}{\zeta_2} \right).$$

Risulta dunque per il coefficiente di riflessione del campo elettrico:

$$\Gamma_E^h = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\frac{\cos \theta^i}{\zeta_1} - \frac{\cos \theta^t}{\zeta_2}}{\frac{\cos \theta^i}{\zeta_1} + \frac{\cos \theta^t}{\zeta_2}} = \frac{\zeta_2 \cos \theta^i - \zeta_1 \cos \theta^t}{\zeta_2 \cos \theta^i + \zeta_1 \cos \theta^t} = \frac{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^i - \cos \theta^t}{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^i + \cos \theta^t}. \quad (2.5)$$

Per il coefficiente di trasmissione del campo elettrico si ha:

$$T_E^h = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{E_o^i + E_o^r}{E_o^i} = 1 + \Gamma_E^h,$$

come nel caso di incidenza normale. Per il campo magnetico, sfruttando la relazione di impedenza si ha in modo del tutto analogo al caso di incidenza normale:

$$\Gamma_H^h = \frac{H_o^r}{H_o^i} = \frac{\frac{E_o^r}{\zeta_1}}{\frac{E_o^i}{\zeta_1}} = \Gamma_E^h,$$

$$T_H^h = \frac{H_o^t}{H_o^i} = \frac{\frac{E_o^t}{\zeta_2}}{\frac{E_o^i}{\zeta_1}} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} T_E^h.$$

Un'espressione più particolare ma significativa si può ricavare nel caso di mezzi non ferromagnetici ($\mu_2 \simeq \mu_1$) per i quali si ha:

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = \frac{\mu_2 \sin \theta^t}{\mu_1 \sin \theta^i} \simeq \frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i},$$

e quindi la (2.5) diventa⁵:

$$\Gamma_E^h \simeq \frac{\frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i} \cos \theta^i - \cos \theta^t}{\frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i} \cos \theta^i + \cos \theta^t} = \frac{\sin \theta^t \cos \theta^i - \cos \theta^t \sin \theta^i}{\sin \theta^t \cos \theta^i + \cos \theta^t \sin \theta^i} = \frac{\sin (\theta^t - \theta^i)}{\sin (\theta^t + \theta^i)},$$

la quale non si annulla mai per $\theta^i \leq \frac{\pi}{2}$ (a parte il caso banale $\theta^t = \theta^i$ che si ha solo se i due mezzi in realtà sono uguali, cioè si ha un mezzo unico). Quindi c'è sempre riflessione, come avveniva per il caso di incidenza normale. Vedremo invece che non è così per l'altra polarizzazione.

⁵Ricordando che:

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

2.8.2 Polarizzazione verticale

Consideriamo ora il caso (duale) di polarizzazione verticale, la situazione è quella rappresentata in Figura (2.5). Per il campo elettrico dell'onda incidente in funzione

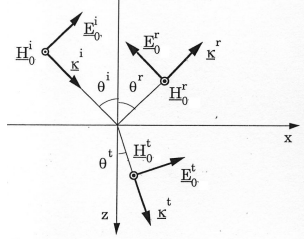


Figura 2.5: Riflessione e trasmissione nel caso di polarizzazione verticale.

del campo magnetico $\underline{H}_o^i = H_o^i \underline{y}_o$ si ha:

$$\begin{aligned} \underline{E}_o^i &= -\frac{1}{\omega \varepsilon_1} \underline{k}^i \times \underline{H}_o^i = -\frac{k_1}{\omega \varepsilon_1} (\sin \theta^i \underline{x}_o + \cos \theta^i \underline{z}_o) \times H_o^i \underline{y}_o = \\ &= -\zeta_1 H_o^i (\sin \theta^i \underline{z}_o - \cos \theta^i \underline{x}_o) . \end{aligned}$$

Per le stesse ragioni viste precedentemente nel caso di polarizzazione orizzontale, assumeremo:

$$\underline{H}_o^r = H_o^r \underline{y}_o \quad , \quad \underline{H}_o^t = H_o^t \underline{y}_o .$$

Ricaviamo i corrispondenti campi elettrici:

$$\begin{aligned} \underline{E}_o^r &= -\frac{1}{\omega \varepsilon_1} \underline{k}^r \times \underline{H}_o^r = -\frac{k_1}{\omega \varepsilon_1} (\sin \theta^r \underline{x}_o - \cos \theta^r \underline{z}_o) \times H_o^r \underline{y}_o = \\ &= -\zeta_1 H_o^r (\sin \theta^r \underline{z}_o + \cos \theta^r \underline{x}_o) , \\ \underline{E}_o^t &= -\frac{1}{\omega \varepsilon_2} \underline{k}^t \times \underline{H}_o^t = -\frac{k_2}{\omega \varepsilon_2} (\sin \theta^t \underline{x}_o + \cos \theta^t \underline{z}_o) \times H_o^t \underline{y}_o = \\ &= -\zeta_2 H_o^t (\sin \theta^t \underline{z}_o - \cos \theta^t \underline{x}_o) . \end{aligned}$$

A questo punto imponiamo la condizione di continuità per il campo magnetico, che risulta semplicemente:

$$\underline{z}_o \times [\underline{H}_o^t - (\underline{H}_o^i + \underline{H}_o^r)] = 0 \quad \Rightarrow \quad H_o^t = H_o^i + H_o^r . \quad (2.6)$$

La condizione per il campo elettrico, invece:

$$z_o \times [\underline{E}_o^t - (\underline{E}_o^i + \underline{E}_o^r)] = 0$$

diventa, considerando che danno contributo solo le componenti lungo x_o :

$$\zeta_2 H_o^t \cos \theta^t - \zeta_1 H_o^i \cos \theta^i + \zeta_1 H_o^r \cos \theta^r = 0,$$

e tenendo conto che $\theta^r = \theta^i$:

$$\zeta_2 H_o^t \cos \theta^t - \zeta_1 \cos \theta^i (H_o^i - H_o^r) = 0. \quad (2.7)$$

Unendo la (2.6) e la (2.7) ottengo:

$$\zeta_2 (H_o^i + H_o^r) \cos \theta^t = \zeta_1 \cos \theta^i (H_o^i - H_o^r),$$

$$H_o^r (\zeta_2 \cos \theta^t + \zeta_1 \cos \theta^i) = H_o^i (\zeta_1 \cos \theta^i - \zeta_2 \cos \theta^t),$$

$$\Gamma_H^v = \frac{H_o^r}{H_o^i} = \frac{\zeta_1 \cos \theta^i - \zeta_2 \cos \theta^t}{\zeta_2 \cos \theta^t + \zeta_1 \cos \theta^i} = \frac{\cos \theta^i - \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^t}{\cos \theta^i + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^t}.$$

Il coefficiente di trasmissione del campo magnetico T_H^v , tenendo conto della (2.6), è dato da:

$$T_H^v = \frac{H_o^t}{H_o^i} = 1 + \Gamma_H^v.$$

Per quanto riguarda i coefficienti relativi al campo elettrico si ha:

$$\Gamma_E^v = \frac{E_o^r}{E_o^i} = \frac{\zeta_1 H_o^r}{\zeta_1 H_o^i} = \Gamma_H^v,$$

$$T_E^v = \frac{E_o^t}{E_o^i} = \frac{\zeta_2 H_o^t}{\zeta_1 H_o^i} = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} T_H^v = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} (1 + \Gamma_E^v).$$

Nel caso particolare $\theta^i = 0$ e quindi $\theta^r = \theta^t = 0$, si ottiene:

$$\Gamma_H^v = \frac{1 - \frac{\zeta_2}{\zeta_1}}{1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1}} = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_2 + \zeta_1}.$$

Si noti che il cambiamento di segno rispetto alla formula ricavata nel caso di incidenza normale è semplicemente dovuto al fatto che in quel caso avevamo supposto $\underline{H}_o^r = -H_o^r y_o$, ma naturalmente è solo una diversa convenzione, perché poi bisogna stabilire

i segni veri di queste quantità.

Trasmissione totale, angolo di Brewster

Nel caso di assenza di materiali ferromagnetici, cioè $\mu_2 \simeq \mu_1$ e quindi:

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \simeq \frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i},$$

si ricava l'espressione:

$$\begin{aligned} \Gamma_E^v = \Gamma_H^v &\simeq \frac{\cos \theta^i - \frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i} \cos \theta^t}{\cos \theta^i + \frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i} \cos \theta^t} = \frac{\sin \theta^i \cos \theta^i - \sin \theta^t \cos \theta^t}{\sin \theta^i \cos \theta^i + \sin \theta^t \cos \theta^t} = \\ &= \frac{\sin (2\theta^i) - \sin (2\theta^t)}{\sin (2\theta^i) + \sin (2\theta^t)}. \end{aligned}$$

Applicando poi la formula di prostaferesi:

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{\tan \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)},$$

si ha:

$$\Gamma_E^v \simeq \frac{\tan (\theta^i - \theta^t)}{\tan (\theta^i + \theta^t)}.$$

Si presti attenzione al fatto che ora esiste un valore dell'angolo di incidenza per cui $\Gamma_E = 0$ (trasmissione totale), oltre al caso banale $\theta^t = \theta^i$. Ciò avviene se il denominatore va all'infinito, ossia:

$$\theta^i + \theta^t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta^t = \frac{\pi}{2} - \theta^i \quad \Rightarrow \quad \sin \theta^t = \cos \theta^i,$$

e quindi:

$$\frac{\sin \theta^t}{\sin \theta^i} = \frac{\cos \theta^i}{\sin \theta^i} = \frac{1}{\tan \theta^i} \simeq \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \quad \Rightarrow \quad \theta^i \simeq \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \theta_B^i.$$

Questo particolare angolo di incidenza prende il nome di *angolo di Brewster* θ_B^i , detto anche angolo di polarizzazione (lineare) perché se un'onda piana uniforme, in generale polarizzata ellitticamente, incide sulla superficie di separazione con tale angolo di incidenza, l'onda riflessa risulta polarizzata linearmente con polarizzazione orizzontale, perché la polarizzazione verticale viene completamente trasmessa. Questo è

un esempio eclatante di come, nel caso di incidenza obliqua, le caratteristiche di polarizzazione dell'onda incidente possano essere modificate radicalmente in riflessione e in trasmissione.

2.8.3 Riflessione totale

Ricordiamo a questo punto che l'angolo di trasmissione risultava reale se (a prescindere dal tipo di polarizzazione):

$$\sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta^i \leq 1. \quad (2.8)$$

Ora, essendo $\sin \theta^i \leq 1$, tale condizione risulta sempre verificata se $\mu_2 \varepsilon_2 \geq \mu_1 \varepsilon_1$ e si dice in questo caso che il mezzo 2 è più denso del mezzo 1, e dalla (2.3) segue $\theta^t < \theta^i$. Se però invece capita che il mezzo 1 sia più denso del mezzo 2, come per esempio avviene se l'onda si sta propagando all'interno di una fibra ottica, e l'interfaccia è quella con l'aria all'esterno, risulta $\theta^t > \theta^i$ e accadrà certamente che per determinati valori dell'angolo di incidenza θ^i il primo membro della (2.8) risulti maggiore di 1. In particolare la transizione, in corrispondenza a un certo angolo limite di incidenza θ_L^i , avviene per $\sin \theta^t = 1$ e quindi $\theta^t = \frac{\pi}{2}$, e si ha:

$$\sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta_L^i = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta_L^i = \arcsin \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}}.$$

Per valori di $\theta^i > \theta_L^i$ non si hanno più valori reali per θ^t . In particolare si ottiene un valore puramente immaginario per:

$$\cos \theta^t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta^t},$$

e l'angolo θ^t risulta complesso.

In tale regione angolare, per risolvere questa contraddizione rimanendo nel campo reale, dobbiamo supporre che le onde piane riflessa e trasmessa non siano entrambe uniformi: in particolare l'onda trasmessa viene assunta non uniforme. Essendo inoltre il mezzo 2 per ipotesi privo di perdite, tale onda non uniforme dovrà essere di tipo evanescente, ossia con $\underline{\alpha} \perp \underline{\beta}$. Si avrà dunque nel mezzo 2 un vettore d'onda complesso:

$$\underline{k}^t = \underline{\beta}^t - j\underline{\alpha}^t,$$

con:

$$\underline{\beta}^t \cdot \underline{\alpha}^t = 0 \quad , \quad \beta^{t2} - \alpha^{t2} = k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 .$$

Dalla condizione generale di continuità (che ovviamente deve continuare a valere):

$$k_x^t = k_x^i = k_1 \sin \theta^i ;$$

segue:

$$\beta_x^t - j\alpha_x^t = k_1 \sin \theta^i \quad \Rightarrow \quad \alpha_x^t = 0 \quad , \quad \beta_x^t = k_1 \sin \theta^i ,$$

$$k_y^t = k_y^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_y^t = \alpha_y^t = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\alpha}^t = \alpha^t \underline{z}_o \quad , \quad \underline{\beta}^t = \beta^t \underline{x}_o = k_1 \sin \theta^i \underline{x}_o .$$

Si osservi che essendo $\mu_1 \varepsilon_1 > \mu_2 \varepsilon_2$ si ha $k_1 > k_2$. Nell'ipotesi di onda trasmessa uniforme, doveva valere la (2.3) che appunto non può essere verificata per θ^i abbastanza grande da avere $k_1 \sin \theta^i > k_2$, cioè per $\theta^i > \theta_L^i$. Invece con l'onda non uniforme dev'essere verificata la $k_1 \sin \theta^i = \beta^t$, con:

$$\beta^t = \sqrt{k_2^2 + \alpha^{t2}} > k_2 ,$$

e tale relazione può essere soddisfatta con:

$$\alpha^t = \sqrt{\beta^{t2} - k_2^2} = \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta^i - k_2^2} = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1 \sin^2 \theta^i - \mu_2 \varepsilon_2} .$$

La situazione graficamente è quella riportata in Figura (2.6), da cui si può capire perché l'onda evanescente si chiama in letteratura anche onda superficiale essendo confinata alla superficie di separazione. Riguardo a tale onda evanescente si può scrivere:

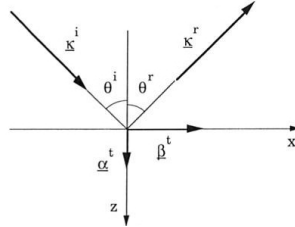


Figura 2.6: Riflessione totale nel caso di incidenza obliqua.

$$\underline{E}^t(x, z) = \underline{E}_o^t e^{-j\beta^t x} e^{-\alpha^t z} ,$$

$$\underline{H}^t(x, z) = \underline{H}_o^t e^{-j\beta^t x} e^{-\alpha^t z} .$$

Nel caso della polarizzazione orizzontale si aveva $\underline{E}_o^t = E_o^t \underline{y}_o$, e l'onda trasmessa è TE rispetto alla direzione di propagazione. Invece se la polarizzazione è verticale si ha $\underline{H}_o^t = H_o^t \underline{y}_o$, e l'onda trasmessa è TM rispetto alla direzione di propagazione.

In realtà la trattazione precedente si può anche condurre usando le formule generali e accettando fin dall'inizio un angolo di trasmissione θ^t che può essere complesso. Si pone allora comunque $k_x^t = k_2 \sin \theta^t$. Dovrà poi essere, per la condizione di separabilità:

$$k_z^t = \sqrt{k_2^2 - k_x^t{}^2} = k_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta^t} = k_2 \cos \theta^t .$$

È chiaro però che ora viene a cadere l'interpretazione geometrica di componenti di un vettore reale, legate ad angoli reali. Dovrà poi comunque essere:

$$k_2 \sin \theta^t = k_1 \sin \theta^i .$$

Poniamo allora per l'angolo complesso:

$$\theta^t = \theta_R^t + j\theta_J^t .$$

Dovrà essere:

$$k_1 \sin \theta^i = k_2 \sin (\theta_R^t + j\theta_J^t) = k_2 [\sin \theta_R^t \cos (j\theta_J^t) + \cos \theta_R^t \sin (j\theta_J^t)] .$$

Si ricordino ora le formule:

$$\begin{aligned} \cos (jz) &= \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z , \\ \sin (jz) &= \frac{e^{j(jz)} - e^{-j(jz)}}{2j} = \frac{e^{-z} - e^z}{2j} = -\frac{1}{j} \sinh z = j \sinh z , \\ k_1 \sin \theta^i &= k_2 (\sin \theta_R^t \cosh \theta_J^t + j \cos \theta_R^t \sinh \theta_J^t) , \end{aligned}$$

da cui, eguagliando parte reale e parte immaginaria, segue:

$$k_1 \sin \theta^i = k_2 \sin \theta_R^t \cosh \theta_J^t ,$$

$$0 = k_2 \cos \theta_R^t \sinh \theta_J^t .$$

Ricordando il grafico del seno iperbolico riportato in Figura (2.7), e dovendo essere $\theta_J^t \neq 0$ (altrimenti si ricade nella rifrazione), si ottiene:

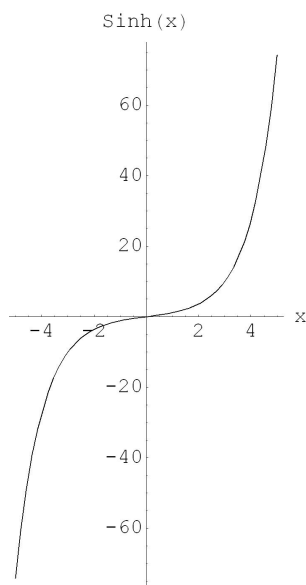


Figura 2.7: Grafico della funzione seno iperbolico.

$$\cos \theta_R^t = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_R^t = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \theta_R^t = 1,$$

e ricavo poi θ_J^t dalla:

$$k_1 \sin \theta^i = k_2 \cosh \theta_J^t \quad \Rightarrow \quad \theta_J^t = \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}} \sin \theta^i \right).$$

Per il k_z^t si ha poi⁶:

$$\begin{aligned} k_z^t &= k_2 \cos \theta^t = k_2 \cos (\theta_R^t + j\theta_J^t) = \\ &= k_2 [\cos \theta_R^t \cos (j\theta_J^t) - \sin \theta_R^t \sin (j\theta_J^t)] = -jk_2 \sinh \theta_J^t. \end{aligned}$$

Ponendo poi:

$$\beta^t = k_2 \cosh \theta_J^t = k_x^t, \quad \alpha^t = k_2 \sinh \theta_J^t$$

si ottiene:

$$\underline{k}^t = \beta^t \underline{x}_o - j\alpha^t \underline{z}_o,$$

cioè ritroviamo il risultato visto prima.

⁶Ricordando che:

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

È chiaro che essendo l'angolo di trasmissione complesso, anche i coefficienti di riflessione risultano in generale complessi. Ricordiamone le espressioni:

$$\Gamma_E^h = \frac{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^i - \cos \theta^t}{\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^i + \cos \theta^t},$$

$$\Gamma_E^v = \frac{\cos \theta^i - \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^t}{\cos \theta^i + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cos \theta^t}.$$

Si noti che, in entrambi i casi, essendo $\cos \theta^t$ puramente immaginario, ho a numeratore e a denominatore due quantità complesse coniugate. Dunque il modulo del rapporto è unitario, e quindi il modulo dell'onda riflessa è uguale al modulo dell'onda incidente. Quando ciò si verifica, si dice che si ha riflessione totale.

2.8.4 Riflessione e trasmissione da mezzo conduttore, condizione di Leontovich

L'ultimo caso che vogliamo considerare è quello di un'onda piana uniforme che incide obliquamente da un mezzo a conducibilità nulla a uno con conducibilità diversa da zero.

Possiamo ancora supporre che l'onda riflessa sia uniforme, e vale ancora la condizione $\theta^r = \theta^i$. Inoltre, essendo il mezzo 2 dissipativo, sicuramente il vettore di attenuazione sarà diverso da zero. D'altra parte, non essendoci attenuazione per le onde nel mezzo 1, per la continuità dei numeri d'onda tangenziali, l'attenuazione nel mezzo 2 potrà essere diretta solo lungo z , e quindi dovrà essere $\underline{\alpha}^t = \alpha^t \underline{z}_o$. Invece il vettore di fase $\underline{\beta}^t$ non potrà mai essere diretto lungo z , perché sempre per la suddetta continuità dovrà avere anche una componente lungo x diversa da zero. Dunque l'onda trasmessa non potrà essere uniforme, e neanche potrà essere stavolta $\underline{\beta}^t \perp \underline{\alpha}^t$, essendo $\sigma_2 \neq 0$. La condizione per i moduli continua ovviamente a valere:

$$\beta^{t2} - \alpha^{t2} = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2, \quad (2.9)$$

e si ha inoltre:

$$\beta^t \alpha^t \cos \theta^t = \frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}, \quad (2.10)$$

essendo evidentemente θ^t l'angolo fra $\underline{\beta}^t$ e la normale.

Dalla condizione di continuità per k_x si ha poi:

$$k_1 \sin \theta^i = \beta^t \sin \theta^t . \quad (2.11)$$

Dalle tre equazioni (2.9), (2.10) e (2.11) posso ricavare le tre quantità incognite β^t , α^t e θ^t . Si osservi inoltre che essendo in generale $\beta^t > \alpha^t$ si ha:

$$\beta^t \alpha^t \cos \theta^t < \beta^t \alpha^t < \beta^{t2} ,$$

quindi:

$$\beta^t > \sqrt{\beta^t \alpha^t \cos \theta^t} = \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}} ,$$

e per l'angolo di trasmissione risulta:

$$\sin \theta^t = \frac{k_1}{\beta^t} \sin \theta^i < \frac{\omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} \sin \theta^i}{\sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega \mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \sigma_2}} \sin \theta^i = \sqrt{\frac{2\mu_1}{\mu_2}} \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}} \sin \theta^i .$$

Supponiamo ora che il mezzo 2 sia un buon conduttore ($\sigma_2 \gg \omega \varepsilon_2$ e quindi anche $\sigma_2 \gg \omega \varepsilon_1$, visto che gli ordini di grandezza di ε_1 ed ε_2 sono confrontabili). Se inoltre supponiamo come spesso si è fatto $\mu_1 \simeq \mu_2$, risulta:

$$\sin \theta^t \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \theta^t \simeq 0 .$$

In sostanza l'onda trasmessa è quasi uniforme, e quindi praticamente TEM nella direzione z , non importa quale sia l'angolo di incidenza θ^i e il tipo di polarizzazione. Se anche il campo incidente è costituito da una sovrapposizione di onde piane e quindi in sostanza è un campo qualsiasi, per ogni onda componente il campo trasmesso sarà del tipo visto, e quindi anche il campo risultante, che sarà praticamente tangenziale. A questo punto possiamo scrivere la relazione fra i campi tangenziali (che è poi quella per le onde piane uniformi):

$$\underline{E}_\tau^+ \simeq \zeta_2 (\underline{H}_\tau^+ \times \underline{n}) ,$$

ove il versore \underline{n} entra nel mezzo 2 e gli apici + indicano che siamo appena sotto la superficie di separazione. Comunque, poiché si tratta di conduttore non perfetto, entrambi i campi tangenziali sono continui e si potrà scrivere la stessa relazione dalla

parte del dielettrico:

$$\underline{E}_\tau^- \simeq \zeta_2 (\underline{H}_\tau^- \times \underline{n}), \quad (2.12)$$

ove si era visto (nel paragrafo 2.7) che per un mezzo buon conduttore:

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{c2}}} \simeq (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\sigma_2}}.$$

La relazione (2.12) può allora essere assunta come condizione al contorno approssimata alla superficie di separazione tra un mezzo non dissipativo e un buon conduttore, e prende il nome di *condizione di Leontovich* o di *Schelkunoff*. Essa vale anche se la superficie di separazione non è piana, purché la sua curvatura non sia molto grande. Nel limite $\sigma_2 \rightarrow \infty$ la (2.12) tende regolarmente alla:

$$\underline{E}_\tau^- = 0,$$

che è la condizione per il conduttore perfetto.

Si noti infine che per quest'onda quasi uniforme risulta:

$$\begin{aligned} k_2 &= \omega \sqrt{\mu_2 \varepsilon_{c2}} = \omega \sqrt{\mu_2 \left(\varepsilon_2 - j \frac{\sigma_2}{\omega} \right)} = \omega \sqrt{\frac{\mu_2}{j\omega} (j\omega \varepsilon_2 + \sigma_2)} \simeq \omega \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2}{j\omega}} = \\ &= \sqrt{-j\omega \mu_2 \sigma_2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si ricordi che:

$$-j = e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-j} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{(1-j)}{\sqrt{2}},$$

e quindi la (2.13) diventa (per un mezzo generico):

$$k = \beta - j\alpha \simeq (1-j) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}},$$

con:

$$\beta \cong \alpha \cong \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}.$$

Come si vede, l'attenuazione α cresce al crescere della frequenza. Ad esempio per il rame si ha $\sigma \simeq 5.8 \times 10^7 [\Omega^{-1}/m]$, $\mu \simeq \mu_o = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$ e quindi:

$$\alpha \simeq 15\sqrt{f} [m^{-1}].$$

La profondità (convenzionale) di penetrazione (o di pelle) δ è la distanza alla quale il modulo del campo si riduce a $1/e$ ($\simeq 37\%$) del valore iniziale all'interfaccia. Essa pertanto risulta pari a:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \simeq \frac{0.07}{\sqrt{f}}$$

per il rame. Ad esempio per $f = 1MHz$ alla distanza di $0.3mm$ l'onda risulta già attenuata a $1/100$ del valore iniziale. Quindi un campo elettromagnetico ad alta frequenza si attenua molto rapidamente all'interno di un metallo (effetto pelle). La profondità di pelle è in fondo un parametro caratteristico di un dato materiale a una data frequenza ed è utile non solo per configurazioni planari, finché il valore calcolato di δ è molto più piccolo del raggio di curvatura in tutti i punti della superficie. Inoltre si comprende come l'ipotesi di mezzo 2 di profondità infinita non sia irrealistica, perché con queste attenuazioni il campo "non vede" neppure la fine del materiale, per lui è come se fosse infinito.

Introduzione alle linee di trasmissione

3.1 Equazioni delle linee, costanti primarie e secondarie, condizioni al contorno

Consideriamo ora un modello matematico per lo studio di fenomeni propagativi, storicamente introdotto per applicazioni alle linee telegrafiche e telefoniche (le cosiddette equazioni dei telegrafisti o dei telefonisti), e successivamente generalizzato a molti problemi di propagazione guidata, e per circuiti ad alta frequenza, quando le dimensioni geometriche sono maggiori della lunghezza d'onda. Si tratta dei circuiti a costanti distribuite o linee di trasmissione. Noi come esempio introduttivo lo applicheremo alla propagazione di onde piane uniformi in un mezzo stratificato indefinito, nella direzione ortogonale alla stratificazione.

Senza perdita di generalità consideriamo un'onda polarizzata linearmente, e il mezzo inizialmente omogeneo, isotropo, non dispersivo, ma dissipativo. Prendiamo un sistema di riferimento con la direzione di propagazione come asse z , la direzione di polarizzazione del campo elettrico come asse x e di conseguenza quella del campo magnetico come asse y . Si ha dunque:

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_x(z) \underline{x}_o & E_x(z) &= E_o e^{-jkz} \\ \underline{H} &= H_y(z) \underline{y}_o(z) & H_y(z) &= H_o e^{-jkz} \end{aligned} \quad , \text{ ove}$$

Il vettore di Poynting complesso è dato da:

$$\underline{P} = \frac{1}{2} E_x(z) H_y^*(z) \underline{z}_o = P(z) \underline{z}_o.$$

In sostanza quindi il campo è descritto dalle due funzioni scalari $E_x(z)$ e $H_y(z)$. Introduciamo ora queste posizioni nelle equazioni di Maxwell omogenee. Essendo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dz},$$

la prima equazione diventa:

$$\begin{aligned} \left(\underline{z}_o \frac{d}{dz} \right) \times \left(E_x \underline{x}_o \right) &= -j\omega\mu H_y \underline{y}_o, \\ \left(\underline{z}_o \frac{d}{dz} \right) \times \left(H_y \underline{y}_o \right) &= j\omega\varepsilon_c \underline{x}_o E_x, \\ \Rightarrow \quad \frac{dE_x}{dz} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{dH_y}{dz} &= -j\omega\varepsilon_c E_x \end{aligned}$$

Ponendo:

$$\begin{aligned} V(z) &= E_x(z) & Z_S &= j\omega\mu \\ I(z) &= H_y(z) & Y_P &= j\omega\varepsilon_c \end{aligned},$$

si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -Z_S I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -Y_P V(z) \end{cases},$$

e:

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z).$$

Le grandezze $V(z)$ e $I(z)$ prendono il nome di tensione e corrente equivalenti (del resto il campo elettrico e il campo magnetico hanno dimensioni fisiche di una tensione e di una corrente per unità di lunghezza). Le quantità Z_S e Y_P invece vengono chiamate impedenza in serie per unità di lunghezza $\left[\frac{\Omega}{m} \right]$ e ammettenza in parallelo per unità di lunghezza $\left[\frac{\text{Siemens}}{m} = \frac{\Omega^{-1}}{m} \right]$. Le equazioni ottenute sono dette equazioni delle linee di trasmissione o equazioni dei telegrafisti, perché storicamente

sono state introdotte per la prima volta studiando l'andamento della tensione e della corrente in una linea bifilare, cioè in una linea costituita da due conduttori rettilinei paralleli immersi in un dielettrico. In tal caso le tensioni e le correnti erano realmente la differenza di potenziale tra i due conduttori e la corrente nei conduttori. Nel caso in cui le dimensioni della linea sono confrontabili con la lunghezza d'onda (cioè non molto più piccole, come invece avviene nei circuiti elettronici a bassa frequenza), le dimensioni fisiche del circuito non possono più essere considerate puntiformi e la tensione e la corrente variano lungo la linea.

Si noti infine che l'associazione della tensione e della corrente nella linea equivalente alle componenti di campo elettrico e magnetico, rispettivamente, trasverso rispetto alla direzione della linea riveste carattere di generalità.

Consideriamo allora lo schema di una linea bifilare, e in particolare due sezioni distanti dz . Siano poi R , L , G , C rispettivamente la resistenza (in serie) per unità di lunghezza dei conduttori non perfetti, l'induttanza (in serie) per unità di lunghezza del circuito formato dai due conduttori, la conduttanza (in parallelo) per unità di lunghezza dovuta alla conducibilità non nulla del dielettrico interposto e la capacità (in parallelo) per unità di lunghezza tra i conduttori. Un circuito di questo tipo si dice a costanti distribuite e non a costanti concentrate (come i circuiti elettronici a bassa frequenza), perché i parametri caratteristici come resistenza, induttanza, conduttanza e capacità sono distribuiti lungo la linea accumulandosi lungo di essa, e non sono concentrati in un punto.

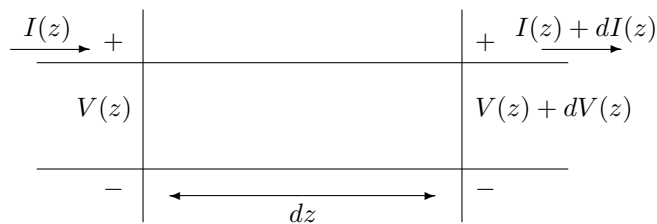


Figura 3.1: Schema di linea bifilare

La tensione in uscita $V(z + dz) = V(z) + dV(z)$ è pari alla tensione in ingresso $V(z)$ diminuita della caduta di tensione nel tratto di lunghezza dz , per la presenza in serie della resistenza R e dell'induttanza L . Si ha allora:

$$V(z) + dV(z) = V(z) - (R + j\omega L) dz I(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dV(z)}{dz} = -(R + j\omega L) I(z) = -Z_S I(z),$$

avendo posto:

$$Z_S = R + j\omega L.$$

Allo stesso modo la corrente in uscita $I(z + dz) = I(z) + dI(z)$ è pari alla corrente in ingresso $I(z)$ meno la corrente tra i due conduttori nel tratto di lunghezza dz a causa della presenza in parallelo della conduttanza G e della capacità C . Si ha dunque:

$$I(z) + dI(z) = I(z) - (G + j\omega C) dz V(z)$$

$$\Rightarrow \frac{dI(z)}{dz} = -(G + j\omega C) V(z) = -Y_P V(z),$$

avendo posto:

$$Y_P = G + j\omega C.$$

Si noti che Z_S e Y_P , per il loro diverso significato, non risultano l'una l'inversa dell'altra.

Nel caso di applicazione del modello matematico alle nostre onde piane uniformi, essendo $Z_S = j\omega\mu$ segue (per mezzi non dispersivi) $R = 0$, $L = \mu$, per cui la resistenza per unità di lunghezza è nulla e l'induttanza per unità di lunghezza è pari a μ (che del resto ha le dimensioni fisiche di $\left[\frac{\text{Henry}}{m}\right]$). Si ha inoltre $Y_P = j\omega\varepsilon_c = \sigma + j\omega\varepsilon$ e quindi $G = \sigma$ e $C = \varepsilon$ (che infatti hanno le dimensioni fisiche di $\left[\frac{\text{Siemens}}{m}\right]$ e di $\left[\frac{\text{Farad}}{m}\right]$).

Come si vede, le equazioni ottenute per la linea bifilare sono le stesse di quelle che regolano la propagazione dell'onda piana uniforme nello spazio libero. Chiameremo allora per estensione linea di trasmissione ogni sistema fisico il cui comportamento, limitatamente a certi aspetti, è descritto dalle equazioni dei telegrafisti. Naturalmente nei diversi sistemi fisici le grandezze $V(z)$, $I(z)$, Z_S e Y_P assumeranno significato diverso e saranno in generale grandezze equivalenti. Le costanti Z_S e Y_P si dicono *costanti primarie della linea*.

Si noti come, per certi versi, le equazioni dei telegrafisti rappresentano una versione semplificata, scalare e monodimensionale, delle equazioni di Maxwell. Vediamo come si risolvono: anche qui la procedura è simile, e si otterrà alla fine un'equazione

di Helmholtz a una dimensione, cioè l'equazione dei moti armonici. Prendiamo allo scopo la prima equazione delle linee e deriviamola rispetto a z , sostituendovi poi la seconda:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -Z_S \frac{dI}{dz} = -Z_S (-Y_P V) = Z_S Y_P V.$$

Se si pone:

$$Z_S Y_P = -k_z^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{Z_S Y_P} = jk_z,$$

segue appunto:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k_z^2 V = 0.$$

Risolta questa, determino la corrente dalla:

$$I(z) = -\frac{1}{Z_S} \frac{dV}{dz}.$$

La costante k_z prende (evidentemente) il nome di costante di propagazione, ed è in generale una quantità complessa. Sceglieremo la determinazione della radice quadrata in modo tale che sia:

$$k_z = \beta_z - j\alpha_z \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \beta_z > 0 \quad \text{se} \quad \beta_z \neq 0 \\ \alpha_z > 0 \quad \text{se} \quad \beta_z = 0 \end{array}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} k_z^2 &= -Z_S Y_P = -(R + j\omega L)(G + j\omega C) = \\ &= -RG - j\omega RC - j\omega LG + \omega^2 LC = \\ &= (\omega^2 LC - RG) - j\omega(LG + RC). \end{aligned}$$

Nel caso di assenza di perdite ($R = G = 0$) rimane $k_z^2 = \omega^2 LC$, reale positivo.

Nel caso di applicazione di questo formalismo alle nostre onde piane uniformi risulta:

$$k_z^2 = -j\omega\mu j\omega\varepsilon_c = \omega^2\mu\varepsilon_c = k^2.$$

Quindi la costante di propagazione del modello matematico coincide numericamente con la costante di propagazione del mezzo. Ovviamente si poteva procedere in modo duale, ottenendo un'equazione dei moti armonici per la corrente e poi ricavando la

tensione. Come è noto, se $k_z \neq 0$ l'integrale generale dell'equazione dei moti armonici si può scrivere, in forma di onde progressive:

$$V(z) = V_o^+ e^{-jk_z z} + V_o^- e^{jk_z z} = V^+(z) + V^-(z),$$

essendo $V^+(z) = V_o^+ e^{-jk_z z}$ l'onda progressiva nel verso positivo delle z , detta onda diretta, e $V^-(z) = V_o^- e^{jk_z z}$ l'onda progressiva nel verso negativo, detta onda riflessa.

Ricaviamo a questo punto la corrente:

$$\begin{aligned} I(z) &= -\frac{1}{Z_S} \frac{dV}{dz} = \frac{jk_z}{Z_S} (V_o^+ e^{-jk_z z} - V_o^- e^{jk_z z}) = \\ &= I_o^+ e^{-jk_z z} + I_o^- e^{jk_z z}, \end{aligned}$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} I_o^+ &= \frac{jk_z}{Z_S} V_o^+ = \frac{V_o^+}{Z_c}, \\ I_o^- &= -\frac{jk_z}{Z_S} V_o^- = -\frac{V_o^-}{Z_c}, \end{aligned}$$

con:

$$Z_c = \frac{Z_S}{jk_z} = \frac{Z_S}{\sqrt{Z_S Y_P}} = \sqrt{\frac{Z_S}{Y_P}}.$$

Analogamente:

$$I(z) = I^+(z) + I^-(z),$$

con:

$$I^+(z) = \frac{V^+(z)}{Z_c}, \quad I^-(z) = -\frac{V^-(z)}{Z_c}$$

$$\Rightarrow I(z) = \frac{1}{Z_c} [V^+(z) - V^-(z)].$$

La costante Z_c appena definita, che ha [*Ohm*] come dimensioni fisiche, si dice *impedenza caratteristica* della linea di trasmissione, e il suo inverso $Y_c = \frac{1}{Z_c}$ [*Siemens*] prende il nome di *ammettenza caratteristica*. Per la linea bifilare si ha:

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}},$$

che si riduce in assenza di perdite a $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Nel nostro esempio di applicazione

alle onde piane uniformi si ha:

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{j\omega\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \zeta,$$

cioè l'impedenza caratteristica del modello linea di trasmissione viene a coincidere con l'impedenza caratteristica del mezzo.

Le quantità k_z e Z_c si dicono *costanti secondarie della linea*. Si noti che in assenza di perdite, per entrambi gli esempi di linea di trasmissione considerati, le costanti primarie della linea risultano immaginarie pure, le costanti secondarie invece puramente reali. È possibile riscrivere le equazioni delle linee facendo intervenire le costanti secondarie invece di quelle primarie. Infatti si ha:

$$Z_S = jk_z Z_c \quad \text{e} \quad jk_z Y_c = \sqrt{Z_S Y_P} \sqrt{\frac{Y_P}{Z_S}} = Y_P,$$

per cui le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \frac{dV(z)}{dz} = -jk_z Z_c I(z) \\ \frac{dI(z)}{dz} = -jk_z Y_c V(z) \end{cases},$$

che prendono il nome di equazioni dei telefonisti.

Dell'integrale generale era possibile come è noto dare un'espressione anche in termini di onde stazionarie. Ad esempio per la tensione si può scrivere:

$$V(z) = A \cos(k_z z) + B \sin(k_z z).$$

Per la corrente segue:

$$\begin{aligned} I(z) &= -\frac{1}{Z_S} k_z \left[-A \sin(k_z z) + B \cos(k_z z) \right] = \\ &= \frac{1}{jZ_c} \left[A \sin(k_z z) - B \cos(k_z z) \right]. \end{aligned}$$

Le costanti A , B possono essere espresse in funzione della tensione e della corrente in una sezione della linea, per esempio la sezione $z = 0$, che in genere viene fatta coincidere con la sezione terminale della linea, chiusa su una certa impedenza di carico. Si tratta in sostanza di imporre le condizioni al contorno per il nostro modello

scalare monodimensionale. Si ha allora:

$$V(0) = A \quad -jZ_c I(0) = B.$$

Potevo ovviamente fare la stessa cosa con la soluzione espressa in forma di onde progressive, ottenendo:

$$V(0) = V_o^+ + V_o^- \quad Z_c I(0) = V_o^+ - V_o^-.$$

Sommando le due ottengo:

$$V(0) + Z_c I(0) = 2V_o^+ \quad \Rightarrow \quad V_o^+ = \frac{1}{2} [V(0) + Z_c I(0)].$$

Sottraendo la seconda dalla prima invece si ha:

$$V(0) - Z_c I(0) = 2V_o^- \quad \Rightarrow \quad V_o^- = \frac{1}{2} [V(0) - Z_c I(0)].$$

Consideriamo il caso particolare di linea chiusa in corto circuito, cioè $V(0)=0$. Nella nostra applicazione del formalismo delle linee di trasmissione alla propagazione di onde piane uniformi nella direzione z , la chiusura in corto circuito corrisponde alla presenza in $z = 0$ di un piano perfettamente conduttore trasverso rispetto alla direzione z . Segue allora:

$$V_o^+ = \frac{1}{2} Z_c I(0) \quad , \quad V_o^- = -V_o^+ ,$$

$$\Rightarrow \quad V(z) = V_o^+ (e^{-jk_z z} - e^{jk_z z}) = V_o^+ (-2j) \sin(k_z z) =$$

$$= -jZ_c I(0) \sin(k_z z) ,$$

$$\Rightarrow \quad I(z) = \frac{1}{Z_c} V_o^+ (e^{-jk_z z} + e^{jk_z z}) = \frac{2V_o^+}{Z_c} \cos(k_z z) =$$

$$= I(0) \cos(k_z z) .$$

Come si vede, nell'ipotesi di linea priva di perdite (k_z e Z_c reali), $V(z)$ e $I(z)$ hanno

una configurazione di onde stazionarie e sono inoltre in quadratura nel tempo (presenza di un fattore j , cioè sfasamento di $\frac{\pi}{2}$). La potenza complessa della linea, che coincide per le nostre onde piane uniformi con l'ampiezza del vettore di Poynting complesso, risulta puramente immaginaria (reattiva):

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = -\frac{j}{2} Z_c I(0) \sin(k_z z) I^*(0) \cos(k_z z) = \\ &= -\frac{j}{4} Z_c |I(0)|^2 \sin(2k_z z), \end{aligned}$$

come avveniva nel caso di incidenza normale di onde piane uniformi su un conduttore perfetto.

Consideriamo ora un altro caso notevole, quello di linea aperta, cioè tale che sia $I(0) = 0$. Si ha allora:

$$V_o^+ = \frac{1}{2} V(0) \quad , \quad V_o^- = V_o^+ ,$$

e quindi:

$$V(z) = V_o^+ (e^{-jk_z z} + e^{jk_z z}) = 2 V_o^+ \cos(k_z z) = V(0) \cos(k_z z) ,$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_c} V_o^+ (e^{-jk_z z} - e^{jk_z z}) = -2j \frac{V_o^+}{Z_c} \sin(k_z z) = -j \frac{V(0)}{Z_c} \sin(k_z z) .$$

Anche stavolta, quindi, se la linea è priva di perdite, si ha una configurazione di onda stazionaria.

3.2 Impedenza, ammettenza, coefficiente di riflessione

Lungo la linea di trasmissione si definiscono due funzioni della variabile z che prendono il nome di *impedenza e ammettenza*¹ della linea (da non confondersi con le costanti impedenza e ammettenza per unità di lunghezza, e impedenza e ammettenza caratteristica), definite dalle:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} ,$$

¹Si usa l'una o l'altra a seconda della comodità, ad esempio per componenti in serie uso le impedenze, per componenti in parallelo le ammettenze.

$$Y(z) = \frac{I(z)}{V(z)} = \frac{1}{Z(z)}.$$

Si definisce anche il *coefficiente di riflessione della tensione*²:

$$\Gamma_V(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)}.$$

In particolare nella sezione $z = 0$, in cui in genere è posto il carico di impedenza Z_L , si ha:

$$Z(0) = \frac{V(0)}{I(0)} = Z_L \quad , \quad \Gamma_V(0) = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \Gamma_L.$$

In una generica sezione z si ha per il coefficiente di riflessione:

$$\Gamma_V(z) = \frac{V_o^- e^{jk_z z}}{V_o^+ e^{-jk_z z}} = \Gamma_V(0) e^{2jk_z z}.$$

Attenzione al fatto che se k_z è reale (linea priva di perdite) risulta che il modulo del coefficiente di riflessione è costante lungo la linea:

$$|\Gamma_V(z)| = |\Gamma_V(0)| = \left| \frac{V_o^-}{V_o^+} \right| = |\Gamma_V|.$$

Le due funzioni $Z(z)$ e $\Gamma_V(z)$ non sono indipendenti tra loro, si ha infatti:

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+(z) + V^-(z)}{\frac{1}{Z_c}[V^+(z) - V^-(z)]} = \\ &= Z_c \frac{V^+(z) + V^-(z)}{V^+(z) - V^-(z)} = Z_c \frac{1 + \frac{V^-(z)}{V^+(z)}}{1 - \frac{V^-(z)}{V^+(z)}} = \\ &= Z_c \frac{1 + \Gamma_V(z)}{1 - \Gamma_V(z)}. \end{aligned}$$

Si può anche invertire la relazione:

$$Z(z) [1 - \Gamma_V(z)] = Z_c [1 + \Gamma_V(z)]$$

²Si definisce anche un *coefficiente di riflessione in corrente* Γ_I , ma se non è specificato il pedice si intende nel seguito quello in tensione.

$$\Rightarrow \quad Z(z) - Z_c = \Gamma_V(z) [Z(z) + Z_c]$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_V(z) = \frac{Z(z) - Z_c}{Z(z) + Z_c}.$$

In particolare per $z = 0$, cioè sul carico, si ha:

$$Z(0) = Z_L = Z_c \frac{1 + \Gamma_V(0)}{1 - \Gamma_V(0)} = Z_c \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L},$$

$$\Gamma_V(0) = \Gamma_L = \frac{Z(0) - Z_c}{Z(0) + Z_c} = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}.$$

Si noti che dalla conoscenza dell'impedenza di carico Z_L e, ovviamente, dei parametri della linea (Z_c), si può calcolare $\Gamma_L = \Gamma_V(0)$ e quindi dalla conoscenza dell'ampiezza dell'onda diretta V_o^+ risalire all'ampiezza dell'onda riflessa V_o^- , e quindi conoscere completamente $V(z)$ e $I(z)$.

Riprendiamo ora l'esame dei vari tipi di chiusura della linea. Un caso notevole si ha quando $Z_L = Z_c$, ossia l'impedenza di carico coincide con l'impedenza caratteristica. In questo caso la linea si dice adattata, perché non ci sono riflessioni. Infatti si ha $\Gamma_V(0) = 0$ e dunque $\Gamma_V(z) \equiv 0$. Si ha poi che in ogni sezione della linea l'impedenza è pari all'impedenza caratteristica, $Z(z) \equiv Z_c$. La condizione di adattamento è molto importante in varie applicazioni, perché ad esempio in genere la presenza di un'onda riflessa può disturbare o danneggiare il generatore, tanto è vero che spesso a valle del generatore stesso si dispone un componente apposito, detto isolatore (realizzato ad esempio con ferrite magnetizzata) che lascia passare indisturbata l'onda diretta, ma blocca quella riflessa. Un altro caso di adattamento è quello in cui la linea si possa considerare come se fosse indefinita, perché allora non ci sono possibilità di riflessione. Infine, un tratto di linea con forti perdite si può considerare come un carico adattato, perché le perdite rendono le riflessioni di entità trascurabile.

Nel caso già visto di chiusura in corto circuito si ha $Z_L = 0$, quindi $\Gamma_L = \Gamma_V(0) = -1$ e $|\Gamma_V| \equiv 1$ per k_z reale³. Nel caso di linea aperta (circuito aperto) si ha $Z_L = \infty$, quindi $\Gamma_L = \Gamma_V(0) = 1$ e ancora $|\Gamma_V| \equiv 1$ per k_z reale. Ogniqualevolta si verifica la

³Si ricordi che nel caso di incidenza normale di onde piane uniformi su un conduttore perfetto si aveva appunto $\Gamma_E = -1$.

condizione $|\Gamma_V| = 1$, si dice che siamo in presenza di riflessione totale. Oltre ai due casi visti, c'è anche una terza situazione di riflessione totale, quando l'impedenza di carico Z_L è puramente immaginaria (reattanza pura), cioè $Z_L = jX_L$ (in questo caso infatti non si ha dissipazione di potenza attiva, ma solo accumulo di potenza reattiva), e inoltre l'impedenza caratteristica Z_c è reale. Si ha allora:

$$\Gamma_V(0) = \Gamma_L = \frac{jX_L - Z_c}{jX_L + Z_c} = -\frac{Z_c - jX_L}{Z_c + jX_L}.$$

Essendo $\Gamma_V(0)$ il rapporto di due quantità coniugate, allora $|\Gamma_V(0)| = 1$ e se k_z è reale $|\Gamma_V| \equiv 1$.

Abbiamo già visto la formula che permette di ottenere il coefficiente di riflessione della linea in qualsiasi sezione, noto quello sul carico. Ricaviamo ora una formula analoga (meno immediata) per le impedenze. Partendo dalla relazione tra coefficiente di riflessione e impedenza:

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_c \frac{1 + \Gamma_V(z)}{1 - \Gamma_V(z)} = Z_c \frac{1 + \Gamma_V(0) e^{2jk_z z}}{1 - \Gamma_V(0) e^{2jk_z z}} = \\ &= Z_c \frac{1 + \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{2jk_z z}}{1 - \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} e^{2jk_z z}}. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $(Z_L + Z_c) e^{-jk_z z}$:

$$\begin{aligned} Z(z) &= Z_c \frac{(Z_L + Z_c) e^{-jk_z z} + (Z_L - Z_c) e^{jk_z z}}{(Z_L + Z_c) e^{-jk_z z} - (Z_L - Z_c) e^{jk_z z}} = \\ &= Z_c \frac{Z_L (e^{jk_z z} + e^{-jk_z z}) - Z_c (e^{jk_z z} - e^{-jk_z z})}{Z_c (e^{jk_z z} + e^{-jk_z z}) - Z_L (e^{jk_z z} - e^{-jk_z z})} = \\ &= Z_c \frac{Z_L \cos(k_z z) - jZ_c \sin(k_z z)}{Z_c \cos(k_z z) - jZ_L \sin(k_z z)}. \end{aligned}$$

La formula precedente permette ad esempio di ricavare l'impedenza di ingresso $Z_i = Z(-\ell)$ di un tratto di linea di lunghezza ℓ chiuso in $z = 0$ su un carico assegnato Z_L ⁴:

⁴La formula per le ammettenze è identica, a patto di sostituire ogni impedenza con la corrispondente ammettenza.

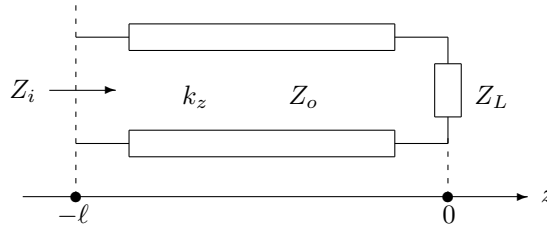


Figura 3.2: Linea di lunghezza ℓ terminata su un carico Z_L

$$Z_i = Z(-\ell) = Z_c \frac{Z_L \cos(k_z \ell) + jZ_c \sin(k_z \ell)}{Z_c \cos(k_z \ell) + jZ_L \sin(k_z \ell)},$$

avendo ricordato che il coseno è una funzione pari e il seno dispari. In particolare per $Z_L = Z_c$ (adattamento) ritroviamo il risultato $Z(-\ell) = Z_c$. Per $Z_L = 0$ (corto circuito) si ha:

$$Z_i = jZ_c \tan(k_z \ell),$$

che risulta puramente immaginaria (reattiva) se Z_c e k_z sono reali. In particolare la reattanza $X_i = Z_c \tan(k_z \ell)$ assume alternativamente valori positivi (reattanza di tipo induttivo) o negativi (reattanza capacitiva) e presenta un periodo pari a:

$$\frac{\pi}{k_z} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_z}} = \frac{\lambda_z}{2},$$

essendo λ_z la lunghezza d'onda della linea. Nel caso di chiusura in circuito aperto, ovvero $Z_L = \infty$, si ha:

$$Z_i = -jZ_c \cot(k_z \ell).$$

Si noti infine che un tratto di linea pari a $\frac{\lambda_z}{2}$ o multipli rappresenta in ingresso la stessa impedenza del carico. Si ha infatti per $\ell = \frac{\lambda_z}{2}$ e k_z reale:

$$k_z \ell = \frac{2\pi}{\lambda_z} \frac{\lambda_z}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad Z_i = Z_L.$$

Invece un tratto di linea pari a $\frac{\lambda_z}{4}$ o multipli dispari (per multipli pari ovviamente si ricade nel caso precedente) dà luogo a un'impedenza d'ingresso pari a:

$$Z_i = \frac{Z_c^2}{Z_L} \quad \Rightarrow \quad Z_c = \sqrt{Z_i Z_L},$$

cioè l'impedenza caratteristica risulta la media geometrica fra l'impedenza di carico

e quella d'ingresso. In quest'ultimo caso si parla di trasformatore in quarto d'onda, detto anche invertitore di impedenza. Per capire questo nome introduciamo le *impedenze normalizzate* (adimensionali) rispetto all'impedenza caratteristica:

$$\hat{Z}(z) = \frac{Z(z)}{Z_c} \quad \hat{Y}(z) = \frac{Y(z)}{Y_c}.$$

Si ha allora:

$$\frac{Z_i}{Z_c} = \frac{Z_c}{Z_L} \quad \Rightarrow \quad \hat{Z}_i = \frac{1}{\hat{Z}_L}.$$

3.3 Rapporto d'onda stazionaria

Introduciamo ora un altro parametro, utile per l'analisi dei fenomeni di riflessione in una linea di trasmissione, che si chiama *rapporto d'onda stazionaria* (in italiano ROS, in inglese indicato con SWR, Standing Wave Ratio, oppure con VSWR, per precisare che si riferisce alla tensione) e si definisce come:

$$\text{SWR} = \frac{|V(z)|_{max}}{|V(z)|_{min}},$$

ove $|V(z)|_{max}$ e $|V(z)|_{min}$ indicano rispettivamente il massimo e il minimo valore assunti lungo la linea dal modulo della tensione. Questo rapporto è dunque una quantità reale indipendente da z .

Evidentemente deve esistere un legame tra questo parametro e il coefficiente di riflessione (in tensione). Si ha infatti per il modulo della tensione lungo la linea:

$$|V(z)| = |V^+(z) + V^-(z)| = |V^+(z)| |1 + \Gamma_V(z)|,$$

e nell'ipotesi di k_z reale:

$$\begin{aligned} |V(z)| &= |V_o^+| \left| 1 + \Gamma_V(0) e^{2jk_z z} \right| = \\ &= |V_o^+| \left| 1 + |\Gamma_V| e^{j\{2k_z z + \arg[\Gamma_V(0)]\}} \right|, \end{aligned}$$

$$\text{con } |\Gamma_V(0)| = |\Gamma_V|.$$

Si nota che il modulo della tensione è una funzione periodica di z , di periodo:

$$\frac{2\pi}{2k_z} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_z}} = \frac{\lambda_z}{2}.$$

Per la ricerca del massimo e del minimo è dunque sufficiente esplorare (ad esempio con una sonda di campo) un tratto di linea di lunghezza $\frac{\lambda_z}{2}$. Se rappresentiamo nel piano complesso la quantità $\frac{|V(z)|}{|V_o^+|}$ si ha la situazione seguente:

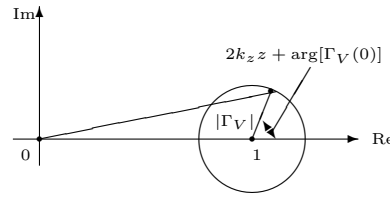


Figura 3.3: Rappresentazione di $\frac{|V(z)|}{|V_o^+|}$ nel piano complesso

Al variare di z viene descritta una circonferenza con centro nel punto $(1, 0)$ e raggio pari a $|\Gamma_V|$. Si noti che, se l'impedenza di carico $Z_L = R_L + jX_L$ risulta passiva, ossia con parte reale non negativa ($R_L \geq 0$) e Z_o è reale positiva, si ha:

$$|\Gamma_V| = \frac{|R_L - Z_c + jX_L|}{|R_L + Z_c + jX_L|} = \sqrt{\frac{(R_L - Z_c)^2 + X_L^2}{(R_L + Z_c)^2 + X_L^2}} \leq 1.$$

A questo punto ispezionando la figura si ha evidentemente:

$$\frac{|V(z)|_{max}}{|V_o^+|} = 1 + |\Gamma_V|,$$

$$\frac{|V(z)|_{min}}{|V_o^+|} = 1 - |\Gamma_V|.$$

Per cui:

$$SWR = \frac{1 + |\Gamma_V|}{1 - |\Gamma_V|}.$$

Si noti che risulta sempre $SWR \geq 1$. In particolare si ha $SWR = 1$ nel caso di linea adattata ($\Gamma_V = 0$): ciò corrisponde al fatto che in tal caso il modulo della tensione è costante lungo la linea. Nel caso opposto di riflessione totale, si ha invece $SWR = \infty$, essendo $|\Gamma_V| = 1$: ciò corrisponde al fatto che in tal caso il modulo della tensione si annulla in alcune sezioni della linea, e quindi $|V(z)|_{min} = 0$. Si ha poi la relazione inversa, essendo:

$$(1 - |\Gamma_V|) \text{SWR} = 1 + |\Gamma_V| ,$$

$$|\Gamma_V| (1 + \text{SWR}) = \text{SWR} - 1 \quad \Rightarrow \quad |\Gamma_V| = \frac{\text{SWR} - 1}{\text{SWR} + 1} .$$

Quest'ultima formula si può adoperare per calcolare $|\Gamma_V|$ una volta noto SWR , che è un parametro facilmente misurabile a partire dalla sua definizione come rapporto tra modulo massimo e modulo minimo della tensione, per esempio impiegando una sonda scorrevole lungo la linea, disposta in modo tale da perturbare il meno possibile la configurazione di campo nella linea stessa.

3.4 Strati antiriflettenti

Vogliamo ora applicare il formalismo delle linee di trasmissione alla risoluzione di problemi di trasmissione e di riflessione con incidenza normale di onde piane uniformi in strutture planari stratificate. Considereremo in generale mezzi omogenei, isotropi, non dispersivi e generalmente dissipativi. A ciascuno strato omogeneo assoceremo una linea di trasmissione equivalente, avente costante di propagazione, impedenza caratteristica e lunghezza d'onda pari alla costante di propagazione, all'impedenza caratteristica e alla lunghezza d'onda di quel mezzo.

Nel passaggio da un mezzo all'altro, e quindi da una linea all'altra, si devono conservare le componenti tangenziali di campo elettrico e di campo magnetico, legate come si è visto alla tensione e alla corrente rispettivamente, che quindi devono conservarsi. Ciò significa che le due linee contigue devono essere direttamente giustapposte, senza interporre componenti in serie o in parallelo (che romperebbero la continuità della tensione e della corrente, rispettivamente). Dalla continuità della tensione e della corrente segue la continuità dell'impedenza, e quindi l'impedenza di chiusura della linea di sinistra deve coincidere con l'impedenza d'ingresso della linea di destra. Il coefficiente di riflessione invece non risulta continuo alla sezione di connessione fra due linee di trasmissione diverse.

Consideriamo come primo esempio il cosiddetto strato antiriflettente, che si interpone fra due mezzi diversi, per eliminare le riflessioni che necessariamente si presenterebbero in corrispondenza della sezione di transizione. Tale eliminazione si ottiene per interferenza distruttiva fra i campi riflessi dalle due facce dello strato.

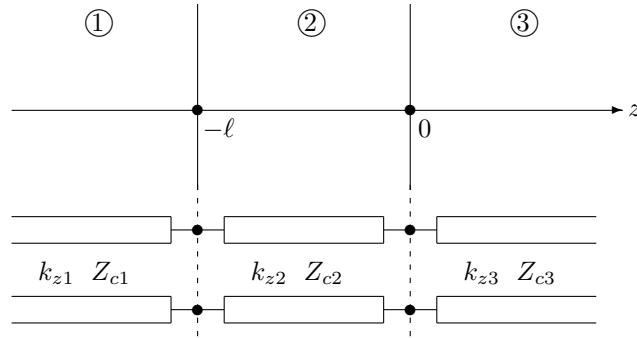


Figura 3.4: Strato antiriflettente (caratterizzato da Z_{c2} , k_{z2} ed ℓ) interposto tra due mezzi

La regione 3 si suppone di lunghezza infinita, quindi adattata, per cui la sua impedenza d'ingresso coincide con l'impedenza caratteristica Z_{c3} , che costituisce l'impedenza di chiusura o di carico per la linea che rappresenta il mezzo 2. A questo punto possiamo calcolare l'impedenza d'ingresso della linea 2, che costituirà il carico per la linea 1. Tale impedenza ha l'espressione già vista:

$$Z_{i2} = Z_{c2} \frac{Z_{c3} \cos(k_{z2} \ell) + jZ_{c2} \sin(k_{z2} \ell)}{Z_{c2} \cos(k_{z2} \ell) + jZ_{c3} \sin(k_{z2} \ell)}.$$

Se tale impedenza $Z_{i2} = Z_{L1}$ risulta pari all'impedenza caratteristica Z_{c1} della linea che rappresenta il mezzo 1, si avrà in chiusura alla linea 1:

$$\Gamma_V(-\ell) = \frac{Z_{i2} - Z_{c1}}{Z_{i2} + Z_{c1}} = 0.$$

Supponiamo ora che i tre mezzi siano non dissipativi, e che in particolare sia k_{z2} reale. Prendiamo inoltre $\ell = \frac{\lambda_{z2}}{4}$, quindi sarà:

$$k_{z2} \ell = \frac{2\pi}{\lambda_{z2}} \frac{\lambda_{z2}}{4} = \frac{\pi}{2},$$

ovvero si ha un trasformatore in quarto d'onda, per cui come si era visto risultava:

$$Z_{i2} = \frac{Z_{c2}^2}{Z_{c3}} = \frac{\zeta_2^2}{\zeta_3}.$$

Se il mezzo 2 è scelto in modo tale che sia:

$$\frac{\zeta_2^2}{\zeta_3} = Z_{c1} = \zeta_1 \quad \Rightarrow \quad \zeta_2 = \sqrt{\zeta_1 \zeta_3}$$

risulterà $\Gamma_V(-\ell) = 0$, non si avrà cioè onda riflessa nel mezzo 1. Mediante lo strato

antiriflettente 2 si è dunque realizzato l'adattamento di impedenza tra il mezzo 1 e il mezzo 3. Tale tecnica viene impiegata per ottenere la massima trasparenza negli obiettivi fotografici. In tal caso il mezzo 1 è l'aria, il mezzo 3 il vetro.

Per dimensionare lo strato antiriflettente devo conoscere $\lambda_{z2} = \frac{\lambda_o}{\sqrt{\epsilon_{r2}}}$ e posso ricavare ϵ_{r2} (sempre nell'ipotesi, per tutti i mezzi, che $\mu_r \simeq 1$) dalla condizione sulle impedenze:

$$\zeta_2^2 = \zeta_1 \zeta_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu_o}{\epsilon_o \epsilon_{r2}} \cong \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o \epsilon_{r1}}} \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o \epsilon_{r3}}},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon_{r2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{r1} \epsilon_{r3}}} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{r2} = \sqrt{\epsilon_{r1} \epsilon_{r3}}.$$

Consideriamo ora un secondo esempio applicabile alla realizzazione di una camera anecoica, cioè di una camera con pareti non riflettenti, oppure al nascondimento di oggetti metallici da un radar. Prendiamo in esame una struttura a quattro strati.

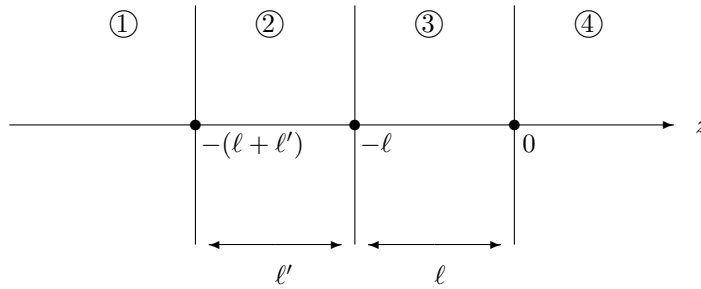


Figura 3.5: Struttura multistrato

L'ultimo strato si assume ottimo conduttore (rappresentando ad esempio la parete schermante della camera anecoica o la parete esterna del bersaglio radar), per cui la sua impedenza sarà:

$$\zeta_4 \simeq \sqrt{\frac{j\omega\mu_4}{\sigma_4}} \simeq 0.$$

Se inoltre lo spessore della regione 4 è (realisticamente) finito, ma l'onda diretta è sufficientemente attenuata, si può supporre la linea 4 adattata e dunque la linea 3 risulta caricata su $Z_{L3} = Z_{c4} = \zeta_4 \simeq 0$. Quindi la linea 3 risulta praticamente chiusa in corto circuito, e si ha in ingresso:

$$Z_{i3} = jZ_{c3} \tan(k_{z3} \ell).$$

Adesso supponiamo che il mezzo 3 sia non dissipativo (k_{z3} reale) e che inoltre la linea 3 sia un trasformatore in quarto d'onda ($\ell = \frac{\lambda_{z3}}{4} \Rightarrow k_{z3} \ell = \frac{\pi}{2}$). Risulta allora come già visto $Z_{i3} = Z_{L2} = \infty$ e la linea 2 risulta chiusa in circuito aperto. A questo punto all'ingresso del mezzo 2 si trova:

$$Z_{i2} = -jZ_{c2} \cot(k_{z2} \ell').$$

Facciamo poi l'ipotesi che il mezzo 2 sia di spessore molto piccolo (rispetto al solito alla lunghezza d'onda), sicché si abbia:

$$|k_{z2}| \ell' \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \cos(k_{z2} \ell') &\simeq 1 \\ \sin(k_{z2} \ell') &\simeq k_{z2} \ell' \end{aligned},$$

e dunque:

$$\begin{aligned} Z_{i2} &\cong -jZ_{c2} \frac{1}{k_{z2} \ell'} = \frac{Z_{c2}}{jk_{z2} \ell'} = \\ &= \frac{\sqrt{\frac{Z_{S2}}{Y_{P2}}}}{\sqrt{Z_{S2} Y_{P2}} \ell'} = \frac{1}{Y_{P2} \ell'} = \frac{1}{(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \ell'}. \end{aligned}$$

Se infine supponiamo che il mezzo 2 sia un buon conduttore, si ottiene:

$$Z_{i2} = Z_{L1} \simeq \frac{1}{\sigma_2 \ell'}.$$

Allora scegliendo opportunamente σ_2 e ℓ' si potrà realizzare la condizione:

$$Z_{L1} \simeq \frac{1}{\sigma_2 \ell'} = Z_{c1} = \zeta_1,$$

e risulterà $\Gamma_V(-\ell - \ell') = 0$, non si avrà cioè onda riflessa nel mezzo 1.

Nella pratica il mezzo che occupa la regione 2 potrà essere realizzato mediante verniciatura con una sostanza conduttrice (contenente per esempio in sospensione polvere di grafite): ciò permette di variare in modo semplice σ_2 e ℓ' . Con il metodo visto posso dunque realizzare una struttura di rivestimento di un oggetto metallico che impedisca la riflessione delle onde elettromagnetiche.

Si osservi ora che entrambi i metodi considerati impiegano in modo essenziale la

proprietà del trasformatore in quarto d'onda⁵. Tale condizione è, come si suol dire, a banda stretta, perché se cambio la frequenza della radiazione incidente, cambia anche la lunghezza d'onda e quindi (a struttura ormai realizzata) non sarà più vero che $\ell = \frac{\lambda_z}{4}$ e il coefficiente di riflessione non sarà più nullo. Tuttavia in pratica il coefficiente di riflessione risulterà molto piccolo (quasi nullo) per una (ristretta) banda di frequenze. Per ottenere condizioni di adattamento a più larga banda occorre usare strutture con molti più strati. Ci sono poi forti legami fra la teoria di queste strutture e la teoria dei filtri: in fondo anche queste sono strutture filtranti (per certe frequenze il segnale passa, per altre viene riflesso).

⁵ $\ell = \frac{\lambda_z}{4}$

Propagazione elettromagnetica guidata

4.1 Relazioni generali delle guide d'onda

Ci proponiamo ora di studiare soluzioni particolari delle equazioni di Maxwell omogenee in strutture denominate guide d'onda, che potranno essere dielettriche oppure metalliche cave, a simmetria cilindrica, per le quali cioè siano identiche (in forma e dimensioni) le sezioni normali (dette trasverse) rispetto a una direzione determinata (detta longitudinale), detta asse di simmetria.

Per tali strutture è naturale, e utile per l'imposizione delle condizioni al contorno, l'impiego di un sistema di coordinate ortogonali cilindriche generalizzate indicate con q_1 , q_2 e z , ottenuto associando a un asse cartesiano z , posto lungo la direzione di simmetria cilindrica, un sistema di coordinate curvilinee ortogonali q_1 , q_2 nei piani normali a z , scelto in base alla forma della sezione trasversa. Tali coordinate saranno quindi, per esempio, cartesiane xy nel caso di una guida d'onda di sezione rettangolare, polari $\rho\varphi$ per una guida d'onda di sezione circolare (ad esempio un cavo coassiale nel caso metallico, oppure una fibra ottica nel caso dielettrico).

In questo sistema di riferimento un generico vettore, per esempio il campo elettrico \underline{E} , si può esprimere nella seguente forma:

$$\underline{E} = \underline{E}_t + z_o E_z,$$

ove \underline{E}_t è la componente vettoriale di \underline{E} nel piano trasverso. In modo analogo è

possibile decomporre l'operatore nabla e l'operatore di Laplace in una parte trasversa e una longitudinale:

$$\begin{aligned}\nabla &= \nabla_t + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial z}, \\ \nabla^2 &= \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned}$$

Nel caso particolare delle coordinate cartesiane si ha ad esempio

$$\begin{aligned}\nabla_t &= \underline{x}_o \frac{\partial}{\partial x} + \underline{y}_o \frac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla_t^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Consideriamo allora questa regione di spazio a simmetria cilindrica priva di sorgenti, cioè di correnti impresse elettriche e magnetiche. Supponiamo inoltre il mezzo che occupa tale regione di tipo omogeneo e isotropo. È noto che in queste condizioni il campo elettrico soddisfa, con le opportune condizioni al contorno imposte dalla struttura (che poi vedremo), l'equazione di Helmholtz omogenea:

$$\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0,$$

che diventa con le posizioni fatte:

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z) + k^2 (\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z) = 0.$$

Sfruttando il fatto che \underline{z}_o è una costante vettoriale si ha sviluppando:

$$\nabla_t^2 \underline{E}_t + \underline{z}_o \nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} + \underline{z}_o \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_t + \underline{z}_o k^2 E_z = 0.$$

A questo punto i vari termini sono o longitudinali (paralleli a \underline{z}_o), oppure trasversi (ortogonali a \underline{z}_o). Separando i contributi deve risultare:

$$\begin{cases} \nabla_t^2 \underline{E}_t + \frac{\partial^2 \underline{E}_t}{\partial z^2} + k^2 \underline{E}_t = 0 \\ \nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \end{cases},$$

equivalente all'equazione delle onde in coordinate cilindriche generalizzate. La seconda equazione del sistema si poteva anche ottenere semplicemente proiettando l'equazione di Helmholtz vettoriale lungo l'asse (cartesiano) z . Le stesse equazioni si

ottengono evidentemente per il campo magnetico (dualità).

Vogliamo ora scrivere anche le equazioni di Maxwell omogenee in coordinate cilindriche generalizzate, forma adatta per lo studio delle strutture guidanti. La prima diventa:

$$\left(\nabla_t + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\underline{E}_t + \underline{z}_o E_z) = -j\omega\mu (\underline{H}_t + \underline{z}_o H_z) .$$

Sviluppando si ha:

$$\nabla_t \times \underline{E}_t + \nabla_t \times (E_z \underline{z}_o) + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_t - j\omega\mu H_z \underline{z}_o . \quad (4.1)$$

A questo punto si ricordi l'identità vettoriale:

$$\nabla \times (\Phi \underline{A}) = \Phi \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \times \nabla \Phi ,$$

da cui risulta nel caso bidimensionale:

$$\nabla_t \times (E_z \underline{z}_o) = E_z \nabla_t \times \underline{z}_o - \underline{z}_o \times \nabla_t E_z = -\underline{z}_o \times \nabla_t E_z ,$$

essendo al solito \underline{z}_o una costante vettoriale. Dalla (4.1) si ottiene allora:

$$\nabla_t \times \underline{E}_t - \underline{z}_o \times \nabla_t E_z + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_t - j\omega\mu H_z \underline{z}_o .$$

Scomponendo in termini paralleli e ortogonali rispetto a \underline{z}_o otteniamo per la *prima equazione di Maxwell*:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t & = -j\omega\mu H_z \underline{z}_o \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t E_z + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} & = -j\omega\mu \underline{H}_t \end{cases} .$$

In modo duale otteniamo per la *seconda equazione di Maxwell*:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{H}_t & = j\omega\epsilon_c E_z \underline{z}_o \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t H_z + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} & = j\omega\epsilon_c \underline{E}_t \end{cases} .$$

Si noti che finora le equazioni scritte hanno mantenuto caratteristiche del tutto generali.

Consideriamo ora una particolare classe di soluzioni, caratterizzate da una sepa-

razione delle variabili, cioè soluzioni del tipo:

$$\underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2) V(z) ,$$

$$\underline{H}_t(q_1, q_2, z) = \underline{h}_t(q_1, q_2) I(z) ,$$

date dal prodotto di una parte vettoriale dipendente solo dalle coordinate trasverse e di una scalare dipendente solo dalla coordinata longitudinale. Evidentemente al solito non tutte le soluzioni possono essere poste in questa forma, ma se sono in grado di dimostrare che queste soluzioni costituiscono un insieme completo il gioco è fatto. Una tale decomposizione permetterà fra l'altro di associare alla propagazione lungo la direzione longitudinale z una linea di trasmissione equivalente.

Consideriamo poi tre classi di campi del tipo suddetto: quelli con $E_z \equiv 0$ (campi trasversi elettrici, o TE), quelli con $H_z \equiv 0$ (campi trasversi magnetici, o TM) e quelli con $E_z = H_z \equiv 0$ (campi trasversi elettromagnetici, o TEM). Tali onde sono poi effettivamente molto usate nelle applicazioni. Esaminiamole separatamente.

4.1.1 Campi TE

Nel caso TE le due equazioni di Maxwell danno luogo a:

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{E}_t &= -j\omega\mu H_z \underline{z}_o \\ \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu \underline{H}_t \end{cases} , \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} \nabla_t \times \underline{H}_t &= 0 \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t H_z + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} &= j\omega\varepsilon_c \underline{E}_t \end{cases} . \quad (4.3)$$

Introducendo nella prima equazione l'ipotesi di separabilità delle variabili si ha:

$$V(z) \nabla_t \times \underline{e}_t(q_1, q_2) = -j\omega\mu H_z(q_1, q_2, z) \underline{z}_o .$$

Vista la forma separata del primo membro si può dedurre:

$$H_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2) V(z) .$$

Quindi la componente trasversa di \underline{E} e quella longitudinale di \underline{H} hanno la stessa dipendenza da z . Semplificando si deve poi avere:

$$\nabla_t \times \underline{e}_t = -j\omega\mu \underline{h}_z \underline{z}_o.$$

Se ora prendo la seconda delle (4.2) e la moltiplico vettorialmente a destra per \underline{z}_o si ha:

$$\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} \times \underline{z}_o = \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_t \times \underline{z}_o,$$

quindi:

$$\frac{dV}{dz} \underline{e}_t = -j\omega\mu I(z) \underline{h}_t \times \underline{z}_o. \quad (4.4)$$

La prima delle (4.3) invece porge:

$$\nabla_t \times \underline{h}_t = 0,$$

e la seconda diventa:

$$-V(z) \underline{z}_o \times \nabla_t \underline{h}_z + \frac{dI}{dz} \underline{z}_o \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c V(z) \underline{e}_t. \quad (4.5)$$

Se si assume che nella (4.4) sia $\underline{e}_t = \underline{h}_t \times \underline{z}_o$ (il che tra l'altro implica che sia, moltiplicando a sinistra per \underline{z}_o , $\underline{h}_t = \underline{z}_o \times \underline{e}_t$) risulta:

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega\mu I(z) = -jk_z \frac{\omega\mu}{k_z} I(z),$$

che coincide con la *prima equazione delle linee di trasmissione*, avendo posto:

$$Z_S^{\text{TE}} = j\omega\mu \quad Z_c^{\text{TE}} = \frac{\omega\mu}{k_z}.$$

D'altra parte dalla (4.5) ricavo:

$$\frac{dI}{dz} \underline{z}_o \times \underline{h}_t = \frac{dI}{dz} (-\underline{e}_t) = (j\omega\varepsilon_c \underline{e}_t + \underline{z}_o \times \nabla_t \underline{h}_z) V(z).$$

A questo punto pongo, in modo duale a quanto visto prima:

$$\frac{dI}{dz} = -jk_z Y_c^{\text{TE}} V(z) = -jk_z \frac{k_z}{\omega\mu} V(z) = -j \frac{k_z^2}{\omega\mu} V(z),$$

ed eliminando $V(z)$ ottengo la relazione:

$$-j \frac{k_z^2}{\omega \mu} (-\underline{e}_t) = j\omega \varepsilon_c \underline{e}_t + \underline{z}_o \times \nabla_t h_z,$$

da cui, sviluppando:

$$\underline{e}_t \left(j\omega \varepsilon_c - j \frac{k_z^2}{\omega \mu} \right) = \underline{e}_t \frac{-\omega^2 \mu \varepsilon_c + k_z^2}{j\omega \mu} = -\underline{z}_o \times \nabla_t h_z.$$

Pongo ora $k_t^2 = k^2 - k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c - k_z^2$ e quindi:

$$\underline{e}_t \frac{-k_t^2}{j\omega \mu} = -\underline{z}_o \times \nabla_t h_z,$$

$$\underline{e}_t = \frac{j\omega \mu}{k_t^2} \underline{z}_o \times \nabla_t h_z,$$

ho cioè espresso \underline{e}_t in funzione di h_z . Si ha poi:

$$\underline{h}_t = \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -\frac{j\omega \mu}{k_t^2} \nabla_t h_z,$$

e quindi ho espresso anche \underline{h}_t in funzione di h_z . Il risultato dunque è che tutto il campo di tipo TE si può esprimere come funzione della sola componente longitudinale presente, ossia h_z , anzi in particolare come funzione di $\nabla_t h_z$.

Vediamo ora quale equazione deve soddisfare $h_z(q_1, q_2)$. Sappiamo dall'equazione di Helmholtz che:

$$\nabla_t^2 H_z + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0,$$

che con le posizioni fatte diviene:

$$V(z) \nabla_t^2 h_z + h_z \frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 h_z V(z) = 0.$$

Ma per le equazioni delle linee:

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -k_z^2 V(z),$$

allora:

$$V(z) \nabla_t^2 h_z - k_z^2 V(z) h_z + k^2 V(z) h_z = 0,$$

ed eliminando $V(z)$ ottengo:

$$\nabla_t^2 h_z + k_t^2 h_z = 0,$$

che è un'equazione di Helmholtz bidimensionale.

4.1.2 Campi TM

Passiamo ora al caso dei campi TM ($H_z \equiv 0$). Le due equazioni di Maxwell porgono dualmente:

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \underline{E}_t = 0 &\Rightarrow \nabla_t \times \underline{e}_t = 0, \\ -\underline{z}_o \times \nabla_t E_z + \underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} &= -j\omega\mu \underline{H}_t, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\nabla_t \times \underline{H}_t = j\omega\varepsilon_c E_z \underline{z}_o, \quad (4.7)$$

$$\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}_t. \quad (4.8)$$

Introducendo nella (4.7) l'ipotesi di separabilità si ha:

$$I(z) \nabla_t \times \underline{h}_t(q_1, q_2) = j\omega\varepsilon_c E_z(q_1, q_2, z) \underline{z}_o.$$

Vista la forma separata del primo membro, si può dedurre che sia:

$$E_z(q_1, q_2, z) = e_z(q_1, q_2) I(z).$$

Quindi la componente trasversa di \underline{H} e quella longitudinale di \underline{E} hanno la stessa dipendenza da z . Semplificando si deve poi avere:

$$\nabla_t \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c e_z \underline{z}_o.$$

Se ora prendo la (4.8) e la moltiplico vettorialmente a destra per \underline{z}_o si ha:

$$\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} \times \underline{z}_o = \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}_t \times \underline{z}_o,$$

$$\frac{dI}{dz} \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c V(z) \underline{e}_t \times \underline{z}_o.$$

Facendo ora la stessa assunzione che per i TE, ossia $\underline{h}_t = \underline{z}_o \times \underline{e}_t$ si ottiene:

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega\varepsilon_c V(z) = -jk_z \frac{\omega\varepsilon_c}{k_z} V(z),$$

che coincide con la *seconda equazione delle linee*, avendo posto:

$$Y_P^{\text{TM}} = j\omega\varepsilon_c \quad Y_c^{\text{TM}} = \frac{\omega\varepsilon_c}{k_z} \Rightarrow Z_c^{\text{TM}} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon_c}.$$

D'altra parte dalla (4.6) ricavo:

$$-I(z) \underline{z}_o \times \nabla_t e_z + \frac{dV}{dz} \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu I(z) \underline{h}_t,$$

quindi:

$$\frac{dV}{dz} \underline{h}_t = (-j\omega\mu \underline{h}_t + \underline{z}_o \times \nabla_t e_z) I(z).$$

Pongo ora:

$$\frac{dV}{dz} = -jk_z Z_c^{\text{TM}} I(z) = -jk_z \frac{k_z}{\omega\varepsilon_c} I(z) = -j \frac{k_z^2}{\omega\varepsilon_c} I(z),$$

ed eliminando $I(z)$ ottengo la relazione:

$$\begin{aligned} -j \frac{k_z^2}{\omega\varepsilon_c} \underline{h}_t &= -j\omega\mu \underline{h}_t + \underline{z}_o \times \nabla_t e_z, \\ \underline{h}_t \frac{k_z^2 - \omega^2\mu\varepsilon_c}{j\omega\varepsilon_c} &= \underline{h}_t \frac{-k_t^2}{j\omega\varepsilon_c} = \underline{z}_o \times \nabla_t e_z, \\ \underline{h}_t &= -\frac{j\omega\varepsilon_c}{k_t^2} \underline{z}_o \times \nabla_t e_z, \end{aligned}$$

ho cioè espresso \underline{h}_t in funzione di e_z . Si ha poi:

$$\underline{e}_t = \underline{h}_t \times \underline{z}_o = -\frac{j\omega\varepsilon_c}{k_t^2} \nabla_t e_z$$

e quindi ho espresso anche \underline{e}_t in funzione di e_z , anzi di $\nabla_t e_z$. Quindi tutto il campo di tipo TM si può esprimere come funzione della sola componente longitudinale presente, ossia e_z .

Si noti che anche $e_z(q_1, q_2)$ deve soddisfare un'equazione di Helmholtz bidimen-

sionale omogenea. Infatti dalla:

$$\nabla_t^2 E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0,$$

si ha, con le posizioni fatte,

$$I(z) \nabla_t^2 e_z + e_z \frac{d^2 I}{dz^2} + k^2 e_z I(z) = 0,$$

e quindi:

$$I(z) \nabla_t^2 e_z - k_z^2 I(z) e_z + k^2 I(z) e_z = 0.$$

Elidendo $I(z)$ ottengo:

$$\nabla_t^2 e_z + k_t^2 e_z = 0.$$

Si noti che una trattazione alternativa a quella esposta fa uso del concetto di potenziale vettore. In particolare l'assumere un potenziale puramente longitudinale $\underline{A} = A_z \underline{z}_o$ dà luogo a un campo $\text{TM}^{(z)}$, e dunque A_z risulterà proporzionale a E_z , mentre assumere $\underline{F} = F_z \underline{z}_o$ dà luogo a un campo $\text{TE}^{(z)}$, e dunque F_z risulterà proporzionale ad H_z .

4.1.3 Campi TEM

Consideriamo infine i campi TEM ($E_z = H_z \equiv 0$). Le equazioni di Maxwell diventano

$$\nabla_t \times \underline{E}_t = 0,$$

$$\nabla_t \times \underline{H}_t = 0,$$

$$\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = -j\omega\mu \underline{H}_t,$$

$$\underline{z}_o \times \frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon_c \underline{E}_t.$$

Utilizzando al solito le condizioni sulla separabilità dei campi trasversi si ottiene

$$\nabla_t \times \underline{e}_t = 0,$$

$$\nabla_t \times \underline{h}_t = 0,$$

$$\frac{dV}{dz} \underline{z}_o \times \underline{e}_t = -j\omega\mu I(z) \underline{h}_t, \quad (4.9)$$

$$\frac{dI}{dz} \underline{z}_o \times \underline{h}_t = j\omega\varepsilon_c V(z) \underline{e}_t. \quad (4.10)$$

La (4.9), facendo la solita posizione $\underline{e}_t = \underline{h}_t \times \underline{z}_o$, diventa della forma delle equazioni delle linee:

$$\frac{dV}{dz} = -j\omega\mu I(z),$$

mentre la (4.10) diventa:

$$\frac{dI}{dz} = -j\omega\varepsilon_c V(z).$$

Dalla prima risulta, pensando alle equazioni delle linee nelle due forme possibili:

$$Z_S^{\text{TEM}} = j\omega\mu \quad Z_c^{\text{TEM}} = \frac{\omega\mu}{k_z};$$

dalla seconda:

$$Y_P^{\text{TEM}} = j\omega\varepsilon_c \quad Y_c^{\text{TEM}} = \frac{\omega\varepsilon_c}{k_z}.$$

Dalla condizione $Z_c^{\text{TEM}} \cdot Y_c^{\text{TEM}} = 1$ segue:

$$\frac{\omega\mu}{k_z} \frac{\omega\varepsilon_c}{k_z} = 1,$$

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c \quad \Rightarrow \quad k_z = k \quad \Rightarrow \quad k_t^2 = 0,$$

e risulta infine:

$$Z_c^{\text{TEM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \zeta \quad Y_c^{\text{TEM}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\mu}} = \frac{1}{\zeta}.$$

Si tratta in sostanza di una proprietà caratteristica delle onde TEM che è verificata anche nel caso delle onde piane uniformi: la costante di propagazione di un campo TEM in guida coincide con quella di un'onda piana uniforme che si propaghi nello spazio libero riempito dallo stesso mezzo.

Si osservi che la (4.9) e la (4.10) non ci danno nuove informazioni sulle parti vettoriali. Ricorriamo allora ad altre proprietà del campo, in particolare alla $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$ dalla quale, considerando una regione di spazio priva di cariche libere e riempita di un mezzo omogeneo, si ha $\nabla \cdot \underline{E} = 0$. Dunque:

$$\left(\nabla_t + \underline{z}_o \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\underline{E}_t + E_z \underline{z}_o) = 0;$$

essendo $E_z = 0$, segue:

$$\nabla_t \cdot \underline{e}_t = 0.$$

D'altra parte si è visto che è anche:

$$\nabla_t \times \underline{e}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{e}_t = -\nabla_t \Phi(q_1, q_2).$$

Essendo \underline{e}_t sia solenoidale che irrotazionale si può scrivere:

$$\nabla_t \cdot \underline{e}_t = \nabla_t \cdot (-\nabla_t \Phi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_t^2 \Phi = 0;$$

la precedente è un'equazione di Laplace bidimensionale.

Lo stesso discorso ovviamente si poteva fare per il campo magnetico, a partire dalla $\nabla \cdot \underline{B} = 0$. Noto poi uno dei due campi, è facile calcolare l'altro.

4.2 Condizioni al contorno per guide d'onda metalliche. Modi di propagazione.

Passiamo ora a considerare il caso di guide d'onda o cavi metallici, virtualmente conduttori perfetti, e vediamo come si possono esprimere le condizioni al contorno, in termini del formalismo introdotto, per i tre casi considerati. Parleremo d'ora in avanti di modi di propagazione per indicare delle possibili soluzioni delle equazioni differenziali per il campo elettromagnetico che soddisfano anche le condizioni al contorno imposte dalla struttura guidante e che quindi siano effettivamente in grado di propagarsi (anche da soli) in tale struttura.

Partiamo dai campi TE ($E_z \equiv 0$). La condizione al contorno impone che sia nulla $\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o$ sul bordo s della sezione trasversale S della guida. Il campo \underline{e}_t era in realtà legato a:

$$\underline{z}_o \times \nabla_t h_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{z}_o \times \nabla_t h_z \cdot \underline{s}_o = \underline{s}_o \times \underline{z}_o \cdot \nabla_t h_z = \underline{n}_o \cdot \nabla_t h_z = 0 \quad \text{su } s,$$

quindi:

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad \text{su } s.$$

Nel caso invece di campi TM ($H_z \equiv 0$) la condizione impone $e_z \equiv 0$ su s , e inoltre $\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0$ su s , quindi:

$$\nabla_t e_z \cdot \underline{s}_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial e_z}{\partial s} = 0 \quad \text{su } s.$$

Il sistema di riferimento è riportato in Fig. (4.1). È chiaro però che la seconda

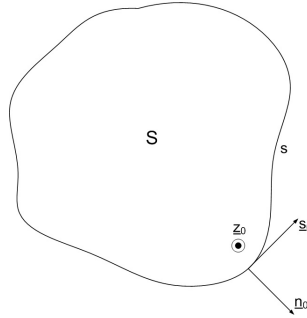


Figura 4.1: Sistema di riferimento per strutture cilindriche.

condizione è compresa nella prima.

Nel caso infine dei campi TEM ($E_z = H_z \equiv 0$) si ha la $\underline{e}_t \cdot \underline{s}_o = 0$ su s e quindi:

$$(-\nabla_t \Phi) \cdot \underline{s}_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad \text{su } s,$$

ossia la $\Phi(q_1, q_2)$ è costante su s . D'altra parte la Φ risultava essere soluzione dell'equazione di Laplace, ed è noto che le soluzioni di tale equazione hanno la proprietà di presentare i valori massimi e minimi sulla frontiera del dominio di interesse. Ma siccome sulla frontiera la Φ risulta costante, vuol dire che la Φ è costante su tutta la sezione trasversale S , dunque $\nabla_t \Phi \equiv 0$, di conseguenza $\underline{e}_t \equiv 0 \Rightarrow \underline{h}_t \equiv 0$ e quindi si ritrova la soluzione banale identicamente nulla, di nessun interesse fisico. Pertanto se il contorno è una linea unica, oppure come si dice la sezione è semplicemente connessa, non possono propagarsi onde TEM. Invece se la sezione è a connessione multipla (es. cavo coassiale), i valori (costanti) di Φ sui due contorni possono essere diversi tra loro e quindi non è più necessario che sia $\Phi = \text{cost}$ su tutta S . Quindi ad esempio si possono avere campi TEM per il cavo coassiale. In particolare ne esiste uno: infatti si può dimostrare che in una guida d'onda la cui sezione sia n volte connessa (cioè il contorno sia costituito da n parti separate) esistono $n - 1$ campi TEM distinti.

Si ricordi che in generale le condizioni al contorno determinano, in relazione alla particolare forma e dimensione della struttura guidante, i valori di k_t^2 . In particolare nel caso dei modi TE e TM l'equazione differenziale è la stessa, ma le soluzioni possono essere molto diverse per le diverse condizioni al contorno. Invece nel caso TEM è proprio diversa anche l'equazione differenziale.

4.3 La propagazione guidata come problema di autovalori

L'equazione di Helmholtz bidimensionale nei casi TE e TM è del tipo:

$$\nabla_t^2 T(q_1, q_2) + k_t^2 T(q_1, q_2) = 0,$$

ove $T \equiv e_z$ nel caso TM, $T \equiv h_z$ nel caso TE. Tale equazione assume la forma di un problema di autovalori del tipo $L\varphi = \lambda\varphi$:

$$-\nabla_t^2 T = k_t^2 T,$$

ove $-\nabla_t^2$ è l'operatore L , k_t^2 è l'autovalore λ e T l'autofunzione φ . È noto che questo problema ammette soluzioni non banali solo per un particolare insieme di valori di k_t^2 . Ad ogni autovalore come è noto corrisponde almeno una autofunzione T (non identicamente nulla per definizione), e le autofunzioni sono definite a meno di una costante moltiplicativa arbitraria.

Si può dimostrare che l'insieme degli autovalori (il cosiddetto spettro) dell'operatore $-\nabla_t^2$ risulta, per guide metalliche chiuse, costituito da un'infinità numerabile (spettro discreto), e che le corrispondenti autofunzioni rappresentano un insieme completo, ossia una base di rappresentazione per lo spazio vettoriale L^2 delle funzioni quadrato sommabili, cioè il cui modulo quadro è integrabile e l'integrale ha valore finito. Tali rappresentazioni si chiamano in genere rappresentazioni spettrali.

Nel caso di strutture metalliche con aperture, o di guide dielettriche, allo spettro discreto (modi guidati) si affianca in genere uno spettro continuo. Quest'ultimo corrisponde alla possibilità che vi sia emissione di energia dalla guida verso l'esterno e si parla, per le corrispondenti autofunzioni, di modi di radiazione, in contrapposizione ai modi guidati per i quali il campo risulta evanescente (si attenua) all'esterno della guida.

A questo punto sono utili alcuni richiami di analisi funzionale. Per cominciare, dato un operatore L , si chiama operatore aggiunto di L un operatore L^a (se esiste) tale che sia

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^a g \rangle,$$

ove le parentesi (*bracket*) indicano un prodotto scalare fra funzioni in generale

complesse, così definito nel nostro caso

$$\langle f, g \rangle = \int_S f g^* dS,$$

essendo S la sezione trasversa della guida d'onda. Se poi risulta $L^a \equiv L$, cioè se

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, Lg \rangle,$$

l'operatore si dice *autoaggiunto* o *hermitiano*.

Dalla definizione vista di prodotto scalare, e più in generale dagli assiomi della definizione algebrica, segue che:

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^* .$$

Nel caso allora di un operatore autoaggiunto, se $f \equiv g$ si ha:

$$\langle Lf, f \rangle = \langle f, Lf \rangle = \langle Lf, f \rangle^* ,$$

e dunque la quantità $\langle Lf, f \rangle$ risulta reale e allora ha senso chiedersi quale sia il suo segno. Ebbene, se $\langle Lf, f \rangle$ risulta sempre ≥ 0 e in particolare uguale a zero (se e solo se $f \equiv 0$), l'operatore si dice definito positivo. Invece se $\langle Lf, f \rangle$ risulta nulla anche per funzioni f non identicamente nulle, l'operatore si dice semidefinito positivo. In modo analogo si potrebbe parlare di operatore definito o semidefinito negativo.

Si osservi che se la funzione f è una autofunzione φ , risulta:

$$\langle L\varphi, \varphi \rangle = \langle \lambda \varphi, \varphi \rangle = \lambda \langle \varphi, \varphi \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle L\varphi, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle} .$$

Se dunque l'operatore L è autoaggiunto, gli autovalori λ risultano reali. Si noti infatti che

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_S \varphi \varphi^* dS = \int_S |\varphi|^2 dS > 0 .$$

Inoltre se l'operatore L è anche definito o semidefinito positivo, gli autovalori risultano > 0 o ≥ 0 rispettivamente.

Oltre ad avere gli autovalori reali, un operatore autoaggiunto gode anche della proprietà che autofunzioni corrispondenti ad autovalori diversi sono ortogonali tra

loro, cioè il loro prodotto scalare, definito in uno spazio di funzioni, è nullo. Si ha infatti, date due autofunzioni φ_i, φ_j corrispondenti ad autovalori distinti (reali) λ_i, λ_j :

$$\begin{aligned} \langle L\varphi_i, \varphi_j \rangle &= \lambda_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_i, L\varphi_j \rangle = \lambda_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \\ &\Downarrow \\ (\lambda_i - \lambda_j) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle &= 0, \end{aligned}$$

quindi:

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0.$$

Nel caso di autovalori multipli, cioè autovalori cui corrispondono $n > 1$ autofunzioni distinte, cioè linearmente indipendenti, tali autofunzioni (che si dicono degeneri) non risultano necessariamente ortogonali. Tuttavia è possibile, attraverso una procedura algebrica detta *ortogonalizzazione di Gram-Schmidt*, passare da tali n autofunzioni, attraverso delle combinazioni lineari (e naturalmente tali combinazioni risultano anch'esse autofunzioni associate allo stesso autovalore), a un nuovo insieme di altre n autofunzioni che invece risultino ortogonali tra loro (e poi attraverso la divisione per il loro modulo $\sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle}$ si possono anche rendere ortonormali, cioè ortogonali e di modulo unitario). In conclusione, quindi, se l'operatore è autoaggiunto è possibile trovare una base per lo spazio di funzioni, costituita da (in generale infinite) autofunzioni ortogonali.

Il vantaggio di avere una base ortogonale (rispetto ad una base costituita semplicemente da funzioni linearmente indipendenti) risiede nell'immediata possibilità di dedurre i coefficienti della combinazione lineare. Si ha infatti per una generica funzione dello spazio (ricordando che si tratta di spazi di dimensione infinita):

$$f(P) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(P).$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per $\varphi_m(P)$, si ha:

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi_m \rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n, \varphi_m \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{nm} = c_m \quad m = 1, 2, \dots, \infty, \end{aligned}$$

avendo nell'ultimo passaggio sfruttato l'ortonormalità e avendo introdotto il simbolo di Kronecker

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases} .$$

Una tale espressione dei coefficienti generalizza la formula che esprime i coefficienti di una serie di Fourier, e si parla appunto in generale di coefficienti di Fourier.

Fatte queste premesse, dimostriamo ora che il nostro operatore $-\nabla_t^2$ è autoaggiunto per condizioni al contorno imposte da pareti perfettamente conduttrici. Riprendiamo allo scopo il lemma di Green nella sua seconda forma:

$$\oint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV ,$$

ove al solito S è la superficie chiusa che racchiude il volume V , e la direzione della normale \underline{n} è esterna. Questa formula va particolarizzata al nostro spazio bidimensionale, ottenendo:

$$\oint_s \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \int_S (f \nabla_t^2 g - g \nabla_t^2 f) dS ,$$

essendo ora s una linea chiusa che racchiude la superficie aperta S , che rappresenta la sezione trasversale della guida, mentre il ∇ è sostituito dal ∇_t .

Affinché l'operatore L sia autoaggiunto deve risultare

$$\langle Lf, g \rangle - \langle f, Lg \rangle = 0 ,$$

ossia nel nostro caso:

$$\begin{aligned} \langle -\nabla_t^2 f, g \rangle - \langle f, -\nabla_t^2 g \rangle &= \int_S (-\nabla_t^2 f g^* + f \nabla_t^2 g^*) dS = \\ &= \oint_s \left(f \frac{\partial g^*}{\partial n} - g^* \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds , \end{aligned}$$

avendo applicato il lemma alle due funzioni f e g^* e ricordando che ∇_t^2 è un operatore reale.

Ora si osservi che, nella nostra trattazione delle guide d'onda perfettamente conduttrici, le funzioni f e g^* , alle quali applico l'operatore $-\nabla_t^2$, devono soddisfare le condizioni al contorno, che per i modi TE e TM erano, con riferimento ad esempio alla funzione f :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad \text{su } s \quad , \quad f = 0 \quad \text{su } s ,$$

rispettivamente. Quindi in questi due casi la circuitazione si annulla e l'operatore risulta autoaggiunto.

Questo esempio ci mostra in modo evidente che l'essere un operatore autoaggiunto o no non è una sua caratteristica intrinseca, ma dipende dalle particolari condizioni al contorno, che in realtà determinano quello che si chiama il dominio dell'operatore stesso, cioè il particolare insieme di funzioni su cui opera.

Dal fatto che allora gli autovalori $\lambda = k_t^2$ sono reali, segue che le autofunzioni T possono essere considerate reali. Infatti una generica autofunzione complessa si potrà sempre scrivere $T = T_R + jT_J$ con T_R e T_J reali. Ma allora, per il fatto che k_t^2 è reale, dall'equazione differenziale si ricava, separando parte reale e parte immaginaria:

$$\nabla_t^2 T_R + k_t^2 T_R = 0 \quad , \quad \nabla_t^2 T_J + k_t^2 T_J = 0 ,$$

e, d'altra parte, anche le condizioni al contorno per i vari tipi di modi devono valere separatamente per la parte reale e per la parte immaginaria. Dunque T_R e T_J sono separatamente autofunzioni relative allo stesso autovalore, e l'autofunzione T si può riguardare come una loro combinazione lineare.

D'altra parte se l'autofunzione è reale, e quindi ha fase costante, la variabilità della fase risiede soltanto nelle funzioni longitudinali $V(z)$ e $I(z)$, e dunque i piani $z = cost$ sono superfici equifase, sulle quali però l'ampiezza del campo in genere varia. Ne segue che i modi delle guide d'onda con pareti perfettamente conduttrici risultano onde piane non uniformi.

Si osservi infine che, nel caso di guide metalliche chiuse riempite di un unico materiale, gli autovalori k_t^2 e le autofunzioni T dipendono unicamente dalla geometria (forma e dimensioni) della sezione trasversale della guida e sono invece indipendenti dalla frequenza e dai parametri ε , μ , σ del mezzo omogeneo che riempie la guida.

Dimostriamo ora che con le suddette condizioni al contorno l'operatore $-\nabla_t^2$ risulta sostanzialmente definito positivo. Dobbiamo analizzare il segno, come già detto, della quantità:

$$\langle Lf, f \rangle = \langle -\nabla_t^2 f, f \rangle = \int_S -f^* \nabla_t^2 f \, dS .$$

Stavolta applichiamo il lemma di Green nella sua prima forma, che era, nella versione tridimensionale:

$$\oint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS = \int_V (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) \, dV .$$

Nel caso bidimensionale esso diventa:

$$\oint_s f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \int_S (\nabla_t f \cdot \nabla_t g + f \nabla_t^2 g) dS.$$

Ora noi lo applichiamo alle funzioni f^* e f , quindi:

$$\int_S -f^* \nabla_t^2 f dS = \int_S \nabla_t f^* \cdot \nabla_t f dS - \oint_s f^* \frac{\partial f}{\partial n} ds = \int_S |\nabla_t f|^2 dS,$$

in quanto l'integrale al contorno si annulla per le condizioni al contorno di pareti perfettamente conduttrici.

A questo punto si osservi che la quantità:

$$\int_S |\nabla_t f|^2 dS = \langle Lf, f \rangle$$

risulta ≥ 0 . Bisogna ora analizzare il caso in cui si annulla. Questo accade se e solo se $\nabla_t f \equiv 0$ su S , cioè $f = \text{cost}$ in S . Allora nel caso dei modi TM, siccome risulta $f = 0$ su s , deve anche essere, per la continuità di f , $f \equiv 0$ su S e dunque l'operatore è definito positivo. Invece nel caso dei modi TE, dall'essere:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad \text{su } s,$$

non segue necessariamente $f \equiv 0$ su S e pertanto l'operatore risulta semidefinito positivo. La soluzione $T = \text{cost}$ su S è un'autofunzione associata all'autovalore $k_t^2 = 0$, come si vede dalla

$$\lambda = \frac{\langle L\varphi, \varphi \rangle}{\langle \varphi, \varphi \rangle}.$$

Tale soluzione però dà luogo a un campo elettromagnetico identicamente nullo, in quanto nelle espressioni delle componenti del campo trasverso appare $\nabla_t h_z \equiv 0$. Quindi si potrebbe ridefinire il dominio dell'operatore in modo da escludere le soluzioni costanti e su tale nuovo dominio l'operatore è definito positivo.

Segue allora come conseguenza che gli autovalori $\lambda = k_t^2$ sono reali positivi, e questo a conferma della loro espressione formalmente quadratica.

Dopo aver esaminato il problema trasversale di autovalori, vediamo ora le caratteristiche della propagazione nella direzione longitudinale z . Supponiamo che il mezzo che occupa la regione interna della guida sia non dispersivo e non dissipativo. In

tal caso dalla condizione di separabilità si ricava:

$$k_z^2 = k^2 - k_t^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2,$$

quantità che risulta reale, per cui:

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2}$$

sarà o puramente reale se $\omega^2 \mu \varepsilon > k_t^2$, o puramente immaginario se $\omega^2 \mu \varepsilon < k_t^2$. Il primo caso corrisponde ad una propagazione del modo senza attenuazione lungo z , con dipendenza del tipo $e^{-j\beta_z z}$. Il secondo caso corrisponde ad un'attenuazione esponenziale del campo lungo z senza propagazione, cioè senza variazione di fase, quindi con dipendenza del tipo $e^{-\alpha_z z}$. I due casi sono separati da un particolare valore di ω , detto ω_c (pulsazione detta di *cut-off* o *taglio*), tale che:

$$\omega_c^2 \mu \varepsilon = k_t^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{k_t}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = k_t v.$$

Per $\omega = \omega_c$ si ha $k_z = 0$. Si parla anche di *frequenza di taglio*:

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi},$$

e di *lunghezza d'onda di taglio*:

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_t}.$$

Si noti che ogni modo ha il suo autovalore k_t^2 e quindi la sua frequenza di taglio. Anche se potrà capitare che due autofunzioni (degeneri) abbiano lo stesso autovalore e quindi i modi (degeneri) corrispondenti abbiano la stessa frequenza di taglio.

Dunque per $\omega > \omega_c$ si ha propagazione senza attenuazione, mentre per $\omega < \omega_c$ si ha attenuazione senza propagazione. La guida d'onda si comporta quindi come un filtro passa alto. Il modo con l'autovalore più basso, e quindi con la più bassa frequenza di taglio, si chiama il modo *dominante* o *fondamentale*, gli altri si chiamano modi di ordine superiore o modi superiori. Per comprendere la ragione di tale denominazione, supponiamo di far operare la guida in una banda di frequenze compresa fra la frequenza di taglio del dominante e la frequenza di taglio successiva più piccola (quella del primo modo di ordine superiore). È chiaro che in tale banda il dominante si propagherà senza attenuarsi, mentre tutti i modi superiori si attenuer-

anno senza propagarsi. Se allora in ingresso con un generatore eccitiamo nella guida d'onda un campo generico (che si potrà sempre esprimere con uno sviluppo in serie dell'insieme completo dei modi), a una certa distanza dalla sezione di eccitazione il campo elettromagnetico sarà in pratica rappresentato dal solo termine associato al modo dominante. Se inoltre la struttura cilindrica della guida d'onda è disturbata dalla presenza di un ostacolo (discontinuità, curve), in vicinanza di tale ostacolo saranno in generale di nuovo presenti anche tutti gli infiniti modi superiori attenuati, ma a una certa distanza essi potranno di nuovo essere trascurati.

Dunque alla nostra guida d'onda potremo associare un'unica linea di trasmissione, quella corrispondente al solo modo dominante, mentre l'effetto della discontinuità sarà "concentrato" nelle vicinanze della discontinuità stessa e quindi rappresentabile, nel circuito equivalente, come un componente concentrato, cioè un'impedenza (o un'ammettenza) che in assenza di perdite risulterà puramente immaginaria, ossia di tipo reattivo, e che terrà conto appunto della potenza reattiva di tutti i modi attenuati, concentrata in prossimità dell'ostacolo.

Si osservi poi che se la struttura guidante supporta un modo TEM, esso è certamente il modo dominante, perché per esso si ha $k_t^2 = 0$ e quindi $f_c = 0$. Il campo può dunque in tali strutture propagarsi a frequenze arbitrariamente basse, fino alla continua, quindi anche in situazioni pressoché statiche.

In una guida d'onda si definiscono una *lunghezza d'onda in guida*:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z},$$

e una *velocità di fase in guida*:

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z}.$$

Tali grandezze sono legate a quelle dello spazio libero (riempito dello stesso mezzo che riempie la guida) dalle seguenti relazioni:

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - k_t^2}} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \frac{k_t^2}{\omega^2 \mu \epsilon}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}},$$

$$v_z = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}.$$

Si osservi che per $f > f_c$, cioè in propagazione, risulta $\lambda_z > \lambda$ e $v_z > v$ (onda veloce).

Infine la velocità di gruppo in guida è espressa dalla:

$$v_{gz} = \frac{1}{\frac{d\beta_z}{d\omega}}.$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{d\beta_z}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2} = \frac{\omega \mu \varepsilon}{\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2}} = \frac{\mu \varepsilon}{\sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} = \frac{1}{v \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}},$$

quindi:

$$v_{gz} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2},$$

in propagazione si ha $v_{gz} < v$, come doveva essere.

Se ora supponiamo che il mezzo che riempie la guida sia sempre non dispersivo (ε e μ reali), ma dissipativo ($\sigma \neq 0$), la costante di propagazione k_z sarà certamente complessa e si avrà:

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_c - k_t^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \sigma - k_t^2 = (\omega^2 \mu \varepsilon - k_t^2) - j\omega \mu \sigma.$$

Si vede che per $f > f_c$ il numero complesso k_z^2 appartiene al IV quadrante del piano complesso, mentre per $f < f_c$ appartiene al III. Se estraiamo la radice quadrata con la solita determinazione $k_{zR} > 0$, risulta che in entrambi i casi k_z appartiene al IV quadrante. Dunque si può sempre porre $k_z = \beta_z - j\alpha_z$ con β_z e α_z positivi. Risulta inoltre, per $f > f_c$, $\beta_z > \alpha_z$, mentre per $f < f_c$ prevale come è ragionevole l'attenuazione, cioè $\alpha_z > \beta_z$. Alla condizione di cut-off (che però ora non corrisponde più a un taglio netto) si ha $k_z^2 = -j\omega \mu \sigma$, dunque k_z si trova sulla bisettrice del II e IV quadrante ($\beta_z = \alpha_z$).

4.4 Guida d'onda rettangolare

Come primo esempio semplice di particolari guide d'onda, consideriamo la guida rettangolare, di dimensioni interne a , b . In questo caso, per l'imposizione agevole delle condizioni al contorno, conviene lavorare in coordinate cartesiane xy , sistema di riferimento in cui fra l'altro l'equazione differenziale è più facile da risolvere. Si ha dunque:

$$T(q_1, q_2) = T(x, y),$$

e l'equazione di Helmholtz bidimensionale diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_t^2 T = 0.$$

Utilizziamo, come metodo risolutivo, quello già impiegato per le onde piane: la separazione delle variabili. Si assume quindi:

$$T(x, y) = X(x) Y(y),$$

e sostituendo nell'equazione otteniamo:

$$Y(y) \frac{d^2 X}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_t^2 X(x) Y(y) = 0.$$

Dividendo i tre addendi per la funzione evidentemente non identicamente nulla $X(x) Y(y)$ si ottiene:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_t^2 = 0.$$

Come si vede, con questi passaggi abbiamo ottenuto un primo addendo dipendente dalla sola x , un secondo addendo dipendente dalla sola y e un terzo indipendente da entrambe. Se allora deriviamo l'equazione rispetto a x e a y , si ha:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} \right] = 0,$$

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} \right] = 0,$$

da cui:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{cost} = -k_x^2 \Rightarrow \frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0,$$

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{cost} = -k_y^2 \Rightarrow \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0,$$

essendo le costanti in generale complesse. Tali costanti non possono al solito essere completamente arbitrarie, dovendo valere la condizione di separabilità:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_t^2.$$

In particolare le costanti suddette non possono essere entrambe nulle, altrimenti

risulterebbe $k_t^2 = 0$ e quindi si avrebbe un modo TEM che non può esistere essendo la sezione semplicemente connessa.

La prima equazione ammette per $k_x \neq 0$ l'integrale generale (scritto opportunamente in forma di onde stazionarie, essendo la struttura limitata):

$$X(x) = C_1 \sin(k_x x) + C_2 \cos(k_x x).$$

Analogamente si avrà per $k_y \neq 0$:

$$Y(y) = D_1 \sin(k_y y) + D_2 \cos(k_y y).$$

Se invece $k_x = 0$ si ottiene $X(x) = C_1 x + C_2$ e analogamente se $k_y = 0$ si ha $Y(y) = D_1 y + D_2$.

Andiamo ora a imporre le condizioni al contorno in presenza di pareti perfettamente conduttrici, cominciando dal caso TM, per il quale si ha la condizione $T = 0$ su s . Dai quattro lati $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ seguono le quattro condizioni $X(0) = 0$, $X(a) = 0$, $Y(0) = 0$, $Y(b) = 0$. Dalla prima, se $k_x \neq 0$ segue:

$$C_2 = 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \sin(k_x x).$$

Imponendo la seconda condizione si ha:

$$\begin{aligned} C_1 \sin(k_x a) = 0 &\Rightarrow k_x a = m\pi, \\ \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} & \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Nel caso $k_x = 0$ si ha invece, dalla prima condizione, $C_2 = 0$ e poi dalla seconda $C_1 a = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ ottenendo quindi la soluzione banale identicamente nulla. Si procede in modo analogo per la terza e la quarta condizione.

Abbiamo dunque trovato per i modi TM le espressioni:

$$X(x) = C_1 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$Y(y) = D_1 \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

In definitiva per i modi TM si ottiene l'autofunzione:

$$T(x, y) = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad ,$$

associata all'autovalore:

$$k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 .$$

Si noti che gli autovalori risultano reali positivi, come dimostrato in generale per guide metalliche. La costante arbitraria residua C , tipica dei problemi omogenei, si può determinare con una opportuna condizione di normalizzazione.

La generica soluzione modale è dunque individuata dalla coppia di indici m, n , e si parla di modo TM_{mn} . Passiamo ora a imporre le condizioni al contorno per i modi TE. Sul lato $x = 0$ si deve avere:

$$-\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0;$$

sul lato $x = a$ si ha:

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=a} = 0;$$

sul lato $y = 0$ si ha:

$$-\left.\frac{dY}{dy}\right|_{y=0} = 0;$$

e infine sul lato $y = b$ si ha:

$$\left.\frac{dY}{dy}\right|_{y=b} = 0 .$$

Se $k_x \neq 0$ si ottiene:

$$\frac{dX}{dx} = C_1 k_x \cos(k_x x) - C_2 k_x \sin(k_x x) .$$

Dalla prima condizione si trae:

$$C_1 k_x = 0 \Rightarrow C_1 = 0 ,$$

essendo appunto per ipotesi $k_x \neq 0$. A questo punto dalla seconda condizione ottengo:

$$-C_2 k_x \sin(k_x a) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow X(x) = C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) .$$

Nel caso invece $k_x = 0$ si ha:

$$\frac{dX}{dx} = C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow X(x) = C_2.$$

Si osserva a questo punto che tale soluzione può essere conglobata nella:

$$X(x) = C_2 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right),$$

ammettendo anche il valore $m = 0$.

In modo analogo, imponendo le condizioni al contorno riguardanti la $Y(y)$, otteniamo:

$$Y(y) = D_2 \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Si osservi però che, come già visto, dovendo essere $k_x^2 + k_y^2 = k_t^2 \neq 0$, k_x e k_y non possono essere entrambi nulli, quindi m , n non possono essere entrambi nulli.

L'autofunzione risulta:

$$T(x, y) = C \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

associata all'autovalore:

$$k_{t[mn]}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

corrispondente al numero d'onda longitudinale:

$$k_{z[mn]} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Anche qui il modo è caratterizzato da due indici e si scrive TE_{mn} . Si nota che gli autovalori dei modi TM e TE hanno la stessa espressione, dunque il modo TM_{mn} e il TE_{mn} hanno lo stesso autovalore, sono cioè degeneri.

Si può dimostrare che per una guida avente sezione trasversale qualsiasi, purché limitata, gli autovalori per entrambi i tipi di modi formano insiemi numerabili illimitati superiormente. Considerando ora i modi TE_{m0} si ha:

$$k_{t[m0]}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow k_{t[m0]} = \frac{m\pi}{a}.$$

L'intervallo fra questo k_t e il successivo $\frac{(m+1)\pi}{a}$ è pari a π/a , diminuisce quindi all'au-

mentare di a . In sostanza per $a \rightarrow \infty$ si tende alla cosiddetta guida a piatti metallici paralleli e gli autovalori si trasformano da un'infinità numerabile in un'infinità continua. Si può dimostrare inoltre che per una guida con sezione trasversale qualsiasi, purché limitata e semplicemente connessa, il modo dominante è sempre un TE.

Per i modi TM l'autovalore più piccolo è quello del TM_{11} , pari a:

$$k_{t[11]}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2.$$

Invece per i modi TE l'autovalore più piccolo corrisponde o al TE_{01} o al TE_{10} . In particolare se $a > b$ (come in genere si assume) il modo dominante è il TE_{10} con autovalore

$$k_{t[10]}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2,$$

e numero d'onda longitudinale:

$$k_{z[10]} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

Nel caso di dielettrico privo di perdite la pulsazione di taglio è:

$$\omega_{c[10]} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}};$$

la frequenza di taglio:

$$f_{c[10]} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{v}{2a};$$

e la lunghezza d'onda di taglio è $\lambda_{c[10]} = 2a$. La condizione di propagazione $f > f_{c[10]}$ si può allora anche scrivere $\lambda < \lambda_{c[10]}$ e cioè $\lambda < 2a \Rightarrow a > \frac{\lambda}{2}$. In sostanza, cioè, una guida troppo stretta non contiene nessun modo e più la guida è larga, più modi contiene (da questo punto di vista, aumentare le dimensioni ha lo stesso effetto che aumentare la frequenza).

L'autofunzione del modo dominante è:

$$T(x, y) = T(x) = C \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) = h_z(x),$$

da cui segue:

$$\nabla_t h_z = \underline{x}_o \frac{dh_z}{dx} = -\underline{x}_o C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad \propto \quad \underline{h}_t = h_x \underline{x}_o,$$

$$\nabla_t h_z \times \underline{z}_o = \underline{y}_o C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \propto \underline{e}_t = e_y \underline{y}_o.$$

Si è dunque determinata la configurazione dei campi nella sezione della guida. Si

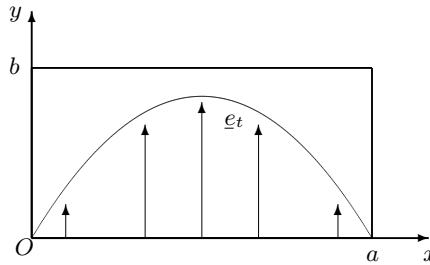


Figura 4.2: Configurazione trasversale del campo elettrico in guida d'onda rettangolare nel modo TE₁₀.

osservi che tali sagome sono le stesse al variare della frequenza, quindi anche sotto cutoff.

Si può infine facilmente dimostrare che lungo z la propagazione del modo TE₁₀ equivale a quella di due onde piane uniformi che viaggiano obliquamente all'interno della guida con vettore d'onda \underline{k} giacente sul piano orizzontale zx (essendo $k_y = 0$) e formante un angolo θ con l'asse x , avendosi quindi $k_x = k_t = \frac{\pi}{a} = k \cos \theta$, $k_z = k \sin \theta$. Tali onde sono totalmente riflesse dalle pareti metalliche verticali per $x = 0$ e $x = a$ e si trasformano l'una nell'altra. L'angolo di incidenza θ è dato dalla:

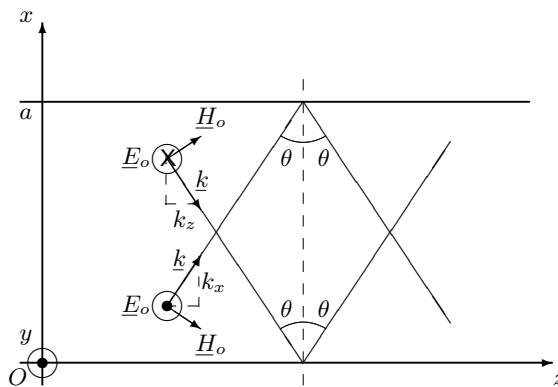


Figura 4.3: Sviluppo in onde piane del modo TE₁₀ in guida rettangolare.

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{k_z}{k_x} = \frac{\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}}{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\left(\frac{f}{f_c}\right)^2 - 1} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{f 2a}{v}\right)^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 - 1}, \end{aligned}$$

dipende dalla frequenza e dalla larghezza a della guida. Dunque al crescere della

frequenza o al crescere della larghezza cresce l'angolo θ (la tangente è una funzione monotona crescente) e per $f \rightarrow \infty$ si ha $\theta \rightarrow \pi/2$ cioè si tende alla cosiddetta incidenza radente, in direzione assiale, come se l'onda si propagasse nello spazio libero ($k_x = \frac{\pi}{a} \ll k_z$, $k_z \rightarrow k$), si tende cioè a una pura onda progressiva lungo z . Invece per $f = f_c$, cioè al cutoff, si ha $\theta = 0$, e cioè $k_x = k$ e $k_z = 0$, dunque non più propagazione lungo z , ma una pura onda stazionaria lungo x . Nei casi intermedi si avrà invece un'onda progressiva lungo z e una stazionaria lungo x .

Queste considerazioni potrebbero essere estese a tutti i modi TM e TE che si propagano in guida d'onda rettangolare ed evidenziano come gli angoli di propagazione delle onde piane equivalenti all'interno delle guide non possono essere arbitrari, ma costituiscono un insieme discreto, avendo ogni modo il suo angolo, corrispondente al suo autovalore.

4.5 Guide d'onda a sezione circolare

Passiamo ora a considerare due strutture a geometria (cilindrica) circolare, la guida d'onda circolare e il cavo coassiale. Conviene in questo caso, per imporre meglio le condizioni al contorno che sono su circonferenze, lavorare in coordinate polari $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, per cui $T(q_1, q_2) = T(\rho, \varphi)$. Si noti che le considerazioni che seguiranno, fino all'imposizione esplicita delle condizioni al contorno, sono valide anche in strutture dielettriche, come le fibre ottiche, costituite da un nucleo centrale (*core*) e da un mantello circostante (*cladding*).

Ci occorre per cominciare l'espressione del Laplaciano trasverso in coordinate polari, che è la seguente:

$$\nabla_t^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

L'equazione differenziale di Helmholtz è dunque:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + k_t^2 T = 0.$$

Ancora una volta applichiamo il metodo della separazione delle variabili, cercando soluzioni del tipo $T(\rho, \varphi) = P(\rho) \phi(\varphi)$. Si ha quindi, inserendo nell'equazione:

$$\frac{\phi}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} + k_t^2 P \phi = 0.$$

Moltiplicando ambo i membri per la quantità $\frac{\rho^2}{P\phi}$, di cui né il numeratore né il denominatore possono essere identicamente nulli, si ottiene:

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + k_t^2 \rho^2 = 0,$$

ove il primo e il terzo addendo dipendono solo dalla variabile ρ , mentre il secondo dipende solo dalla variabile φ . Derivando allora rispetto a φ si ottiene:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = \text{cost} = -k_\varphi^2 \Rightarrow \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} + k_\varphi^2 \phi = 0.$$

Come al solito, se $k_\varphi \neq 0$, si ha l'integrale generale $\phi(\varphi) = C_1 \sin(k_\varphi\varphi) + C_2 \cos(k_\varphi\varphi)$. Se invece $k_\varphi = 0$ si ha $\phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2$. A questo punto si osservi che la funzione $\phi(\varphi)$ deve essere periodica di periodo 2π per il significato geometrico della variabile φ (incrementandola di 2π si perviene allo stesso punto del piano). Questo implica che se $k_\varphi = 0$ segue necessariamente $C_1 = 0$ e $\phi(\varphi) = C_2$. Invece se $k_\varphi \neq 0$ il periodo delle funzioni sinusoidali, ossia $\frac{2\pi}{k_\varphi}$, dev'essere 2π oppure un sottomultiplo di 2π , per cui dev'essere $k_\varphi = n = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \phi(\varphi) = C_1 \sin(n\varphi) + C_2 \cos(n\varphi)$. Se permettiamo a n di assumere anche il valore zero, segue che $\phi(\varphi) = C_2$ e quindi possiamo conglobare la soluzione per $k_\varphi = 0$ (si tratta dei modi indipendenti da φ , che si potrebbe vedere hanno interessanti proprietà in termini di perdite in guida, per pareti non perfettamente conduttrici).

A questo punto torniamo all'equazione differenziale e inseriamo la costante $-n^2$ al posto del secondo addendo:

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) - n^2 + k_t^2 \rho^2 = 0.$$

Moltiplichiamo per $P(\rho)$ ed eseguiamo la derivata:

$$\Rightarrow \rho \frac{dP}{d\rho} + \rho^2 \frac{d^2P}{d\rho^2} + (k_t^2 \rho^2 - n^2) P = 0.$$

Nell'ipotesi $k_t^2 \neq 0$ (quindi non consideriamo il modo TEM che può esistere nel cavo coassiale, ma non nella guida circolare, e che sarà trattato a parte) facciamo la posizione $\xi = k_t \rho \Rightarrow \rho = \xi/k_t$:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{d\xi} \frac{d\xi}{d\rho} = k_t \frac{dP}{d\xi},$$

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{dP}{d\rho} \right) = \frac{d}{d\rho} \left(k_t \frac{dP}{d\xi} \right) = k_t \frac{d}{d\xi} \left(k_t \frac{dP}{d\xi} \right) = k_t^2 \frac{d^2 P}{d\xi^2}.$$

Operando le sostituzioni nell'equazione si ricava:

$$\xi \frac{dP}{d\xi} + \xi^2 \frac{d^2 P}{d\xi^2} + (\xi^2 - n^2) P = 0,$$

che dividendo per ξ^2 diventa:

$$\frac{d^2 P}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dP}{d\xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2} \right) P = 0.$$

Questa nota equazione differenziale a coefficienti variabili si chiama equazione di Bessel di ordine n ($n = 0, 1, 2, \dots$). Come ogni equazione differenziale del secondo ordine, il suo integrale generale è esprimibile come una combinazione lineare di due integrali particolari indipendenti: una possibilità è rappresentata dalle cosiddette funzioni di Bessel di ordine n di prima specie $J_n(\xi)$ e di seconda specie $Y_n(\xi)$. Si ha quindi

$$P(\rho) = D_1 J_n(k_t \rho) + D_2 Y_n(k_t \rho).$$

Nelle figure seguenti sono riportati gli andamenti delle funzioni di Bessel (ricordano asintoticamente, cioè per grandi valori dell'argomento, delle funzioni sinusoidali smorzate: e infatti sono le soluzioni a onda stazionaria dell'equazione di Helmholtz in coordinate cilindriche):

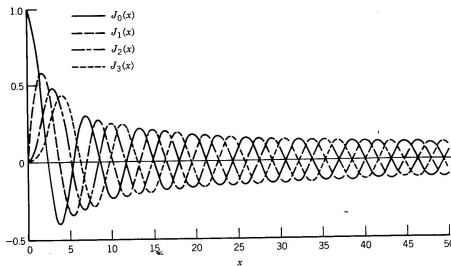


Figura 4.4: Funzioni J_n di Bessel.

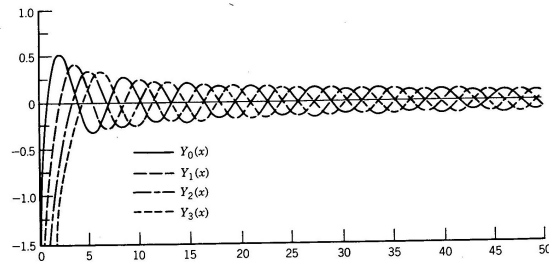


Figura 4.5: Funzioni Y_n di Bessel.

Osserviamo a questo punto che la guida circolare include nella sezione l'origine $\rho = 0$. Ma nell'origine tutte le $Y_n(k_t \rho)$ divergono, e siccome i valori della funzione T sono da supporre limitati in ogni punto della sezione per ragioni fisiche, dovremo porre per la guida circolare $D_2 = 0 \Rightarrow P(\rho) = D_1 J_n(k_t \rho)$. Nel caso del cavo coassiale metallico, invece, l'origine non fa parte del dominio di interesse, quindi compaiono entrambe le funzioni. Le medesime osservazioni valgono rispettivamente per il nucleo

e il mantello della fibra ottica.

4.5.1 Modi TE e TM in guide d'onda circolari metalliche

Imponiamo le condizioni al contorno per la guida circolare metallica di raggio a . Per i modi TM deve risultare $T = 0$ su s :

$$\phi(\varphi)P(a) = 0 \Rightarrow P(a) = 0 \Rightarrow J_n(k_t a) = 0.$$

Occorre quindi conoscere le radici della funzione di Bessel $J_n(\xi)$, che sono un'infinità discreta e che indicheremo con ξ_{nm} con $n = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow k_{t_{nm}}^2 = \left(\frac{\xi_{nm}}{a}\right)^2$.

Nel caso dei modi TE, la condizione $\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial \rho} = 0$ per $\rho = a \Rightarrow \frac{dP}{d\rho}\bigg|_{\rho=a} = D_1 k_t J'_n(k_t a) = 0 \Rightarrow J'_n(k_t a) = 0$ porta a cercare gli zeri della derivata $J'_n(\xi)$ (si noti che in genere nella letteratura sulle funzioni di Bessel l'apice indica la derivata rispetto all'intero argomento).

$$\Rightarrow k_{t_{nm}}^2 = \left(\frac{\xi'_{nm}}{a}\right)^2,$$

avendo indicato con ξ'_{nm} tali zeri. Il modo fondamentale, cui corrisponde l'autovalore più piccolo, risulta in questo caso il TE_{11} .

Nel caso del cavo coassiale metallico (di raggi interno a ed esterno b) e per i modi TM si deve avere $P(a) = 0$ e $P(b) = 0$, e dunque:

$$\begin{cases} D_1 J_n(k_t a) + D_2 Y_n(k_t a) = 0 \\ D_1 J_n(k_t b) + D_2 Y_n(k_t b) = 0 \end{cases}.$$

Si tratta di un sistema lineare omogeneo nelle due incognite D_1, D_2 , che come tale ammette autosoluzioni, cioè soluzioni diverse da quella banale $D_1 = D_2 = 0$, se e solo se è nullo il determinante dei coefficienti, ossia se

$$J_n(k_t a) Y_n(k_t b) - Y_n(k_t a) J_n(k_t b) = 0.$$

Questa procedura è di applicabilità molto generale e l'equazione ottenuta si chiama equazione caratteristica della struttura, o equazione di dispersione (perché consente di ricavare gli autovalori, e da questi il $k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2}$ in funzione della frequenza). I casi precedenti erano molto semplici, in realtà in genere per ottenere gli autoval-

ori occorre risolvere numericamente un'equazione trascendente come quella appena scritta. In modo analogo si procede per i TE, in questo caso sono coinvolte le *derivate* delle J_n e delle Y_n .

Modo TEM per il cavo coassiale metallico

Vediamo invece a parte per il cavo coassiale il caso del modo TEM, caso in cui la dipendenza funzionale è del tutto diversa. In questo caso l'equazione è quella di Laplace trasversa, in coordinate polari, ossia dopo aver separato le dipendenze:

$$\frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\phi} \frac{d^2\phi}{d\varphi^2} = 0.$$

La condizione al contorno era $\frac{\partial T}{\partial s} = 0$ su s , ove sulla circonferenza interna ed esterna $ds = a d\varphi$ oppure $ds = b d\varphi$, rispettivamente

$$\Rightarrow \frac{P(a)}{a} \frac{d\phi}{d\varphi} = 0 \quad \frac{P(b)}{b} \frac{d\phi}{d\varphi} = 0.$$

Le precedenti equazioni potrebbero essere soddisfatte se $P(a) = P(b) = 0$, ma questo significherebbe $T = 0$ su tutto il contorno, mentre un modo TEM si può propagare solo se T ha valori (costanti) diversi sui due contorni. Per cui o $P(a)$ o $P(b)$ devono essere non nulli e quindi dovrà essere $\frac{d\phi}{d\varphi} \equiv 0$, $\phi(\varphi) = C_2$, e l'equazione differenziale diventa:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{P} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) &= 0, \\ \Rightarrow \rho \frac{dP}{d\rho} &= \text{cost} = D \Rightarrow \frac{dP}{d\rho} = \frac{D}{\rho}, \\ \Rightarrow \frac{dT}{d\rho} &= C_2 \frac{D}{\rho} = \frac{C}{\rho}, \end{aligned}$$

(la funzione $T(\rho)$ è dunque un logaritmo naturale).

Ricordiamo a questo punto l'espressione del gradiente trasverso in coordinate polari:

$$\nabla_t = \underline{\rho}_o \frac{\partial}{\partial \rho} + \underline{\varphi}_o \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

che diventa nel nostro caso $\nabla_t = \underline{\rho}_o \frac{d}{d\rho}$, per cui si ha:

$$\nabla_t T = \underline{\rho}_o \frac{C}{\rho} \quad \propto \quad \underline{e}_t,$$

$$\nabla_t T \times z_o = -\frac{C}{\rho} \underline{\varphi}_o \propto \underline{h}_t.$$

Dunque il campo elettrico nella sezione del cavo è puramente radiale, e la sua ampiezza decresce in modo inversamente proporzionale alla distanza dal centro: è lo stesso andamento del campo elettrostatico in un condensatore cilindrico indefinito. Il campo magnetico invece è puramente circonferenziale e anche la sua ampiezza è inversamente proporzionale alla distanza dal centro: è lo stesso andamento di quello del campo magnetostatico nella regione compresa tra due conduttori cilindrici coassiali percorsi da correnti costanti opposte.

4.6 Risonatori a cavità

Parliamo ora brevemente dei campi che possono esistere, in assenza di sorgenti, in regioni chiuse, limitate da pareti perfettamente conduttrici (metalliche) e riempite da un mezzo omogeneo, isotropo e non dispersivo, ma che può essere dissipativo. Tali regioni si dicono risonatori a cavità (si noti che esistono anche risonatori dielettrici aperti, c'è lo stesso rapporto che fra guide metalliche chiuse e guide dielettriche aperte). I campi elettromagnetici soluzione, soddisfacenti le condizioni al contorno, costituiscono le oscillazioni libere del sistema e vengono chiamati modi risonanti o di oscillazione della cavità.

Da un punto di vista matematico avremo ancora un problema di autovalori, stavolta tridimensionale, rappresentato dall'equazione di Helmholtz (per esempio per il campo elettrico) $\nabla^2 \underline{E} + k^2 \underline{E} = 0 \Rightarrow -\nabla^2 \underline{E} = k^2 \underline{E}$. Stavolta, si badi bene, $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon_c = \omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma$ è considerato un autovalore da determinare, e non una quantità assegnata, come nelle guide d'onda. Infatti ora l'incognita del problema è la frequenza, mentre nel caso delle guide era il k_z .

Si osservi che, essendo le pareti perfettamente conduttrici, risulta assegnata (e nulla) la componente tangenziale del campo elettrico su tutta la superficie S del risonatore. Tuttavia il teorema di unicità non valeva (e quindi potevano esistere anche altre soluzioni, oltre a quella banale identicamente nulla), in due situazioni:

1. quando il mezzo è non dissipativo e la frequenza assume appunto certi particolari valori, che risultano soluzioni della

$$\int_V (w_H - w_E) dV = 0;$$

2. quando il mezzo è dissipativo, per certi valori complessi di ω .

Si dimostra che l'operatore $-\nabla^2$ è autoaggiunto e semidefinito positivo (l'autovalore nullo corrisponde a soluzioni statiche, $\omega = 0$). Gli autovalori anche qui risultano un'infinità di tipo numerabile (caratteristica delle regioni chiuse), cui corrisponde un'infinità discreta di modi di oscillazione, ognuno con la sua frequenza di risonanza, anche se ci possono sempre essere modi diversi ma degeneri, cioè con la stessa frequenza di risonanza.

Nel caso non dissipativo si ha semplicemente $\omega = k/\sqrt{\mu\varepsilon}$; nel caso dissipativo, noto il k^2 , che è sempre reale, visto che l'operatore è autoaggiunto, ricavo la ω complessa $\omega_R + j\omega_j$ dalla $\omega^2\mu\varepsilon - j\omega\mu\sigma - k^2 = 0$:

$$\Rightarrow \omega^2 - j\frac{\sigma}{\varepsilon}\omega - \frac{k^2}{\mu\varepsilon} = 0,$$

$$\omega = \frac{j\frac{\sigma}{\varepsilon} \pm \sqrt{-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} + 4\frac{k^2}{\mu\varepsilon}}}{2} = j\frac{\sigma}{2\varepsilon} \pm \sqrt{-\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2} + \frac{k^2}{\mu\varepsilon}}.$$

In genere risulta per i valori di interesse pratico:

$$\frac{k^2}{\mu\varepsilon} \gg \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2} \Rightarrow \omega_R = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\varepsilon} - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}} \rightarrow e^{j\omega_R t},$$

$$\omega_j = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \rightarrow e^{-\omega_j t};$$

quest'ultimo termine rappresenta lo smorzamento delle oscillazioni conseguente alla dissipazione di potenza.

In presenza di oscillazioni smorzate, si suole introdurre un parametro adimensionale, il fattore di merito o di qualità, definito da:

$$Q = \frac{\omega_R}{2\omega_j} = \frac{\omega_R\varepsilon}{\sigma},$$

e si ha $Q \rightarrow \infty$ per $\sigma \rightarrow 0$. Si noti che la definizione appena vista del Q è generale, vale anche cioè quando le perdite che portano a una pulsazione complessa sono di altro tipo, ossia dovute alla conducibilità finita delle pareti (in questo caso cambiano le condizioni al contorno sulle pareti stesse e in generale k^2 non risulta più reale), oppure dovute ad aperture praticate nelle pareti (perdite per radiazione, le quali poi esisteranno sicuramente nel caso di risonatori dielettrici aperti). In questo caso

l'espressione di ω_j è più complicata e richiede la determinazione del flusso del vettore di Poynting attraverso le pareti (potenza dissipata nelle pareti stesse o irradiata attraverso le aperture).

Per ω complessa l'espressione del teorema di Poynting nel dominio della frequenza assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_S \underline{n} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS + \frac{1}{2} \int_V \underline{J}_c^* \cdot \underline{E} dV + j \frac{1}{2} \int_V (\omega \underline{B} \cdot \underline{H}^* - \omega^* \underline{E} \cdot \underline{D}^*) dV = \\ = -\frac{1}{2} \int_V (\underline{J}_i^* \cdot \underline{E} + \underline{J}_{mi} \cdot \underline{H}^*) dV. \end{aligned}$$

Nel caso di una cavità dissipativa omogenea isotropa e non dispersiva, e nell'ipotesi di assenza di correnti elettriche e magnetiche impresse, si ha prendendo la parte reale:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\oint_S \frac{1}{2} \underline{n} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS \right] + \int_V \frac{1}{2} \sigma \underline{E} \cdot \underline{E}^* dV - 2\omega_j \int_V \frac{1}{4} (\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^*) dV = 0, \\ \Rightarrow 2\omega_j = \frac{\text{Re} \left[\oint_S \frac{1}{2} \underline{n} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}^*) dS \right] + \int_V \frac{1}{2} \sigma \underline{E} \cdot \underline{E}^* dV}{\int_V \frac{1}{4} (\mu \underline{H} \cdot \underline{H}^* + \varepsilon \underline{E} \cdot \underline{E}^*) dV}. \end{aligned}$$

Se $\omega_j \ll \omega_R$ il termine in parentesi quadra rappresenta la potenza media che fluisce nello pseudoperiodo (si tratta infatti di un fenomeno smorzato, quindi non esattamente periodico) $T = \frac{2\pi}{\omega_R}$ (per $t = 0$) attraverso le pareti della cavità (tale potenza è dissipata nelle pareti non perfettamente conduttrici o irradiata attraverso le aperture). Il secondo termine a numeratore rappresenta la potenza media dissipata nel mezzo (non dielettrico perfetto) che riempie la cavità. Dunque complessivamente a numeratore è rappresentata la potenza media P perduta dal risonatore. A denominatore c'è invece l'energia media (magnetica ed elettrica) W immagazzinata nel risonatore. Si ha dunque:

$$2\omega_j = \frac{P}{W} \Rightarrow Q = \frac{\omega_R W}{P}.$$

Si noti che entrambe le grandezze W e P variano nel tempo con legge $e^{-2\omega_j t}$.

4.6.1 Risonatore cilindrico

Consideriamo ora un caso particolarmente semplice di risonatore, il cosiddetto risonatore cilindrico, ottenuto chiudendo un tratto di guida d'onda metallica di lunghezza l con

due piatti metallici trasversi.

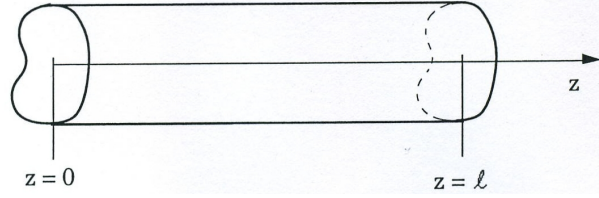


Figura 4.6: Risonatore cilindrico.

La semplicità del problema sta nel fatto che posso utilizzare i risultati per il problema in guida, supponendo di averlo già risolto. Infatti i modi di oscillazione del risonatore cilindrico si possono ottenere a partire dai modi di propagazione in guida, imponendo le ulteriori condizioni al contorno richieste dalla presenza dei due piatti trasversi: $\underline{E}_t = 0$ per $z = 0$ e $z = l$.

Se si considerano i modi TM in guida, si aveva:

$$E_z(q_1, q_2, z) = e_z(q_1, q_2) I(z),$$

da cui si ricava poi:

$$\underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2) V(z) \propto \underline{e}_t \frac{dI}{dz}.$$

Devo dunque imporre $\frac{dI}{dz} = 0$ per $z = 0$ e $z = l$, ove:

$$I(z) = I_o^+ e^{-jk_z z} + I_o^- e^{jk_z z}$$

per $k_z \neq 0$, mentre:

$$I(z) = I_{01} z + I_{02}$$

per $k_z = 0$. Per cui se $k_z \neq 0$ si ha:

$$\frac{dI}{dz} = jk_z (-I_o^+ e^{-jk_z z} + I_o^- e^{jk_z z}) = 0$$

per $z = 0, l$. Se $k_z = 0$ si ha invece:

$$\frac{dI}{dz} = I_{01} = 0 \Rightarrow I(z) = I_{02}.$$

Nel primo caso ricavo, per $z = 0$, $I_o^- = I_o^+$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dz} = jk_z I_o^+ 2j \sin(k_z z),$$

e dunque per $z = l$ si ha $-2k_z I_o^+ \sin(k_z l) = 0$:

$$\Rightarrow k_z = \frac{p\pi}{l} \quad p = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\Rightarrow I(z) = 2I_o^+ \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Permettendo all'indice p di assumere anche il valore nullo, si congloba il caso $k_z = 0$.

Nel caso dei modi TE si ha invece:

$$H_z(q_1, q_2, z) = h_z(q_1, q_2) V(z),$$

da cui si ricava poi:

$$\underline{E}_t(q_1, q_2, z) = \underline{e}_t(q_1, q_2) V(z).$$

Devo dunque imporre $V(z) = 0$ per $z = 0$, $z = l$ ove $V(z) = V_o^+ e^{-jk_z z} + V_o^- e^{jk_z z}$ se $k_z \neq 0$, mentre $V(z) = V_{01} z + V_{02}$ se $k_z = 0$. In quest'ultimo caso, imponendo le condizioni, ottengo $V_{02} = 0$ e $V_{01} = 0$, cioè la soluzione banale. Nel caso $k_z \neq 0$ si ha invece per $z = 0$:

$$V_o^- = -V_o^+,$$

$\Rightarrow V(z) = -V_o^+ 2j \sin(k_z z)$, e per $z = l$ ho $\sin(k_z l) = 0 \Rightarrow k_z = \frac{p\pi}{l} \quad p = 1, 2, 3, \dots$

Stavolta il valore nullo, come si è detto, non lo posso prendere.

A questo punto l'autovalore k^2 è dato dalla $k^2 = k_t^2 + k_z^2 = k_t^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2$ ove il k_t^2 è stato determinato dal problema in guida. Ad esempio per un risonatore parallelepipedo di lati a , b , l si ha:

$$k_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2,$$

ove, come si è visto, al più uno dei tre indici può essere nullo (m oppure n nel caso TE, p nel caso TM).

Funzioni di Green

5.1 Equazione di Helmholtz non omogenea, problema deterministico

Ricordando la trattazione dei potenziali elettrodinamici, si consideri il caso di assenza di correnti magnetiche impresse:

$$\underline{J}_{mi} = 0 \quad \implies \quad \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\underline{J}_i .$$

Utilizziamo le coordinate cartesiane e proiettiamo sui tre assi:

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = -J_{ix} \quad \text{e analoghe lungo } y \text{ e lungo } z ;$$

ho dunque separato le equazioni differenziali per le tre componenti (in coordinate cilindriche posso farlo solo per A_z , in coordinate sferiche non posso proprio farlo). Se anche le condizioni al contorno sono separabili per le varie componenti, il problema vettoriale si è di fatto spezzato in tre problemi scalari.

Tali problemi assumono la forma matematica del cosiddetto problema deterministico:

$$Lf = h ,$$

essendo nel nostro caso:

$$L = -(\nabla^2 + k^2), \quad f = A_x, \quad h = J_{ix}.$$

Le condizioni al contorno cui deve soddisfare A_x definiscono il dominio dell'operatore lineare L . La soluzione del problema deterministico è in sostanza l'inversione dell'operatore L :

$$f = L^{-1}h$$

essendo, per definizione di operatore inverso L^{-1} , $L^{-1}L = LL^{-1} = I$ (operatore identico, che applicato a ogni funzione riproduce la funzione stessa).

Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinché il problema abbia una soluzione unica è che il corrispondente problema omogeneo $Lf = 0$ non abbia autosoluzioni (cioè soluzioni non identicamente nulle che risultano autofunzioni dell'autovalore nullo, e che costituiscono uno spazio vettoriale, detto *nucleo* o *kernel*, termine inglese che significa nocciolo, dell'operatore L). Infatti, se esistono due soluzioni distinte f_1 e f_2 si ha:

$$Lf_1 = h, \quad Lf_2 = h \quad \implies \quad L(f_1 - f_2) = 0$$

e dunque esiste un'autofunzione (non identicamente nulla) associata all'autovalore nullo, e cioè esiste l'autovalore nullo. Se, viceversa, esiste un'autofunzione non identicamente nulla associata all'autovalore nullo, cioè tale che $Lf_o = 0$, allora per linearità sarà:

$$L(f + f_o) = h.$$

Quindi $f + f_o$ è un'altra soluzione, diversa da f , del nostro problema deterministico.

Tale condizione si può esprimere anche con riferimento all'operatore aggiunto, essendo gli autovalori dell'operatore aggiunto i complessi coniugati di quelli dell'operatore L . Infatti, se consideriamo i due problemi agli autovalori:

$$\begin{aligned} L\varphi_i &= \lambda_i \varphi_i \\ L^a \varphi_j^a &= \lambda_j^a \varphi_j^a \end{aligned}$$

si ha, per definizione di aggiunto:

$$\begin{aligned} \langle L\varphi_i, \varphi_j^a \rangle &= \lambda_i \langle \varphi_i, \varphi_j^a \rangle = \langle \varphi_i, L^a \varphi_j^a \rangle = \lambda_j^{a*} \langle \varphi_i, \varphi_j^a \rangle \\ &\Downarrow \\ (\lambda_i - \lambda_j^{a*}) \langle \varphi_i, \varphi_j^a \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Ora, se fosse $\lambda_j^{a*} \neq \lambda_i$ per ogni scelta di i , risulterebbe che la corrispondente autofunzione φ_j^a sarebbe ortogonale a tutte le φ_i , le quali formano, si ricordi, un insieme completo. Quindi φ_j^a risulterebbe identicamente nulla, contro l'ipotesi che essa sia un'autofunzione di L^a . Dunque vi sarà un valore di i per cui risulta $\lambda_j^{a*} = \lambda_i$. Abbiamo anche fatto vedere che se i corrispondenti autovalori non sono coniugati, le autofunzioni dell'operatore e del suo aggiunto risultano ortogonali.

Possiamo allora scrivere anche:

$$L^a f_o^a = 0$$

per esprimere la condizione di unicità del problema deterministico, perché per quanto detto l'operatore L ha l'autovalore nullo se e solo se ce l'ha L^a .

5.2 Definizione e proprietà della funzione di Green

Supponendo che il problema deterministico abbia una soluzione unica, lo risolveremo mediante il metodo della cosiddetta *funzione di Green*.

Partiamo per semplicità dal problema scalare e definiamo così la funzione di Green:

$$L G(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}'),$$

essendo in coordinate cartesiane:

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$$

(dimensioni fisiche dell'inverso di un volume). La funzione G deve appartenere al dominio dell'operatore L , cioè deve soddisfare le condizioni al contorno del problema. I punti \underline{r} ed \underline{r}' si chiamano in genere *punto di osservazione* e *punto di sorgente*.

La G è dunque la risposta impulsiva spaziale del nostro sistema elettromagnetico (definito dall'equazione differenziale e dalle associate condizioni al contorno), ossia,

nel nostro caso, la componente di potenziale vettore in una certa direzione prodotta da un impulso spaziale di corrente in quella direzione.

Anche per l'operatore aggiunto definiamo la funzione di Green G^a tale che:

$$L^a G^a(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}').$$

Si noti che la funzione di Green non può esistere se la soluzione del problema deterministico non è unica. Se infatti esistesse in quel caso, si avrebbe:

$$\begin{aligned} \langle L G(\underline{r}, \underline{r}'), f_o^a(\underline{r}) \rangle &= \langle \delta(\underline{r} - \underline{r}'), f_o^a(\underline{r}) \rangle = f_o^{a*}(\underline{r}') = \\ &= \langle G(\underline{r}, \underline{r}'), L^a f_o^a(\underline{r}) \rangle = \\ &= \langle G(\underline{r}, \underline{r}'), 0 \rangle \equiv 0 \end{aligned}$$

contro l'ipotesi che f_o^a non sia identicamente nulla. Le due funzioni $G(\underline{r}, \underline{r}')$ e $G^a(\underline{r}, \underline{r}')$ non sono indipendenti perché una di esse può essere ricavata dall'altra. Consideriamo infatti le relazioni:

$$\begin{aligned} L G(\underline{r}, r_1) &= \delta(\underline{r} - \underline{r}_1) \\ L^a G^a(\underline{r}, r_2) &= \delta(\underline{r} - \underline{r}_2), \end{aligned}$$

dove ho indicato con \underline{r}_1 ed \underline{r}_2 i punti di sorgente per L ed L^a rispettivamente. Consideriamo a questo punto il seguente prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \langle L G(\underline{r}, r_1), G^a(\underline{r}, r_2) \rangle &= \langle \delta(\underline{r} - \underline{r}_1), G^a(\underline{r}, r_2) \rangle = G^{a*}(r_1, r_2) = \\ &= \langle G(\underline{r}, r_1), L^a G^a(\underline{r}, r_2) \rangle = \\ &= \langle G(\underline{r}, r_1), \delta(\underline{r} - \underline{r}_2) \rangle = \\ &= G(r_2, r_1) \end{aligned}$$

essendo la funzione di Dirac reale. Dunque ho trovato che:

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = G^{a*}(\underline{r}', \underline{r}).$$

Per calcolare la funzione di Green possiamo, come faremo nel seguito, integrare direttamente l'equazione differenziale. Ma è possibile anche rappresentarla mediante

uno sviluppo in serie di autofunzioni:

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\underline{r}') \varphi_n(\underline{r}),$$

dove i coefficienti c_n dello sviluppo saranno in generale delle funzioni di \underline{r}' . Si può allora scrivere:

$$\begin{aligned} L G(\underline{r}, \underline{r}') &= L \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\underline{r}') \varphi_n(\underline{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\underline{r}') L \varphi_n(\underline{r}) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\underline{r}') \lambda_n \varphi_n(\underline{r}) = \delta(\underline{r} - \underline{r}') \end{aligned}$$

avendo supposto la possibilità di permutare l'operatore L con la serie, cioè di poter derivare la serie termine a termine.

Consideriamo ora il seguente prodotto scalare, nel quale φ_m^a è autofunzione di L^a corrispondente all'autovalore $\lambda_m^a = \lambda_m^*$, normalizzata rispetto a φ_m (cioè tale che $\langle \varphi_m, \varphi_m^a \rangle = 1$):

$$\begin{aligned} \langle L G(\underline{r}, \underline{r}'), \varphi_m^a(\underline{r}) \rangle &= \left\langle \sum_n c_n(\underline{r}') \lambda_n \varphi_n(\underline{r}), \varphi_m^a(\underline{r}) \right\rangle = \sum_n c_n(\underline{r}') \lambda_n \langle \varphi_n(\underline{r}), \varphi_m^a(\underline{r}) \rangle = \\ &= c_m(\underline{r}') \lambda_m \langle \varphi_m(\underline{r}), \varphi_m^a(\underline{r}) \rangle = c_m(\underline{r}') \lambda_m = \\ &= \langle \delta(\underline{r} - \underline{r}'), \varphi_m^a(\underline{r}) \rangle = \\ &= \varphi_m^{a*}(\underline{r}'), \end{aligned}$$

quindi:

$$c_m(\underline{r}') = \frac{\varphi_m^{a*}(\underline{r}')}{\lambda_m} \quad \Longrightarrow \quad G(\underline{r}, \underline{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^{a*}(\underline{r}')}{\lambda_n}.$$

Si ha inoltre per la delta:

$$\delta(\underline{r} - \underline{r}') = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\underline{r}) \varphi_n^{a*}(\underline{r}').$$

Le precedenti due relazioni si dicono rappresentazioni spettrali della funzione di Green e della delta rispettivamente.

A partire dalla conoscenza della funzione di Green dell'operatore aggiunto, è possibile procedere all'inversione dell'operatore L e quindi risolvere il problema

deterministico. Consideriamo infatti il seguente prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \langle f(\underline{r}), L^a G^a(\underline{r}, \underline{r}') \rangle &= \langle f(\underline{r}), \delta(\underline{r} - \underline{r}') \rangle = f(\underline{r}') = \\ &= \langle L f(\underline{r}), G^a(\underline{r}, \underline{r}') \rangle = \langle h(\underline{r}), G^a(\underline{r}, \underline{r}') \rangle = \\ &= \int_V h(\underline{r}) G^{a*}(\underline{r}, \underline{r}') dV = \int_V h(\underline{r}) G(\underline{r}', \underline{r}) dV, \end{aligned}$$

e scambiando il ruolo alla variabile con e senza apice:

$$f(\underline{r}) = \int_V G(\underline{r}, \underline{r}') h(\underline{r}') dV'.$$

A questa formula risolutiva si poteva arrivare anche applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, partendo dalla

$$L G(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}');$$

moltiplico per $h(\underline{r}')$ e integro su V rispetto alla variabile \underline{r}' :

$$\int_V h(\underline{r}') L G(\underline{r}, \underline{r}') dV' = \int_V h(\underline{r}') \delta(\underline{r} - \underline{r}') dV'.$$

Porto L fuori dall'integrale, in quanto L non opera su \underline{r}' :

$$L \int_V G(\underline{r}, \underline{r}') h(\underline{r}') dV' = h(\underline{r}),$$

ma essendo $L f = h$, si ha per confronto:

$$f(\underline{r}) = \int_V G(\underline{r}, \underline{r}') h(\underline{r}') dV'.$$

Dunque:

$$L^{-1}[\] = \int_V G(\underline{r}, \underline{r}')[\] dV'.$$

Nel caso in cui il problema sia intrinsecamente vettoriale (perché le condizioni al contorno non sono separabili per le varie componenti), si introduce una funzione di

Green diadica $\underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}')$ tale che:

$$L \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') = \underline{\underline{I}} \delta(\underline{r} - \underline{r}'),$$

essendo la diade unitaria definita dalla $\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in modo che sia, per ogni vettore \underline{A} o diade $\underline{\underline{D}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{A} &= \underline{A} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{A} \\ \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{D}} &= \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{D}}. \end{aligned}$$

Si ha inoltre in coordinate cartesiane:

$$\underline{\underline{I}} = \underline{x}_o \underline{x}_o + \underline{y}_o \underline{y}_o + \underline{z}_o \underline{z}_o.$$

Procedendo in maniera concettualmente analoga a quanto fatto nel caso scalare, si ricava la formula risolutiva del problema deterministico vettoriale:

$$\underline{f}(\underline{r}) = \int_V \underline{\underline{G}}(\underline{r}, \underline{r}') \cdot \underline{h}(\underline{r}') dV'.$$

5.3 Condizioni al contorno all'infinito per lo spazio libero

Vogliamo ora determinare il potenziale vettore prodotto da una distribuzione di correnti poste al finito nello spazio libero occupato da un mezzo lineare, stazionario, omogeneo e isotropo.

Anche nel caso dello spazio libero si assumono delle condizioni al contorno, chiamate condizioni all'infinito. In particolare, detto r il raggio in coordinate sferiche, dovrà essere, ad esempio per la componente A_x :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r |A_x|) = \ell < \infty,$$

e la stessa relazione per le altre due componenti. Questo significa che, per $r \rightarrow \infty$, $|A_x|$ va a zero almeno come $\frac{1}{r}$, come conseguenza dell'ipotesi fatta che le correnti impresse non si estendano all'infinito.

Si impone poi un'altra condizione, detta *di radiazione o di Sommerfeld*, la quale in sostanza stabilisce che l'onda abbia una dipendenza spaziale come un'onda sferica che si espande, cioè come $\frac{e^{-jkr}}{r}$ (campo a energia finita), e si propaghi quindi radialmente allontanandosi dalle sorgenti al finito. Si assume quindi:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial A_x}{\partial r} + jk A_x \right) \right] = 0$$

e relazioni analoghe per le altre due componenti. La condizione di Sommerfeld è più restrittiva dell'altra condizione: si può dimostrare infatti che ogni soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa la condizione di Sommerfeld soddisfa anche l'altra condizione. È dunque sufficiente imporre questa.

Siccome allora le condizioni al contorno viste sono separate per le varie componenti, il problema deterministico assume forma scalare. Il dominio dell'operatore (da cui, si ricordi, dipendevano alcune sue proprietà) sarà dato dalle condizioni stesse. In questo caso l'operatore

$$L = -(\nabla^2 + k^2)$$

non risulta autoaggiunto. Ciò è dovuto in sostanza alla presenza della costante k^2 in generale complessa e del fattore j nella condizione di Sommerfeld. Si può dimostrare che esiste l'aggiunto espresso dalla:

$$L^a = -(\nabla^2 + k^{2*})$$

con il dominio definito dalle funzioni g tali che:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r |g|) = \ell < \infty$$

e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial g}{\partial r} - jk^* g \right) \right] = 0.$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \langle L f, g \rangle &= - \int_V (\nabla^2 f + k^2 f) g^* dV = \\ &= \int_V \nabla f \cdot \nabla g^* dV - \oint_S \frac{\partial f}{\partial n} g^* dS - k^2 \int_V f g^* dV, \end{aligned}$$

avendo applicato il lemma di Green nella sua prima forma. D'altra parte si ha:

$$\begin{aligned}\langle f, L^a g \rangle &= - \int_V f \left(\nabla^2 g + k^2 g \right)^* dV = \\ &= - \int_V f \left(\nabla^2 g^* + k^2 g^* \right) dV = \\ &= \int_V \nabla f \cdot \nabla g^* dV - \oint_S f \frac{\partial g^*}{\partial n} dS - k^2 \int_V f g^* dV.\end{aligned}$$

Risulta dunque:

$$\langle L f, g \rangle - \langle f, L^a g \rangle = \oint_S \left(f \frac{\partial g^*}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} g^* \right) dS.$$

Se eseguiamo per semplicità l'integrale di superficie su una sfera con centro nell'origine e raggio tendente all'infinito, si ha per l'elemento d'area in coordinate sferiche:

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Inoltre la derivata normale coincide con quella radiale:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(f \frac{\partial g^*}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial r} g^* \right) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Si osservi ora che dalla condizione per l'aggiunto segue, coniugando:

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\partial g^*}{\partial r} + jk g^* \right) \right] &= 0 \\ \Downarrow \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial g^*}{\partial r} + jk g^* \right) &= 0 \\ \Downarrow \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial g^*}{\partial r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} -jk g^*,\end{aligned}$$

e moltiplicando per $r^2 f$ si ha:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 f \frac{\partial g^*}{\partial r} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} (-jk r^2 f g^*).$$

Inoltre, dalla condizione al contorno per l'operatore L scritta per la funzione f , segue in modo analogo moltiplicando per $r^2 g^*$:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} g^* \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} (-jk r^2 f g^*)$$

ed essendo tali limiti finiti per la condizione sui moduli di f , g (per cui si evita l'insorgere di una forma indeterminata $\infty - \infty$), l'integrando risulta nullo per $r \rightarrow \infty$ e pertanto L^a è l'aggiunto di L come ipotizzato.

Il fatto che le espressioni dell'operatore aggiunto e della relativa condizione all'infinito si ottengano dalle corrispondenti espressioni per l'operatore L e la sua condizione al contorno semplicemente sostituendo in esse le costanti complesse con le loro coniugate (ricordando che l'operatore ∇^2 è reale, cioè operando su funzioni reali restituisce funzioni reali) riveste validità generale.

5.4 Calcolo della funzione di Green per l'equazione di Helmholtz e per lo spazio libero

L'equazione differenziale da risolvere è:

$$-(\nabla^2 + k^2) G(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

con la condizione al contorno all'infinito.

Se per semplicità e simmetria (e peraltro senza perdita di generalità) scegliamo il punto di sorgente \underline{r}' (in cui è centrata la sorgente impulsiva) nell'origine del nostro sistema di riferimento, si ha:

$$-(\nabla^2 + k^2) G(\underline{r}) = \delta(\underline{r}).$$

Assumendo ora un sistema di riferimento sferico r, θ, φ con l'origine nel predetto punto di sorgente, si ha, per la simmetria sferica dello spazio libero e del termine noto $\delta(\underline{r}) = \delta(r)$, che la funzione di Green dipenderà in realtà soltanto dalla coordinata radiale r , e dunque si avrà:

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \quad \implies \quad G(\underline{r}) = G(r).$$

La funzione di Green sarà dunque un'onda sferica uniforme, coincidendo le superfici equifase ed equiampiezza con le sfere $r = cost$.

Si consideri a questo punto l'espressione dell'operatore ∇^2 in coordinate sferiche:

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2},$$

ove il secondo e il terzo termine si annullano per le ipotesi fatte:

$$\Rightarrow - \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) + k^2 G \right] = \delta(r).$$

Cerchiamo inizialmente una soluzione per $r \neq 0 \Rightarrow \delta(r) = 0$. Moltiplicando l'equazione per r si ottiene:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG}{dr} \right) + k^2 r G = 0.$$

Si consideri ora la funzione ausiliaria $\tilde{G}(r) = r G(r)$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{G}}{dr} = G + r \frac{dG}{dr} \quad \Longrightarrow \quad r \frac{dG}{dr} = \frac{d\tilde{G}}{dr} - G$$

e moltiplicando per r si ha:

$$r^2 \frac{dG}{dr} = r \frac{d\tilde{G}}{dr} - r G = r \frac{d\tilde{G}}{dr} - \tilde{G}.$$

Tornando all'equazione di partenza si ha allora:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{G}}{dr} - \tilde{G} \right) + k^2 \tilde{G} = 0.$$

Eseguendo la derivata si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(\frac{d\tilde{G}}{dr} + r \frac{d^2 \tilde{G}}{dr^2} - \frac{d\tilde{G}}{dr} \right) + k^2 \tilde{G} &= 0 \\ \Downarrow \\ \frac{d^2 \tilde{G}}{dr^2} + k^2 \tilde{G} &= 0. \end{aligned}$$

Come si vede, ci siamo ancora una volta ricondotti all'equazione di Helmholtz monodi-

mensionale. Se $k \neq 0$ si ha dunque:

$$\tilde{G}(r) = C_1 e^{-jkr} + C_2 e^{jkr} \quad \Longrightarrow \quad G(r) = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 \frac{e^{jkr}}{r}.$$

A questo punto imponiamo la condizione al contorno di Sommerfeld. Si ha:

$$\begin{aligned} r \frac{dG}{dr} + jkr G &= \frac{d\tilde{G}}{dr} - G + jk \tilde{G} = \\ &= jk \left(-C_1 e^{-jkr} + C_2 e^{jkr} \right) - \left(C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 \frac{e^{jkr}}{r} \right) + \\ &\quad + jk \left(C_1 e^{-jkr} + C_2 e^{jkr} \right) = \\ &= -C_1 \frac{e^{-jkr}}{r} + C_2 e^{jkr} \left(2jk - \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Ponendo $k = \beta - j\alpha$ risulterà per mezzi passivi $\alpha \geq 0$ e dunque per $r \rightarrow \infty$ la quantità precedente tenderà a zero, soddisfacendo la condizione, solo se $C_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad G(r) = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r}.$$

Resta da determinare la costante C_1 e per farlo è necessario prendere ora in esame il termine di sorgente. Si torni quindi alla:

$$-(\nabla^2 + k^2) G = \delta(\underline{r})$$

e si integri a un volume sferico V centrato nell'origine:

$$-\int_V \nabla^2 G dV - k^2 \int_V G dV = 1.$$

Applicando il teorema della divergenza ed essendo $\nabla^2 G = \nabla \cdot \nabla G$ si ha:

$$-\oint_S \underline{n} \cdot \nabla G dS - k^2 \int_V G dV = 1$$

↓

$$-\oint_S \frac{\partial G}{\partial n} dS - k^2 \int_V G dV = 1.$$

Se r_o è il raggio della sfera, si ha:

$$-\frac{dG}{dr}\Big|_{r=r_o} \oint_S dS - k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r_o} G r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 1$$

avendo utilizzato l'espressione dell'elemento di volume in coordinate sferiche

$$\Rightarrow -4\pi r_o^2 \frac{dG}{dr}\Big|_{r=r_o} - k^2 C_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{r_o} r e^{-jkr} dr = 1.$$

Eseguendo la derivata e i primi due integrali si ha:

$$-4\pi r_o^2 C_1 \frac{-jkr_o e^{-jkr_o} - e^{-jkr_o}}{r_o^2} - 4\pi k^2 C_1 \int_0^{r_o} r e^{-jkr} dr = 1.$$

L'ultimo integrale si può risolvere per parti, e si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{r_o} r e^{-jkr} dr &= \int_0^{r_o} \frac{r(-jk)}{-jk} e^{-jkr} dr = \\ &= \frac{r e^{-jkr}}{-jk} \Big|_0^{r_o} - \int_0^{r_o} \frac{1}{-jk} e^{-jkr} dr = \\ &= \frac{r_o e^{-jkr_o}}{-jk} - \int_0^{r_o} \frac{-jk}{(-jk)^2} e^{-jkr} dr = \\ &= \frac{r_o e^{-jkr_o}}{-jk} + \frac{1}{k^2} e^{-jkr} \Big|_0^{r_o} = \\ &= \frac{r_o e^{-jkr_o}}{-jk} + \frac{1}{k^2} (e^{-jkr_o} - 1) = \\ &= \frac{jkr_o e^{-jkr_o} + (e^{-jkr_o} - 1)}{k^2} \end{aligned}$$

↓

$$4\pi C_1 e^{-jkr_o} (jkr_o + 1) - 4\pi C_1 [e^{-jkr_o} (jkr_o + 1) - 1] = 1$$

$$\Rightarrow 4\pi C_1 = 1 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{1}{4\pi} \quad \Rightarrow G(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}.$$

Se il punto di sorgente non coincide con l'origine, cioè se $r' \neq 0$, occorre sostituire a r la quantità $|r - r'|$, cioè la distanza fra il punto di osservazione e il punto di sorgente. Infatti la funzione di Green per lo spazio libero è funzione di $r - r'$ anziché separatamente di r e di r' , perché lo spazio libero è una struttura omogenea, cioè

invariante per traslazione. Si ha quindi:

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}.$$

Si osservi l'importante proprietà $G(\underline{r}, \underline{r}') = G(\underline{r}', \underline{r})$.

A questo punto possiamo scrivere, ad esempio per la componente A_x :

$$A_x(\underline{r}) = \int_V \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} J_{xi}(\underline{r}') dV'$$

e formule analoghe per $A_y(\underline{r})$ e $A_z(\underline{r})$. Moltiplicando ogni formula per il corrispondente versore cartesiano, che poi posso portare dentro l'integrale in quanto costante vettoriale, si ha la relazione vettoriale:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \int_V \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{J}_i(\underline{r}') dV'.$$

Da questo potenziale vettore posso poi ricavare il campo magnetico $\underline{H} = \nabla \times \underline{A}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{H}(\underline{r}) &= \nabla \times \int_V G(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}_i(\underline{r}') dV' = \\ &= \int_V \nabla \times [G(\underline{r}, \underline{r}') \underline{J}_i(\underline{r}')] dV'. \end{aligned}$$

Applico ora l'identità vettoriale

$$\nabla \times (f \underline{v}) = f \nabla \times \underline{v} - \underline{v} \times \nabla f,$$

ove nel nostro caso il vettore non dipende da \underline{r} , per cui l'integrando diviene

$$\nabla G(\underline{r}, \underline{r}') \times \underline{J}_i(\underline{r}'),$$

come poteva ottenersi in breve spostando la funzione di Green (scalare) dall'altra parte del prodotto vettoriale.

Il campo elettrico si può ottenere dalla formula:

$$\underline{E} = -j\omega\mu \underline{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{A}}{j\omega\epsilon_c}.$$

Anche qui posso portare il gradiente della divergenza dentro l'integrale. Sfrutto

l'identità vettoriale:

$$\nabla \cdot (f \underline{v}) = \underline{v} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \underline{v}.$$

Nel nostro caso sopravvive il termine $\underline{v} \cdot \nabla f$, cioè $\underline{J}_i \cdot \nabla G$ di cui devo poi calcolare il gradiente. Per fare ciò sfrutto l'identità:

$$\nabla(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{B} \times (\nabla \times \underline{A}) + (\underline{B} \cdot \nabla) \underline{A} + \underline{A} \times (\nabla \times \underline{B}) + (\underline{A} \cdot \nabla) \underline{B}.$$

Nel nostro caso il primo vettore non dipende da \underline{r} , e quindi sopravvivono solo il terzo e il quarto termine nei quali il nabla opera sul secondo vettore. Si ha dunque, nel secondo addendo che fornisce il campo elettrico, il seguente integrando:

$$\underline{J}_i(\underline{r}') \times (\nabla \times \nabla G) + [\underline{J}_i(\underline{r}') \cdot \nabla] \nabla G = [\underline{J}_i(\underline{r}') \cdot \nabla] \nabla G(\underline{r}, \underline{r}').$$

Dalle formule precedenti si nota l'importanza, per la valutazione del campo elettromagnetico, del calcolo del gradiente e del gradiente del gradiente della funzione di Green.

5.5 Campo elettromagnetico prodotto da una distribuzione di correnti impresse in presenza di un corpo metallico

Se nello spazio è presente anche un corpo perfettamente conduttore, esso aggiunge un'ulteriore condizione al contorno: $\underline{n} \times \underline{E} = 0$ su S .

Se la forma di S è arbitraria, questa condizione non si potrà in genere decomporre in singole condizioni per le componenti di \underline{E} . Il problema è allora intrinsecamente vettoriale. Conviene in questo caso fare riferimento al campo elettrico \underline{E} direttamente, senza passare per il potenziale vettore, in modo da poter imporre più facilmente la condizione al contorno sul conduttore perfetto.

Prendendo il rotore della prima equazione di Maxwell e sostituendovi la seconda si ottiene:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} = -\nabla \times \underline{J}_{mi} - j\omega\mu(\underline{J}_i + j\omega\epsilon_c \underline{E}),$$

da cui:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k^2 \underline{E} = -\nabla \times \underline{J}_{mi} - j\omega\mu \underline{J}_i.$$

Questa è un'equazione delle onde più generale di quella di Helmholtz. Il nostro

operatore sarà $L = \nabla \times \nabla \times (\cdot) - k^2 (\cdot)$ con le condizioni al contorno sul corpo conduttore e all'infinito.

La condizione all'infinito sull'ampiezza del campo si può scrivere in questo caso (supponendo che le correnti impresse non si estendano all'infinito):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r |\underline{E}|) = \ell < \infty.$$

La condizione di radiazione consiste in pratica nel supporre che il campo a grande distanza sia assimilabile ad un'onda piana radiale, per cui $\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{r}_o$. Si assume dunque:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r (\zeta \underline{H} \times \underline{r}_o - \underline{E})] = 0.$$

Possiamo esprimere quest'ultima condizione facendovi comparire solo il campo elettrico, sfruttando le equazioni di Maxwell omogenee (perché si suppone che nella regione lontana le correnti non ci siano più). Dunque:

$$\underline{H} = -\frac{\nabla \times \underline{E}}{j\omega\mu}$$

e sostituendo nella condizione di radiazione si ha (ricordando che $\omega\mu = k\zeta$):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ r \left[\frac{\underline{r}_o \times (\nabla \times \underline{E})}{jk} - \underline{E} \right] \right\} = 0$$

↓

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{ r [\underline{r}_o \times (\nabla \times \underline{E}) - jk\underline{E}] \} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente per \underline{r}_o si ha per la componente radiale E_r :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (r E_r) = 0 \quad \text{cioè l'onda è TE in direzione radiale.}$$

Si può dimostrare che anche in questo caso vettoriale la condizione di radiazione di Sommerfeld implica la condizione sui moduli, quindi basta imporre la prima.

L'operatore L prima definito, con le condizioni al contorno viste, ammette come aggiunto l'operatore $L^a = \nabla \times \nabla \times (\cdot) k^{2*} (\cdot)$ con le condizioni al contorno $\underline{n} \times \underline{g} = 0$

sulla superficie del conduttore e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{r [\underline{r}_o \times (\nabla \times \underline{g}) + jk^* \underline{g}]\} = 0.$$

Il problema si risolve mediante una funzione di Green diadica, che ha come colonne tre funzioni di Green vettoriali le quali soddisfano le condizioni al contorno dell'operatore L .

Elenco delle figure

1.1	Andamento di $\frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_o}$ in funzione di $\frac{\omega}{\omega_o}$	25
1.2	Andamento di $-\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_o}$ in funzione di $\frac{\omega}{\omega_o}$	26
2.1	Velocità di gruppo.	79
2.2	Riflessione totale nel caso di incidenza normale.	87
2.3	Riflessione e trasmissione (rifrazione) nel caso di incidenza obliqua.	89
2.4	Riflessione e trasmissione nel caso di polarizzazione orizzontale.	91
2.5	Riflessione e trasmissione nel caso di polarizzazione verticale.	94
2.6	Riflessione totale nel caso di incidenza obliqua.	98
2.7	Grafico della funzione seno iperbolico.	100
3.1	Schema di linea bifilare	107
3.2	Linea di lunghezza ℓ terminata su un carico Z_L	117
3.3	Rappresentazione di $\frac{ V(z) }{ V_o^+ }$ nel piano complesso	119
3.4	Strato antiriflettente (caratterizzato da Z_{c2} , k_{z2} ed ℓ) interposto tra due mezzi	121
3.5	Struttura multistrato	122
4.1	Sistema di riferimento per strutture cilindriche.	136
4.2	Configurazione trasversa del campo elettrico in guida d'onda rettangolare nel modo TE_{10}	151
4.3	Sviluppo in onde piane del modo TE_{10} in guida rettangolare.	151

4.4	Funzioni J_n di Bessel.	154
4.5	Funzioni Y_n di Bessel.	154
4.6	Risonatore cilindrico.	160

Bibliografia

- [1] C. A. Balanis, *Advanced engineering electromagnetics*, second edition, Wiley, New York, 2012.
- [2] G. Franceschetti, *Campi Elettromagnetici*, Boringhieri, seconda edizione, Torino, 1988.
- [3] C. G. Someda, *Onde elettromagnetiche*, UTET, Torino, 1986.
- [4] J. D. Jackson, *Elettrodinamica classica*, seconda edizione italiana (sulla terza edizione inglese del 1999), Zanichelli, Bologna, 2001.
- [5] D. S. Jones, *Acoustic and electromagnetic waves*, Oxford University Press, 1989.
- [6] S. Ramo, J. R. Whinnery, T. Van Duzer, *Campi e onde nell'elettronica per le telecomunicazioni*, Franco Angeli Editore, Milano, 2006.
- [7] L. D. Landau, E. M. Lifshits, *Elettrodinamica dei mezzi continui*, volume 8 della serie di Fisica Teorica, Editori Riuniti, Roma, 2011.
- [8] G. Barzilai, *Fondamenti di elettromagnetismo*, Siderea, Roma, 1975.
- [9] A. W. Snyder, J. D. Love, *Optical waveguide theory*, Chapman and Hall, London, 1983.
- [10] I. Cattaneo Gasparini, *Strutture algebriche lineari*, Masson, Milano, 1998.
- [11] G. C. Corazza, C. G. Someda, *Elementi di calcolo vettoriale e tensoriale*, Pitagora, Bologna, 1982.
- [12] K. Kurokawa, *An introduction to the theory of microwave circuits*, Academic Press, New York, 1969.
- [13] R. F. Harrington, *Time-harmonic electromagnetic fields*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [14] P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [15] C. T. Tai, *Generalized vector and dyadic analysis*, second edition, IEEE Press, New York, 1997.