

# Modulazione (e ritorno) di segnali analogici

**A**NALIZZIAMO le tecniche adottate per modulare (in ampiezza o angolarmente) una portante sinusoidale con un segnale informativo di natura analogica<sup>1</sup>, studiando allo stesso tempo le caratteristiche spettrali del segnale ottenuto. Sono quindi discussi i diversi approcci di demodulazione, i circuiti che li realizzano, e l'influenza di eventuali inaccurately, mentre al capitolo successivo sono gli discussi gli approcci puramente *numerici*. Lo studio di come le diverse scelte condizionino le prestazioni del ricevitore nel caso di un canale distorto ed in presenza di rumore al lato ricevente viene affrontato rispettivamente ai capp. 13 e 14.

## 12.1 Modulazione di ampiezza - AM

Al § 11.2 si è mostrato come un segnale modulato  $x(t)$  può essere rappresentato nei termini delle sue *componenti analogiche di bassa frequenza*  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$ : quando queste *non sono* scelte in modo indipendente<sup>2</sup>, possiamo individuare le seguenti classi di segnali *modulati in ampiezza*:

- *banda laterale doppia*: così chiamata in quanto  $\mathcal{P}_x(f)$  è simmetrico rispetto ad  $f_0$ , conseguenza dell'essere  $x_s(t)$  nulla. Si tratta del caso introdotto al § 3.5.2, ora indicato con gli acronimi BLD o DSB (*double side band*);
- *banda laterale unica* (BLU o SSB - *single side band*): qui sono presenti sia  $x_c(t)$  che  $x_s(t)$ , con il vincolo  $x_s(t) = \widehat{x}_c(t)$ . Ciò fa sì che (come vedremo) la densità  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato giaccia tutta all'*esterno* (od all'*interno*) di  $\pm f_0$ ;
- *banda laterale ridotta* (BLR o VSB - *vestigial side band*<sup>3</sup>) è una via di mezzo tra i due casi precedenti, in quanto  $\mathcal{P}_x(f)$  non è simmetrica rispetto ad  $f_0$ , e pur giacendo su entrambi i lati, occupa una banda minore del caso BLD.

<sup>1</sup>Per i segnali numerici si usano tecniche peculiari, espone al capitolo 16.

<sup>2</sup>Qualora  $x_c(t)$  e  $x_s(t)$  siano due segnali indipendenti, la forma di modulazione di ampiezza risultante viene detta segnale QAM (*quadrature amplitude modulation*), vedi § 16.3.

<sup>3</sup>Come sarà più chiaro nel seguito, l'acronimo VSB evoca il fatto che, anziché sopprimere completamente una delle due bande laterali, se ne mantengono *delle vestigia*.

Per completare la classificazione, per ognuna delle possibilità illustrate può verificarsi uno tra tre sottocasi, che si riferiscono alla presenza o meno, in  $\mathcal{P}_x(f)$ , di una concentrazione di potenza (ossia un impulso) a frequenza  $f_0$ , corrispondente alla trasmissione di potenza non associata al segnale modulante  $m(t)$ , ma solamente alla portante, e quindi priva di contenuto informativo ai fini della trasmissione. I tre sottocasi citati sono indicati come:

- portante intera (PI o LC - large carrier);
- portante soppressa (PS o SC - suppressed carrier);
- portante parzialmente soppressa (PPS).

### 12.1.1 Banda laterale doppia - BLD

Come anticipato, questo è il caso in cui l'involuppo complesso  $\underline{x}(t)$  del segnale modulato presenta *una sola* componente analogica di bassa frequenza, che *per convenzione*<sup>4</sup> è posta pari a  $x_c(t)$ , la cui dipendenza dal segnale modulante  $m(t)$  è espressa nella forma generale  $x_c(t) = a_p + k_a m(t)$ , e quindi

$$x_{BLD}(t) = (a_p + k_a m(t)) \cos \omega_0 t \tag{12.1}$$

Pertanto l'involuppo complesso è *reale* e vale  $\underline{x}(t) = a_p + k_a m(t)$ ; considerando poi  $m(t)$  a media nulla, la relativa densità di potenza ha valore

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = a_p^2 \delta(f) + k_a^2 \mathcal{P}_m(f)$$

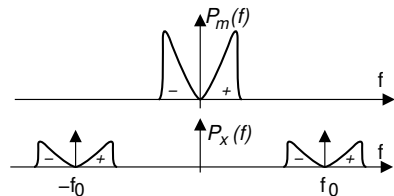
Ricordando ora che  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) + \mathcal{P}_{\underline{x}}(-f - f_0))$  (eq. (11.20)) e che per  $\underline{x}(t)$  reale la relativa densità di potenza è pari ovvero  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = \mathcal{P}_{\underline{x}}(-f)$ , la densità di potenza del segnale modulato risulta pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{a_p^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{k_a^2}{4} [\mathcal{P}_m(f - f_0) + \mathcal{P}_m(f + f_0)] \tag{12.2}$$

La potenza *totale* di  $x(t)$  vale perciò

$$\mathcal{P}_x = \int \mathcal{P}_x(f) df = \frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m \tag{12.3}$$

mentre la corrispondente densità spettrale è raffigurata a lato, dove si è posto  $k_a = 1$ .



<sup>4</sup>Considerando che la portante del segnale *ricevuto* può avere una fase arbitraria, e che con una traslazione temporale ci si può sempre ricondurre ad usare una funzione  $\cos \omega_0 t$ , tale convenzione individua il caso più generale di un segnale modulato del tipo  $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$  con  $\varphi$  costante. Infatti, introducendo un ritardo  $\tau = \frac{\varphi}{2\pi f_0}$  si ottiene  $x(t - \tau) = a(t - \tau) \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \varphi) = a(t - \tau) \cos(2\pi f_0 t)$ .

D'altra parte, risultando  $a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) = a(t) (\cos(\omega_0 t) \cos \varphi - \sin(\omega_0 t) \sin \varphi)$  si ottiene che la presenza di una fase incognita  $\varphi$  determina la ricezione di un segnale modulato le cui c.a. di b.f. risultano pari a  $x_c(t) = a(t) \cos \varphi$  e  $x_s(t) = a(t) \sin \varphi$ , e che quindi variano *in simultanea*. Pertanto, in base ai risultati del § 13.1.2.4, il segnale modulato equivale a quello in cui è presente la sola componente in fase  $x_c(t)$ , ma al quale un errore nella fase di demodulazione imprime una rotazione di angolo  $\varphi$  al piano dell'involuppo complesso.

**12.1.1.1 Portante soppressa - PS**

Osserviamo che nell'espressione (12.3) della  $\mathcal{P}_x$  di un segnale AM-BLD il termine  $\frac{a_p^2}{2}$  rappresenta la potenza della portante *non modulata*<sup>5</sup>, concentrata per metà ad  $f_0$  e per metà a  $-f_0$ . Evidentemente, ponendo  $a_p = 0$  nella (12.1) tale componente *svanisce*, dando luogo al sottocaso di *portante soppressa*, a cui corrisponde una densità di potenza pari a

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{k_a^2}{4} [\mathcal{P}_m(f - f_0) + \mathcal{P}_m(f + f_0)]$$

La demodulazione di AM-BLD-PS si effettua in modo coerente (§ 12.2.1), dopo aver ricostruito la portante per quadratura (§ 12.2.2.1) o mediante un *Costas Loop*<sup>6</sup>, oppure mediante demodulatore ad involuppo (§ 12.2.5), dopo aver elaborato la portante ricostruita come spiegato al § 12.1.1.3.

**12.1.1.2 Portante intera - PI**

Questo caso si verifica qualora si ponga  $a_p \neq 0$ , con un valore scelto in modo che  $x_c(t)$  sia sempre positiva, e ciò accade se  $a_p \geq k_a \cdot \max\{|m(t)|\}$ , in modo che risulti sempre (vedi fig. 12.1)

$$x_c(t) = a_p + k_a m(t) \geq 0 \quad \text{per } \forall t$$

e quindi in modo che la portante modulata *non inverta mai la fase*, come invece accade per i casi di portante soppressa (o parzialmente).

Un modo equivalente di esprimere questa condizione è

$$a_p^2 \geq k_a^2 m^2(t) \quad \text{per } \forall t$$

ed indicando con  $P_I^{Max}$  il massimo valore di  $m^2(t)$  (<sup>7</sup>), essa può essere soddisfatta qualora  $\left(\frac{a_p}{k_a}\right)^2 > P_I^{Max}$ , permettendo così di dimensionare l'uno rispetto all'altro<sup>8</sup>.

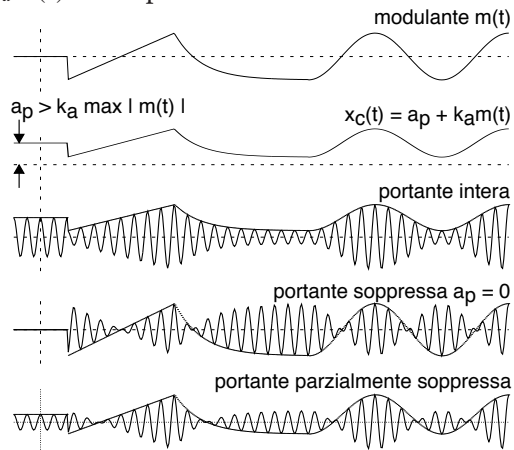


Figura 12.1: Modulazione di ampiezza BLD

**Indice di modulazione per portante intera** Il rapporto

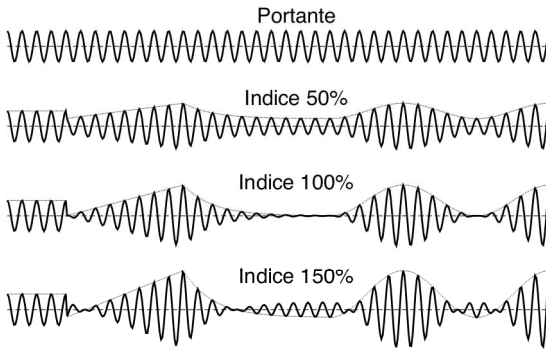
$$I_a = \frac{k_a \cdot \max\{|m(t)|\}}{a_p} \tag{12.4}$$

<sup>5</sup>Cioè che *non dipende* dal messaggio modulante  $m(t)$ .

<sup>6</sup>Vedi nota 18 a pag. 369.

<sup>7</sup>Il segnale  $\mathcal{P}_I(t) = m^2(t)$  può essere indicato come *potenza istantanea* di  $m(t)$ , e  $P_I^{Max}$  indicato come la sua *potenza di picco*.

<sup>8</sup>Ad esempio, nel caso in cui  $m(t)$  sia un processo con densità di probabilità uniforme tra  $\pm \frac{\Delta}{2}$ , la potenza di picco risulta essere  $\frac{\Delta^2}{4} = 3\sigma_M^2$ , dato che (come mostrato al § 6.2.3) in quel caso risulta  $\sigma_M^2 = \frac{\Delta^2}{12}$ ; se invece  $m(t) = a \sin 2\pi f_M t$ , allora si ha una potenza di picco  $a^2 = 2\sigma_M^2$  (dato che  $\mathcal{P}_M = \sigma_M^2 = \frac{a^2}{2}$ ). Oppure ancora, se  $m(t)$  è gaussiano la potenza di picco (e dunque  $a_p^2/k_a^2$  per ottenere la portante intera) risulta *infinita*. E cosa accade allora? Si avrà necessariamente una portante ridotta...



crescenti corrisponde un aumento di  $I_a$  e dunque una maggiore variazione dell'ampiezza della portante, finché per  $I_a > 100\%$  si verifica una *sovramodulazione* e non ci troviamo più in condizioni di portante *intera* bensì *parzialmente soppressa* (§ 12.1.1.3), come mostrato alla figura precedente.

La ragione principale della modulazione a portante intera è che in tal caso il componente di ricezione può fare a meno di conoscere il valore di  $f_0$  ed utilizzare il semplice *demodulatore di involuppo* descritto al § 12.2.5.

### 12.1.1.3 Portante parzialmente soppressa - PPS

Se il valore  $a_p$  nella (12.1) è inferiore a quello necessario ad ottenere una portante intera, ma non è nullo, si ottiene il caso della portante *parzialmente soppressa*, che permette di risparmiare potenza (vedi § 12.1.1.4). Il residuo di portante presente può essere usato per la sua *ri-generazione* al lato ricevente mediante l'uso di un PLL (§ 12.2.2.2), in modo da *sommarla* al segnale ricevuto, ri-producendo così il termine  $a_p \cos \omega_0 t$  e riconducendosi al caso di portante intera.

### 12.1.1.4 Efficienza energetica per portante intera e PPS

Nell'espressione (12.3) della potenza totale  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}(a_p^2 + k_a^2 \mathcal{P}_m)$  per un generico segnale AM-BLD notiamo che solo  $\frac{1}{2}k_a^2 \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_u$  esprime un segnale *utile*, mentre  $\frac{1}{2}a_p^2$  rappresenta la potenza spesa per la portante senza trasportare informazione. Pertanto si definisce una *efficienza energetica*

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_x} = \frac{\frac{1}{2}k_a^2 \mathcal{P}_m}{\frac{1}{2}(a_p^2 + k_a^2 \mathcal{P}_m)} = \frac{1}{1 + \frac{a_p^2}{k_a^2 \mathcal{P}_m}}$$

il cui valore indica la frazione di potenza trasmessa che è utile ai fini della ricostruzione del messaggio.

**Esempio** Se  $m(t) = \sin 2\pi f_M t$  si ha  $\mathcal{P}_M = 1/2$  e, nel caso di portante intera, deve risultare  $a_p = k_a$  e dunque  $\eta = \frac{1}{1+2} = 0.33$ . Ovvero solo 1/3 della potenza trasmessa è utile al ricevitore!

### 12.1.2 Banda laterale unica - BLU

Mentre con la modulazione BLD si determina una occupazione di banda per il segnale modulato  $x(t)$  *doppia* di quella del segnale modulante, la tecnica BLU impegna invece

prende il nome di *indice di modulazione* e nel caso di portante intera assume valori compresi tra zero ed uno, o tra 0 e 100 in termini percentuali. Un indice  $I_a$  del 100% corrisponde allo sfruttamento di *tutta* la dinamica della portante, fatto rilevante ai fini delle considerazioni svolte al § 12.1.1.4.

Per  $k_a = 0$  si ottiene  $I_a = 0$  ed assenza di modulazione; a valori  $k_a$

una banda *uguale* a quella di  $m(t)$ . Tale risultato è ottenuto realizzando un segnale modulato  $x(t)$  le cui componenti analogiche  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  sono *dipendenti* tra loro, ed in particolare imponendo che  $x_c(t) = m(t)$  e  $x_s(t) = \widehat{m}(t)$ : infatti in tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} x_{BLU}(t) &= m(t) \cos \omega_0 t - \widehat{m}(t) \sin \omega_0 t = \\ &= m(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} - \widehat{m}(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \\ &= e^{j\omega_0 t} \frac{1}{2} [m(t) + j\widehat{m}(t)] + e^{-j\omega_0 t} \frac{1}{2} [m(t) - j\widehat{m}(t)] \end{aligned} \quad (12.5)$$

Ricordando ora che  $\frac{1}{2} [m(t) \pm j\widehat{m}(t)] = m^\pm(t)$  (vedi eq. (11.17) e (11.18)) corrisponde al contenuto a frequenze positive (e negative) di  $m(t)$ , allora (assumendo  $x(t)$  di energia) la trasformata di Fourier di ambo i membri di (12.5) fornisce

$$\begin{aligned} X_{BLU}(f) &= \delta(f - f_0) * M^+(f) + \delta(f + f_0) * M^-(f) = \\ &= M^+(f - f_0) + M^-(f + f_0) \end{aligned} \quad (12.6)$$

e quindi il segnale modulato AM-BLU è ottenuto a partire dai contenuti a frequenze positive e negative di  $m(t)$ , traslati *ai lati* della portante  $f_0$ , come mostrato alla riga centrale della figura a lato, in cui il segnale modulato BLU risulta (nel dominio della frequenza) *esterno* ad  $f_0$ , circostanza indicata come segnale BLU in *banda laterale superiore*. Il caso opposto (*banda laterale inferiore*, riga in basso della figura) si ottiene cambiando segno a  $x_s(t)$  nella prima eguaglianza di (12.5); scriviamo dunque l'espressione generale come

$$x_{BLU}(t) = \frac{k_a}{\sqrt{2}} m(t) \cos \omega_0 t \mp \frac{k_a}{\sqrt{2}} \widehat{m}(t) \sin \omega_0 t \quad (12.7)$$

con  $-$  e  $+$  rispettivamente per ottenere un segnale BLU con banda superiore o inferiore.

Dopo aver notato che stiamo trattando di un caso a *portante soppressa*, osserviamo che il segnale modulato BLU (12.7) ha una potenza (vedi § 12.4.5)

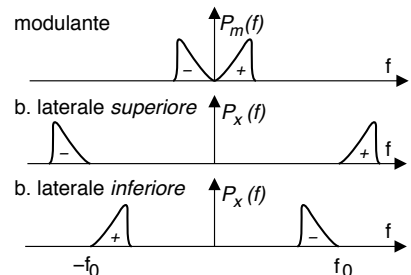
$$\mathcal{P}_x = 2 \cdot \left( \frac{k_a^2}{2} \cdot \mathcal{P}_m \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$$

eguale a quella di un segnale AM-BLD per il quale  $x_c(t) = k_a m(t)$  e  $x_s(t) = 0$ .

Qualora si consideri infine un segnale modulante  $m(t)$  realizzazione di un processo ergodico, al § 12.4.4 si dimostra il risultato del tutto simile alla (12.6), ovvero

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_{m^+}(f - f_0) + \mathcal{P}_{m^-}(f + f_0) \quad (12.8)$$

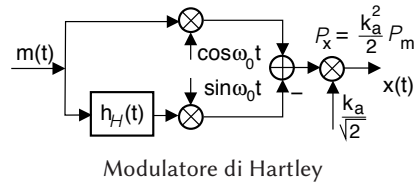
Il vantaggio di questa tecnica di modulazione è subito evidente: consente di risparmiare banda, permettendo la trasmissione di più messaggi in divisione di frequenza FDM, vedi pag. 339.



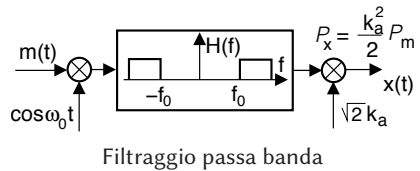
**12.1.2.1 Generazione di segnali BLU**

Un segnale BLU può essere ottenuto mediante due possibili tecniche analogiche, ed una terza che è percorribile nel caso di segnali campionati:

- la prima (modulatore di *Hartley*) consiste nell'uso di un *filtro di Hilbert* per calcolare  $\widehat{m}(t)$ , da usare assieme ad  $m(t)$  in un modulatore in fase ed in quadratura, introdotto al § 11.2.3. E' evidente come si possano presentare problemi se  $m(t)$  ha contenuti energetici prossimi a frequenza zero, che rendono assai stringenti le specifiche per approssimare il filtro di Hilbert, vedi § 11.4.1;



- nella seconda viene prima generato un segnale BLD, che viene poi filtrato passa-banda in modo da eliminare una delle due bande laterali. Qualora sia necessario trasmettere componenti spettrali di  $m(t)$  prossime a frequenza zero si determina un problema simile a quello del caso precedente, complicando la realizzazione del filtro.

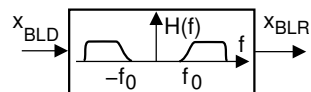


- la tecnica numerica nota come modulatore di *Weaver* si avvale della possibilità di eseguire prodotti complessi su valori del segnale modulante campionato. Volendo ottenere un segnale BLU con banda laterale *superiore*, il segnale di banda base  $m(t)$  (con banda  $W$ ) viene moltiplicato per l'esponenziale complesso  $e^{-j2\pi \frac{W}{2} t}$  in modo da centrare  $m^+(t)$  attorno alla frequenza zero, ed eliminando  $m^-(t)$  (ora centrato a frequenza  $-W$ ) dal segnale *complesso* ottenuto, mediante un filtro *passa basso* con banda  $\frac{W}{2}$ . Il risultato viene quindi moltiplicato per una singola portante a frequenza  $f_0 + \frac{W}{2}$ , ottenendo il risultato desiderato.

La trasmissione FDM di segnali BLU è stata lungamente usata per moltiplicare in forma analogica svariati canali telefonici (vedi § 11.1.1.2). Pertanto, la limitazione sulla minima frequenza di un canale telefonico a 300 Hz è motivata anche dalla necessità di effettuare modulazioni BLU.

**12.1.3 Banda laterale ridotta - BLR**

Si può verificare il caso in cui non si possa assolutamente fare a meno di componenti di segnale a frequenza molto bassa, come avviene ad esempio nel segnale televisivo analogico<sup>9</sup> (vedi § 25.1). Si ricorre allora alla modulazione a *banda laterale ridotta* (BLR), ottenuta facendo transitare un segnale modulato BLD attraverso un filtro che presenta una regione di transizione tra la banda passante e quella attenuata *più dolce* di quella di un passa-banda ideale, e che si estende oltre  $f_0$ .



<sup>9</sup>Nel caso ad esempio di ampie zone di immagine uniformi ed a luminosità costante, il segnale è praticamente costante.

	Segnale modulato $x(t)$	Potenza $\mathcal{P}_x$	$k_a$ per $\mathcal{P}_x$ dato
<b>BLD-PS</b>	$k_a m(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$	$\sqrt{\frac{2\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_m}}$
<b>BLU-PS</b>	$\frac{k_a}{\sqrt{2}} m(t) \cos(\omega_0 t) - \frac{k_a}{\sqrt{2}} \hat{m}(t) \sin(\omega_0 t)$	$\frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$	$\sqrt{\frac{2\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_m}}$
<b>BLD-PI</b>	$[a_p + k_a m(t)] \cos(\omega_0 t)$ con $a_p \geq k_a \cdot \max\{ m(t) \}$	$\frac{a_p^2}{2} + \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$	$\sqrt{\frac{2\mathcal{P}_x - a_p^2}{\mathcal{P}_m}}$

Tabella 12.1: Espressione dei segnali AM e relativa potenza

### 12.1.4 Potenza di un segnale AM

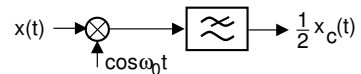
La tabella 12.1 riporta uno schema riassuntivo dell'espressione del segnale per i diversi tipi di modulazione di ampiezza, assieme ai valori  $k_a$  ed  $a_p$  tali da determinare uno specifico valore per la potenza totale  $\mathcal{P}_x$ , di cui ai §§ 12.4.5 e 12.4.5.1 si discute lo schema di calcolo.

## 12.2 Demodulazione di ampiezza

Il segnale informativo  $m(t)$  può essere recuperato a partire da quello modulato  $x(t)$  mediante il processo di demodulazione, che nel caso AM può avvenire mediante diverse tecniche, denominate *omodina*, di *inviluppo*, di *fase e quadratura*, *eterodina*; ognuna di esse ha il suo campo di applicazione, assieme a pregi e difetti.

### 12.2.1 Demodulazione coerente o omodina

Si tratta del circuito già noto (vedi § 11.2.4) di estrazione della componente in fase  $x_c(t)$  mediante moltiplicazione o *mixing*<sup>10</sup> di  $x(t)$  per una portante di demodulazione  $\cos \omega_0 t$ , e di rimozione delle componenti a frequenza  $2f_0$  mediante un filtro passa-basso, come mostrato in figura. La portante generata localmente deve avere la stessa fase e la stessa frequenza della portante ricevuta<sup>11</sup>, condizione indicata anche con il nome di demodulazione *omodina*, *sincrona*, *coerente*, a *conversione diretta*, o *zero-IF*<sup>12</sup>. Il metodo è applicabile a tutti i tipi di modulazione di ampiezza, in quanto per tutti la componente in fase è direttamente legata al messaggio  $m(t)$ ; nella pratica, nei casi di BLD-PI ed in quelli ad esso riconducibili, può essere invece preferibile adottare il demodulatore di inviluppo (§ 12.2.5).



<sup>10</sup>Il dispositivo fisico che effettua la moltiplicazione per una portante viene indicato in letteratura con il termine di *mixer*, il cui significato letterale è *mescolatore*. Dato che lo stesso termine è usato anche per indicare un circuito od apparato in grado di realizzare la *somma* di più segnali, come ad esempio avviene per il mixer *audio* di un sistema di amplificazione sonora, per distinguere i due casi si può parlare di mixer *additivo* oppure *moltiplicativo*, come nel nostro caso. In appendice 12.4.1 sono illustrate due tecniche di realizzazione del mixer.

<sup>11</sup>Dato che un qualunque canale presenta un ritardo di propagazione  $\tau$ , la portante del segnale ricevuto sarà nella forma  $\cos 2\pi f_0(t - \tau) = \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau) = \cos(2\pi f_0 t - \varphi)$ , ovvero sarà sempre presente una fase  $\varphi = 2\pi f_0 \tau$  *incognita*. Nel caso poi di un collegamento radiomobile, può anche essere presente un errore di frequenza, dovuto all'*effetto doppler*, vedi § 20.4.6.

<sup>12</sup>Le ultime due definizioni sono orientate a differenziarsi dal metodo di demodulazione *eterodina*, che in realtà si è affermato *prima* della praticabilità di quello *omodina*, per i motivi esposti al § 12.2.7.

## 12.2.2 Sincronizzazione di portante

Individua il compito di generare presso il demodulatore una *copia* della portante quanto più possibile *coerente* con la fase di quella ricevuta. Descriviamo due dei metodi utilizzati a questo scopo, mentre un terzo attuabile con tecniche totalmente digitali è descritto al § 12.4.3.

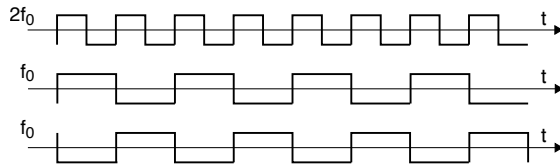
### 12.2.2.1 Metodo della quadratura

Anche se nel segnale ricevuto non vi è traccia della portante, come per BLD-PS, la portante di demodulazione può essere comunque ottenuta mediante lo schema simbolico rappresentato in figura, che come prima cosa eleva al quadrato il segnale modulato ricevuto  $x(t) = m(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , producendo

$$\frac{1}{2} m^2(t) [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)]$$

Il termine di banda base  $\frac{1}{2} m^2(t)$  viene quindi rimosso dal filtro passa alto, mentre il termine  $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$  è convertito in un'onda quadra a frequenza  $2f_0$  mediante il dispositivo non lineare *squadratore*<sup>13</sup>, che produce in uscita la funzione *segno* di ciò che si presenta in ingresso. A sua volta l'onda quadra attraversa un divisore di frequenza<sup>14</sup>, ottenendo così una nuova onda quadra, ma a frequenza  $f_0$ ; come noto (§ 2.5.2) l'onda quadra contiene anche tutte le armoniche dispari, che sono rimosse dal filtro passa basso di uscita, ottenendo in definitiva la portante desiderata.

Qualora il divisore sia implementato mediante un multivibratore bistabile<sup>15</sup> che commuta sul *fronte di salita* dell'ingresso, il metodo è affetto da una *ambiguità di segno*, che corrisponde ad un eventuale errore di fase pari a  $\pi$ , come mostrato in figura.



### 12.2.2.2 Phase Locked Loop o PLL

Una seconda tecnica (nota come *circuito ad aggancio di fase*) adotta invece un approccio a *controreazione*, e si basa sull'utilizzo di un dispositivo chiamato *oscillatore controllato in tensione* (VOLTAGE CONTROLLED OSCILLATOR o VCO<sup>16</sup>) il quale genera una sinusoide

$$y(t) = \sin\left(\omega_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau\right)$$

la cui fase varia nel tempo in proporzione all'integrale del segnale di ingresso  $\varepsilon(\tau)$ <sup>17</sup>.

<sup>13</sup>Realizzato mediante un amplificatore ad elevato guadagno, portato a lavorare in  *saturazione*.

<sup>14</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Divisore\\_di\\_frequenza](https://it.wikipedia.org/wiki/Divisore_di_frequenza)

<sup>15</sup>Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Multivibratore>

<sup>16</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore\\_controllato\\_in\\_tensione](https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore_controllato_in_tensione)

<sup>17</sup>Se ad esempio  $\varepsilon(\tau) = \Delta/k_f$  ossia è *costante*, si ottiene  $y(t) = \sin(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta t) = \sin[2\pi(f_0 + \Delta)t]$ , ovvero la frequenza si è alterata di una quantità pari a  $\Delta$ . Infatti, il vco realizza il processo di  *modulazione di frequenza*, vedi eq. (11.7) a pag. 343.

Lo schema a lato illustra come il ruolo del vco sia quello di generare una portante sfasata di  $\pi/2$  rispetto a quella del segnale  $x(t)$  in arrivo, mentre a quest'ultimo è richiesto di contenere almeno *un residuo* di portante<sup>18</sup>. In uscita dal vco è pertanto presente il segnale  $y(t) = \sin(\omega_0 t + \hat{\theta}(t))$  in cui

$$\hat{\theta}(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) d\tau \quad (12.9)$$

rappresenta la *stima* della fase  $\theta(t)$  del segnale in ingresso, valutata all'istante  $t$ . Eseguendo ora il prodotto tra  $y(t)$  ed il segnale ricevuto<sup>19</sup>  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta(t))$  si ottiene<sup>20</sup>

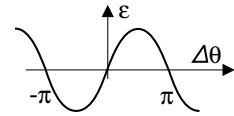
$$\frac{1}{2} \sin[2\omega_0 t + \theta(t) + \hat{\theta}(t)] + \frac{1}{2} \sin[\theta(t) - \hat{\theta}(t)]$$

il cui primo termine è centrato a frequenza doppia ( $2\omega_0$ ) e viene eliminato dal filtro passa basso (detto anche *filtro di loop*), alla uscita del quale troviamo dunque

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \sin[\theta(t) - \hat{\theta}(t)] = \frac{1}{2} \sin(\Delta\theta(t))$$

dove  $\Delta\theta(t) = \theta(t) - \hat{\theta}(t)$  rappresenta l'errore di fase che desideriamo annullare, ed  $\varepsilon(t)$  è la grandezza in ingresso al vco.

Pensiamo ora al caso in cui la  $\theta(t)$  presente nel segnale di ingresso sia *costante*: nel momento in cui  $\Delta\theta = 0$ , si ottiene che anche  $\varepsilon = 0$ , ed il vco *non altera* la fase (esatta) della portante generata. Se invece  $\Delta\theta \geq 0$  (e  $|\Delta\theta| < \pi$ )<sup>21</sup>, allora  $\varepsilon \geq 0$ , e dunque (vedi figura a lato) il vco è portato ad aumentare (diminuire) la fase della propria portante, riducendo di conseguenza l'errore di fase<sup>22</sup>. Nel caso in cui, infine, la fase  $\theta(t)$  del segnale in arrivo vari nel tempo, allora il PLL *insegue* tali variazioni tanto più da vicino, quanto più è elevato il coefficiente di proporzionalità  $k_f$  tra  $\hat{\theta}(t)$  e l'integrale di  $\varepsilon(t)$  che compare nella (12.9)<sup>23</sup>.



<sup>18</sup>Un diverso circuito controreazionato in grado di operare anche per segnali a *portante soppressa* prende il nome di *Costas loop*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Costas\\_loop](https://en.wikipedia.org/wiki/Costas_loop), mentre al § 16.11.1 si discute di una realizzazione relativa ad una trasmissione a *spettro espanso*.

<sup>19</sup>Trascuriamo la presenza di eventuali modulazioni, il cui effetto si intende *mediato* dalla caratteristica passa-basso del PLL, dovuta sia all'integratore presente nel vco, che al filtro di loop.

<sup>20</sup>Utilizziamo qui la relazione  $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ .

<sup>21</sup>La grandezza di controllo  $\varepsilon(t)$  proporzionale a  $\sin(\Delta\theta)$  si azzerava per  $\Delta\theta = k\pi$  con  $k$  intero, positivo o negativo. Per  $k$  *dispari* si hanno condizioni di instabilità, in quanto ad es. per  $\Delta\theta$  che *aumenta o diminuisce* rispetto a  $\Delta\theta = \pi$ , il segno di  $\varepsilon$  è rispettivamente *negativo e positivo*, causando un ulteriore ritardo o aumento di  $\hat{\theta}(t)$  che causa un ulteriore aumento o diminuzione di  $\Delta\theta$ , finché questo non raggiunge il valore 0 o  $2\pi$ , corrispondenti a condizioni di stabilità. In altre parole, se  $|\Delta\theta| < \pi$  si determina un transitorio alla fine del quale  $\varepsilon \rightarrow 0$ , mentre se  $\pi < |\Delta\theta| < 3\pi$  il transitorio converge verso  $\varepsilon \rightarrow 2\pi$ , e così via.

<sup>22</sup>Notiamo che un moltiplicatore, seguito da un filtro passabasso, esegue il calcolo dell'intercorrelazione tra gli ingressi del moltiplicatore (vedi § 7.5.4), che nel nostro caso è una sinusoidale.

<sup>23</sup>Inoltre, le prestazioni del PLL dipendono fortemente anche dalla banda e dall'ordine del *filtro di loop*, che limita la velocità di variazione di  $\varepsilon(t)$  e l'estensione dell'intervallo di aggancio. Lo studio teorico si basa sull'uso della trasformata di Laplace e sulla approssimazione  $\sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$ , in quanto così il PLL

Al § 12.4.3 viene illustrato come utilizzare il PLL allo scopo di generare una portante *stabile* di modulazione a frequenza qualsiasi, a partire da un oscillatore al quarzo.

### 12.2.3 Errori di fase e di frequenza

Cosa accade se la sincronizzazione di portante non è *perfetta*? Qualora tra la portante del demodulatore (§ 12.2.1) e quella del segnale in arrivo  $x(t)$  siano presenti errori di fase  $\theta$  e/o di frequenza  $\Delta f$ , ovvero risulti  $x(t) = \cos(2\pi(f_o + \Delta f)t + \theta)$ , il risultato della demodulazione (non più coerente) risulta pari a<sup>24</sup>:

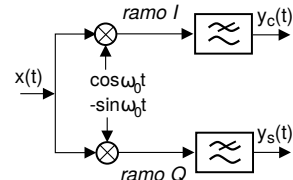
$$\begin{aligned} y(t) &= x_c(t) \cos \omega_0 t \cos [(\omega_o + \Delta\omega)t + \theta] \\ &= \frac{1}{2} x_c(t) [\cos(\Delta\omega t + \theta) + \cos((2\omega_o + \Delta\omega)t + \theta)] \end{aligned}$$

Mentre il termine a frequenza (circa) doppia viene eliminato come di consueto dall'apposito filtro, sul segnale demodulato  $y(t)$  si manifestano ora le seguenti distorsioni:

- in assenza di errori di frequenza ( $\Delta\omega = 0$ ) si ottiene  $y(t) = \frac{1}{2} x_c(t) \cos \theta \leq \frac{1}{2} x_c(t)$  cioè una attenuazione, che può annullare  $y(t)$  se  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ , mentre per  $\theta = \pi$  si ottiene una inversione di segno di  $x_c(t)$ ;
- qualora  $\Delta\omega \neq 0$  si ottiene  $y(t) = \frac{1}{2} x_c(t) \cos(\Delta\omega t)$  e dunque il segnale demodulato, oltre ad invertire periodicamente polarità, presenta una notevole oscillazione di ampiezza che, ad esempio, nel caso di segnale audio può rendere il risultato inintelligibile già con  $\Delta f$  pari a pochi Hertz.

#### 12.2.3.1 Demodulazione I e Q in presenza di errore di fase

Poniamoci ora nel caso in cui nel segnale modulato siano presenti entrambe le c.a. di b.f., ovvero  $x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$ , e si desideri demodularle entrambe. Si ricorre allora al demodulatore *in fase e quadratura* (§ 11.2.4), che prevede due rami (detti anche I e Q) con portanti di demodulazione, appunto, in quadratura.



Applicando i risultati del § 11.2.4, e con riferimento alla notazione adottata nella figura che segue, in condizioni di *coerenza* si ottiene  $y_c(t) = \frac{1}{2} x_c(t)$  e  $y_s(t) = \frac{1}{2} x_s(t)$ . Se viceversa il segnale ricevuto presenta una fase incognita  $\theta$ , e dunque  $x(t) = x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta) - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta)$ , si ottiene invece<sup>25</sup>

$$\begin{aligned} y_c(t) &= \frac{1}{2} (x_c(t) \cos \theta - x_s(t) \sin \theta) \\ y_s(t) &= \frac{1}{2} (x_c(t) \sin \theta + x_s(t) \cos \theta) \end{aligned} \quad (12.10)$$

può essere studiato come un sistema di controllo *linearizzato*, sommariamente descritto al § 12.3.2.1. Per approfondimenti, vedi [http://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked\\_loop](http://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop).

<sup>24</sup>Si applichi  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ .

<sup>25</sup>Per il ramo in fase risulta

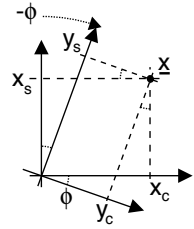
$$\begin{aligned} y_c(t) &= (x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta) - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta)) \cdot \cos \omega_0 t = \\ &= x_c(t) \cos(\omega_0 t + \theta) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin(\omega_0 t + \theta) \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} x_c(t) [\cos(2\omega_0 t + \theta) + \cos \theta] - \frac{1}{2} x_s(t) [\sin(2\omega_0 t + \theta) - \sin(-\theta)] \end{aligned}$$

mentre svolgendo simili sviluppi per il ramo in quadratura, si giunge a

$$y_s(t) = \frac{1}{2} x_c(t) [\sin \theta - \sin(2\omega_0 t + \theta)] + \frac{1}{2} x_s(t) [\cos \theta - \cos(2\omega_0 t + \theta)]$$

Anche qui i filtri passabasso eliminano le componenti centrate a  $2f_0$ , permettendo di ottenere la (12.10).

Ovviamente, per  $\theta = 0$  le (12.10) si riducono al caso noto, mentre *curiosamente* per uno sfasamento  $\theta = \frac{\pi}{2}$  le due c.a. di b.f. (a parte un segno) si invertono di ruolo. Un ragionamento più approfondito è fornito a pag. 345, e dimostra che  $\theta$  rappresenta l'angolo di cui ruota il piano dell'involuppo complesso tra  $\underline{x}(t)$  e  $\underline{y}(t)$ . Ad ogni modo il sistema (12.10) è perfettamente invertibile, qualora  $\theta$  sia noto.



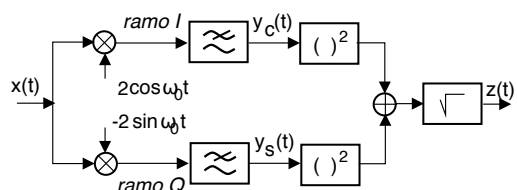
### 12.2.4 Demodulazione incoerente

Si tratta di uno schema utile nella *fase di ricerca* della regione di frequenza in cui è presente un segnale<sup>26</sup>, ovvero quando si desidera verificare la presenza o meno di un segnale ad una determinata frequenza. In tale schema la coerenza di fase tra la portante ricevuta e quella di demodulazione viene deliberatamente *trascurata*, adottando una architettura che utilizza anche il ramo *in quadratura*.

Se consideriamo un segnale AM-BLD-PS ricevuto in presenza di una fase  $\theta$  incognita rispetto alla portante del ramo I del demodulatore, ovvero  $x(t) = m(t) \cos(\omega_0 t + \theta)$ , il relativo involuppo complesso rispetto ad  $f_0$  ( $\theta = 0$ ) risulta pari a

$$\underline{x}(t) = m(t) e^{j\theta} = m(t) \cos \theta + jm(t) \sin \theta$$

le cui parti reale ed immaginaria corrispondono all'uscita dei filtri passa-basso posti sui rami del demodulatore I-Q mostrato in figura, ossia  $y_c(t) = m(t) \cos \theta$  e  $y_s(t) = m(t) \sin \theta$ , come si ottiene (a parte un fattore  $1/2$ ) dalle (12.10) avendo posto  $x_c(t) = m(t)$  e  $x_s(t) = 0$ . Dunque il segnale  $z(t)$  di uscita corrisponde a



$$z(t) = \sqrt{y_c^2(t) + y_s^2(t)} = |m(t)| \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = |m(t)|$$

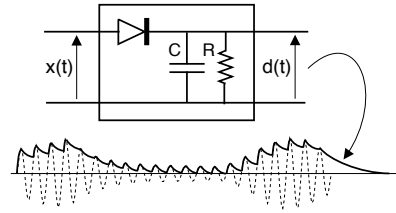
Pertanto, nonostante l'ignoranza della fase  $\theta$ , siamo ancora in grado di individuare la *presenza* di un segnale modulante. L'operazione di modulo impedisce l'uso dello schema per demodulare generici segnali BLD-PS, mentre il caso PI sarebbe perfettamente demodulabile, ma per quello è più che sufficiente il demodulatore *di involuppo* discusso al § seguente. Infine, al § 14.4.2 si illustra come usare il demodulatore incoerente per decidere per la presenza o meno di una sinusoida a cui è sovrapposto un rumore gaussiano, e viene valutata la relativa probabilità di errore.

<sup>26</sup>La ricerca dell'emittente può essere l'azione banale di sintonizzare a mano la propria radio sul programma preferito, oppure (come si dice, in modalità *ricerca automatica*), mediante un circuito del tipo di cui stiamo discutendo, con il quale vengono *provate* diverse portanti di demodulazione, finché non si riscontra un segnale in uscita.

In generale, la ricezione della comunicazione vera e propria viene preceduta da una fase di *acquisizione della portante*, svolta ad esempio come qui accennato, dopodiché la sincronizzazione è mantenuta mediante interventi automatici (ad es. via PLL), necessari qualora si tratti di dover compensare le variazioni di frequenza dovute ad esempio al movimento reciproco di trasmettitore e ricevitore (*effetto doppler*), come per il caso delle comunicazioni con mezzi mobili, vedi § 20.4.6.

### 12.2.5 Demodulatore di involuppo per AM-BLD-PI

Si tratta del semplice circuito *non lineare* riportato in figura<sup>27</sup>. Durante i periodi in cui il segnale in ingresso  $x(t)$  è positivo rispetto alla tensione  $d(t)$  accumulata dal condensatore, quest'ultimo si carica, inseguendo l'andamento dell'ingresso. Quando diviene  $x(t) < d(t)$ , il condensatore si scarica sulla resistenza con una costante di tempo (pag. 22)  $\tau = RC$ , abbastanza grande rispetto al periodo della portante  $\frac{1}{f_0}$ , e tale da permettere la ricostruzione dell'andamento di  $x_c(t)$ . Le oscillazioni a frequenza  $f_0$  (e sue armoniche) possono quindi essere rimosse da un successivo filtro passa-basso, mentre la costante  $a_p$  è rimossa mediante un passa alto. D'altra parte, il valore di  $\tau$  deve essere scelto né troppo piccolo né troppo grande, per evitare una eccessiva *seghettatura*, ed al contempo riuscire ad inseguire anche le variazioni più rapide del messaggio<sup>28</sup>.



La semplicità del circuito è tale da farlo usare nel maggior numero di casi possibili, anche se il suo uso prevalente è per la demodulazione di segnali a *portante intera*. D'altra parte, la contemporanea presenza di altri segnali modulati con portante diversa da quella del segnale desiderato rendono obbligatoria l'adozione di ulteriori provvedimenti, come discusso nel § 12.2.7 relativo alla demodulazione *eterodina*.

### 12.2.6 Demodulazione per segnali a banda laterale unica e ridotta

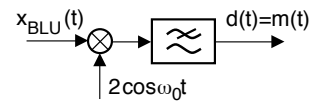
Nel caso di segnali BLU (§ 12.1.2)

$$x_{BLU}(t) = m(t) \cos \omega_0 t - \widehat{m}(t) \sin \omega_0 t$$

il segnale modulante  $m(t)$  può essere riottenuto a partire da  $x(t)$  utilizzando il demodulatore omodina mostrato in figura, dato che la componente in fase  $x_c(t)$  dell'involuppo complesso corrisponde proprio pari ad  $m(t)$ . Occorre però prestare attenzione ad eventuali errori di frequenza e di fase ( $\Delta f$  e  $\theta$ ) della portante di demodulazione perché, essendo presenti entrambe le componenti  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$ , come mostrato al § 12.2.3.1 in uscita dal demodulatore si ottiene (nel caso di banda laterale superiore):

$$d(t) = m(t) \cos(\Delta\omega t + \theta) - \widehat{m}(t) \sin(\Delta\omega t + \theta)$$

Pertanto la modulazione BLU è più sensibile di quella BLD agli errori della portante di demodulazione, dato che anche un semplice errore di fase  $\theta$  produce non solo un affievolimento, ma un vero fenomeno di *interferenza* tra  $m(t)$  e  $\widehat{m}(t)$ . Per evitare che ciò accada, nella trasmissione blu è spesso presente una portante parzialmente soppressa, in modo da agevolare il funzionamento delle tecniche di recupero portante.



<sup>27</sup>Il simbolo  $\text{--}\blacktriangleright$  rappresenta un *diodo*, costituito da un bipolo di materiale semiconduttore drogato, che ha la particolarità di condurre in un solo verso (quello della freccia).

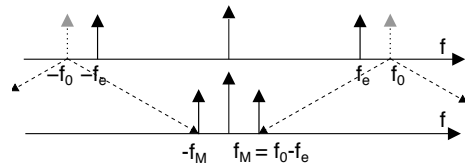
<sup>28</sup>Presso [http://it.wikipedia.org/wiki/Rivelatore\\_d'involuppo](http://it.wikipedia.org/wiki/Rivelatore_d'involuppo) qualche linea guida di progetto.

Anche nel caso BLR è possibile ricorrere ad un demodulatore di tipo omodina, evitando i problemi di sincronizzazione di fase illustrati, purché il filtro  $H(f)$  usato in trasmissione per rimuovere parte di una banda laterale presenti alcune condizioni di simmetria attorno a  $f_0$ <sup>29</sup>.

**Ampiezza dei segnali BLU** Le variazioni di ampiezza dei segnali AM-BLU sono ben maggiori che nel caso BLD, a causa del brusco troncamento spettrale causato dal filtro di Hilbert, e dalla distorsione di fase non lineare associata, e di ciò va tenuto conto per evitare fenomeni di saturazione e distorsione non lineare (§ 8.3), anche adottando adeguate contromisure<sup>30</sup>.

### 12.2.7 Demodulatore eterodina

Individua la tecnica di utilizzare una frequenza di demodulazione *diversa* da quella della portante<sup>31</sup>, e fu inventata per rendere udibili i segnali in *codice Morse*<sup>32</sup> trasmessi via radio in forma di una portante intermittente  $f_0$ : dato che  $\cos \alpha \cos \beta = 1/2 (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta))$ , scegliendo la frequenza di eterodina  $f_e$  di poco inferiore a quella della portante  $f_0$  il termine a frequenza  $f_0 - f_e$  cade infatti nella banda udibile. Da un punto di vista grafico il risultato equivale a *sommare e sottrarre* la frequenza eterodina alle frequenze dell'altro segnale, traslando così  $f_0$  in  $f_0 \pm f_e$ : indichiamo di qui in poi la differenza  $f_0 - f_e$  con il termine di *media frequenza*  $f_M$ , detta anche frequenza *intermedia* o IF.



**Piccola storia della radio** Con lo sviluppo della trasmissione radio di segnali modulati, le diverse emittenti eseguivano trasmissioni AM-BLD-PI ognuna su di una portante differente; sebbene fosse possibile *sintonizzare* ciascuna emittente con un demodulatore omodina centrato sulla relativa portante, i dispositivi del tempo soffrivano di fenomeni di *deriva*, e non essendo ancora stato inventato il PLL, la portante di demodulazione *slittava*. Inoltre la tecnica omodina soffriva anche del problema del *rientro* della portante di demodulazione sull'altro ingresso del mixer, comportando l'insorgenza di una *componente continua* in uscita dal mixer stesso, in grado di mandare *in saturazione* il successivo stadio di amplificazione<sup>33</sup>.

<sup>29</sup>Si può dimostrare che per l'involuppo complesso  $\underline{H}(f)$  di  $H(f)$  deve risultare:  $\underline{H}(f) + \underline{H}^*(-f) = \text{cost}$  perché in tal modo il residuo di banda parzialmente soppressa si combina esattamente con ciò che manca alla banda laterale non soppressa.

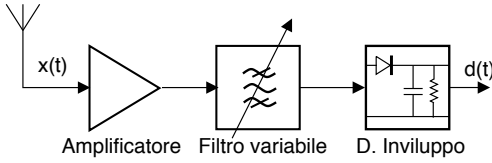
<sup>30</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Amplitude-companded\\_single-sideband\\_modulation](https://en.wikipedia.org/wiki/Amplitude-companded_single-sideband_modulation)

<sup>31</sup>Per la storia in maggior dettaglio, vedi ad es. <https://en.wikipedia.org/wiki/Heterodyne>

<sup>32</sup>In origine il segnale telegrafico (lett. *scrittura a distanza*) era trasmesso via cavo; per approfondimenti vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Morse\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Morse_code) e

[https://en.wikipedia.org/wiki/Wireless\\_telegraphy](https://en.wikipedia.org/wiki/Wireless_telegraphy)

<sup>33</sup>A causa di fenomeni di induzione elettromagnetica che si manifestano tra conduttori presenti all'interno del circuito di demodulazione (che perdipiù aumentano con il valore delle frequenze in gioco) la portante di demodulazione omodina può appunto *rientrare* nella via percorsa dal segnale modulato. Se in ingresso al mixer è presente, oltre al segnale da demodulare a *portante soppressa*, anche un termine

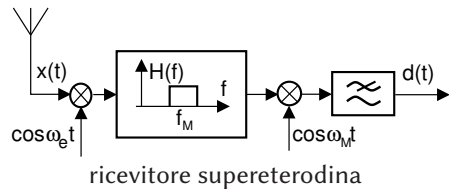


Si provò quindi ad adottare una modulazione a portante intera in modo da poter adottare un demodulatore ad inviluppo, ma in tal caso l'emittente desiderata doveva essere prima *selezionata* an-

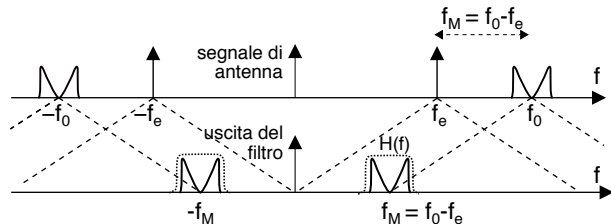
teponendo al demodulatore un filtro passa banda *variabile* centrato sulla portante dell'emittente desiderata (vedi figura), filtro di difficile realizzazione all'aumentare della frequenza<sup>34</sup>.

### 12.2.7.1 Supereterodina

La serie di considerazioni sopra svolte portò alla scelta di adottare in modo sistematico la tecnica di demodulazione eterodina, detta *super-* qualora si scelga una frequenza intermedia  $f_M$  *più elevata* di quelle dello spettro udibile<sup>35</sup>, dando luogo allo schema di ricevitore che potremmo definire *in due passi* mostrato a lato: volendo sintonizzare l'emittente con portante  $f_0$  il segnale ricevuto viene innanzitutto moltiplicato per una portante *eterodina*  $f_e = f_0 - f_M$ , in modo che lo spettro dell'emittente centrata su  $f_0$  sia traslato alla *frequenza intermedia*  $f_M = f_0 - f_e$ . A quel punto un filtro passa banda *fisso* centrato su  $f_M$  permette di isolare l'emittente desiderata, che viene successivamente portata in banda base ad opera dello stadio di demodulazione *omodina* operante a frequenza  $f_M$ .



Da un punto di vista grafico accade quanto mostrato in figura, con la frequenza  $f_e$  che viene *sommata e sottratta* a tutte le frequenze in ingresso al primo mixer, portando in  $f_M$  l'emittente centrata su di una  $f_0$  distante da  $f_e$  di una quantità pari alla loro differenza  $f_0 - f_e$ .



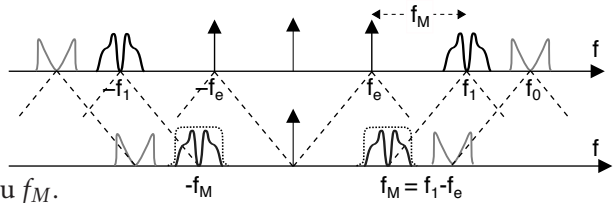
La sintonia di una diversa emittente avviene variando esclusivamente  $f_e$ , e quindi

alla stessa frequenza portante, si verifica un fenomeno noto come *self-mixing* dovuto all'eguaglianza  $\cos^2 \alpha = 1/2 (1 + \cos 2\alpha)$  che determina la comparsa di un termine *in continua*, e che non può essere eliminato mediante filtraggio passa alto qualora il segnale modulato presenti componenti energetiche prossime a frequenza zero. Lo stadio di amplificazione successivo mantiene un funzionamento lineare solo per valori di ingresso compresi in uno specifico intervallo, come discusso al § 8.3, mentre il valore medio ora presente può portare il segnale di ingresso *al di fuori* di tale dinamica.

<sup>34</sup>Le difficoltà nascono sia dall'esigenza di *accordare* il filtro attorno alla frequenza portante desiderata, sia dalla necessità di attenuare sufficientemente le trasmissioni che avvengono su frequenze limitrofe, determinando la necessità di realizzare un filtro con regione di transizione molto ripida, problema che può divenire insormontabile se il rapporto tra banda del segnale e portante (la cosiddetta *banda frazionaria*) è particolarmente ridotto.

<sup>35</sup>Il prefisso *super* venne scelto come contrazione di *supersonic heterodyne*, e dato che agli inizi del '900 di certo non esistevano aerei *supersonici*, indicava il concetto di *sopra i suoni*, in contrapposizione al suo uso originario di traslare il segnale *radiotelegrafico* in banda audio.

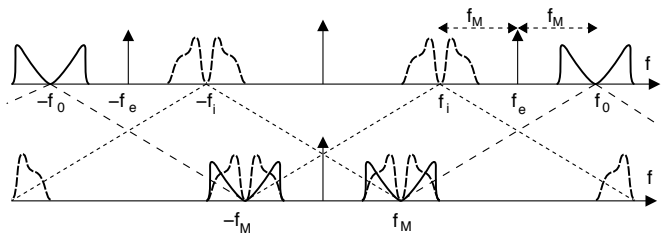
volendo ricevere ad esempio quella centrata in  $f_1$ , si imposta  $f_e = f_1 - f_M$  come mostrato in questa seconda figura, in modo che ora sia la seconda emittente a cadere dentro il filtro centrato su  $f_M$ .



### 12.2.7.2 Frequenza immagine

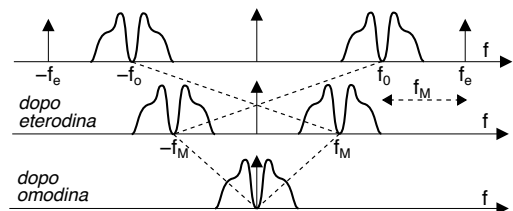
In realtà un ricevitore eterodina prevede la presenza di un ulteriore filtro posto *prima* del mixer con  $f_e$ , necessario ad evitare che in ingresso al filtro a media frequenza si presentino, oltre all'emittente centrata a  $f_0 = f_e + f_M$ , anche quella a portante  $f_i = f_e - f_M$ , per la quale cioè  $f_e - f_i = f_M$ .

La frequenza  $f_i$  prende il nome di *frequenza immagine*, in quanto è l'immagine speculare di  $f_0$  rispetto ad  $f_e$ ; in altre parole, l'utilizzo di una portante eterodina  $f_e$



provoca la traslazione a media frequenza sia della emittente desiderata e centrata in  $f_0 = f_e + f_M$ , sia della sua immagine a distanza  $2f_M$ , centrata in  $f_i = f_e - f_M$ . Pertanto in ingresso al ricevitore va anteposto un filtro che elimini dal segnale di ingresso le frequenze immagine, ovvero, una volta nota la gamma di frequenze che si vuole sintonizzare, elimini tutte le trasmissioni centrate su portanti a frequenze minori di  $f_e$ .

**Scelta della frequenza di eterodina** Le trasmissioni *broadcast* AM<sup>36</sup> adottano portanti nella regione di frequenze detta delle *onde medie* (540-1600 KHz) con modulazione AM-BLD-PI ed utilizzano un ricevitore per il quale si sceglie una  $f_e$  maggiore della frequenza  $f_0$  da sintonizzare anziché *minore* come prima illustrato, con il risultato che ora la frequenza immagine  $f_i$  è quella che si trova *al disopra* della  $f_0$ , come mostrato nello schema a lato. Per queste trasmissioni si è scelto di utilizzare una frequenza intermedia  $f_M$  pari a 455 KHz, quindi volendo ad esempio sintonizzare una emittente con  $f_0 = 600$  KHz occorre una  $f_e = f_M + f_0 = 1055$  KHz, ma allo stesso tempo anche l'emittente relativa alla portante  $f_i = f_e + f_M = 1510$  KHz viene traslata nella banda del filtro a frequenza intermedia. Pertanto, prima del mixer operante ad  $f_e$  va posto un filtro che lasci passare solo le emittenti centrate a portanti inferiori ad  $f_e$ , reintroducendo l'esigenza di un filtro variabile, ma meno complesso di quello di pag. 374 dato che questo non ha lo scopo di filtrare una sola emittente, ma l'intera banda.



<sup>36</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/AM\\_broadcasting](https://en.wikipedia.org/wiki/AM_broadcasting)

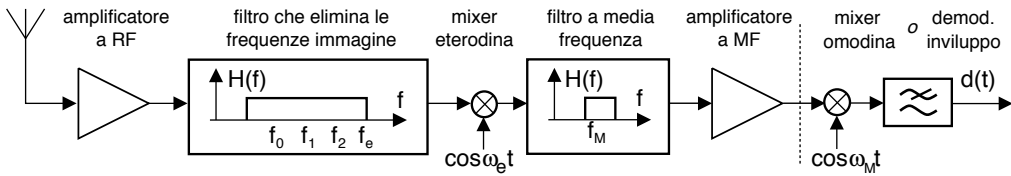


Figura 12.2: Schema di un ricevitore supereterodina con  $f_e$  maggiore della frequenza sintonizzata

La scelta  $f_M = 455\text{ KHz}$ , inferiore alla minima frequenza di  $510\text{ KHz}$ , permette di utilizzare per la media frequenza una regione dello spettro libera da altre trasmissioni<sup>37</sup>, che altrimenti potrebbero essere amplificate dagli stadi ad alto guadagno posti dopo il filtro MF. La scelta di  $f_e > f_0$  permette poi di posizionare il filtro *passa banda* che elimina le frequenze immagine *al disotto* della  $f_e$ , rendendo più semplice la sua realizzazione. La figura 12.2 mostra lo schema generale<sup>38</sup> (compresi gli stadi di amplificazione) per un ricevitore supereterodina con  $f_e > f_0$ . Riassumiamo i vantaggi ottenuti:

- la sintonia avviene mediante la variazione di  $f_e$ , ed il resto non cambia;
- la separazione tra  $f_0$  ed  $f_M$  scongiura il rischio di instabilità che si potrebbe verificare se il segnale uscente dal filtro di media frequenza, amplificato, fosse ri-captato dallo stadio di ingresso, mentre ora invece l'amplificazione può aver luogo proprio nello stadio a media frequenza;
- il ridotto valore di  $f_M$  rispetto alla banda di frequenze di cui si opera la sintonia permette la realizzazione di un filtro passa banda a media frequenza di ridotta complessità e migliore selettività;
- per un segnale a portante intera lo stadio omodina è sostituito da uno ad involuppo, senza necessità di generare  $f_0$ .

**Conversione di frequenza multipla** Notiamo che lo stadio di eterodina può essere ulteriormente ripartito in due conversioni di frequenza successive (vedi ad es. la fig. 25.6 a pag. 865), di cui la seconda conversione opera la sintonia, mentre la prima ha il solo scopo di traslare la banda di interesse in una regione centrata su di una frequenza inferiore, in cui il mezzo trasmissivo (ad es. un cavo coassiale) presenta minore attenuazione. Inoltre, la tecnica di mixing eterodina viene utilizzata anche negli apparati ripetitori<sup>39</sup>, in cui la frequenza di trasmissione deve differire da quella di ricezione per evitare fenomeni di auto-interferenza.

<sup>37</sup>Il valore della frequenza intermedia utilizzata per le diverse bande in cui operano sistemi di radio diffusione è determinato in seno ad enti di standardizzazione, e le autorità di concessione della licenza di trasmissione evitano di assegnare alle emittenti frequenze nella stessa banda in cui è prevista l'uso di una frequenza intermedia, allo scopo di impedire *interferenze* nella medesima banda da parte di una diversa trasmissione. Oltre alla MF a  $455\text{ KHz}$  del broadcast AM, abbiamo ad esempio valori di media frequenza pari a  $10.7\text{ MHz}$  per il broadcast FM,  $38.9\text{ MHz}$  per la televisione,  $70\text{ MHz}$  per trasmissioni a microonde terrestri e satellitari.

<sup>38</sup>Nel caso di trasmissione a portante intera lo stadio eterodina finale viene rimpiazzato da un demodulatore involuppo, oppure ancora da un demodulatore in fase e quadratura per gli usi più generali.

<sup>39</sup>Vedi ad es. il caso di un *transponder* satellitare, § 25.3.3

**Realizzazione numerica** Dopo lo stadio di eterodina, il segnale centrato a media frequenza presenta un valore di frequenza massima  $W$  assai ridotto rispetto alla sua versione modulata, permettendo di attuare su di esso le tecniche di (sotto)campionamento (§ 4.8) ed operare le restati operazioni, come la demodulazione in fase e quadratura, in via completamente numerica. Dato che attualmente tutti i ricevitori operano in questo modo, la questione viene approfondita al cap. ??.

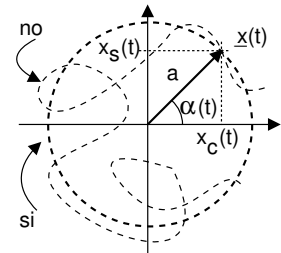
### 12.3 Modulazione angolare

In questo caso l'informazione contenuta nel messaggio  $m(t)$  è impressa sulla portante modificandone la fase  $\alpha(t)$ , ottenendo un segnale modulato

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t)) \tag{12.11}$$

il cui involuppo complesso (vedi eq. (11.3)) vale  $\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = x_c(t) + jx_s(t)$ , dove  $x_c(t) = a \cos \alpha(t)$  e  $x_s(t) = a \sin \alpha(t)$ .

Notiamo subito che a differenza della modulazione di ampiezza, il modulo di  $\underline{x}(t)$  è rigorosamente *costante*, e la sua fase  $\alpha(t)$  può evolvere nel tempo unicamente su di una circonferenza di raggio  $a$ . Si è già mostrato al § 11.2.2 come il legame tra messaggio  $m(t)$  e fase dell'involuppo complesso  $\alpha(t)$  possa essere descritto come modulazione di *fase* (o PM, *phase modulation*) qualora risulti  $\alpha(t) = k_\phi m(t)$ , oppure nei termini di una modulazione di *frequenza* (o FM) qualora si scelga  $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$ , dove  $k_\phi$  e  $k_f$  sono coefficienti di proporzionalità che *dosano* l'intensità della modulazione introdotta.



La relazione che lega la *frequenza istantanea*  $f_i(t)$  ad  $m(t)$  dipende dal legame tra  $\alpha(t)$  ed  $m(t)$ ; ricordando la definizione (eq. (11.6)) di  $f_i(t)$  come la derivata della *fase istantanea*  $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \alpha(t)$ , ovvero

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t) \tag{12.12}$$

	$\alpha(t)$	$f_i(t)$
PM	$k_\phi m(t)$	$f_0 + \frac{k_\phi}{2\pi} \frac{d}{dt} m(t)$
FM	$2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$	$f_0 + k_f m(t)$

si ottiene la tabella a lato che riassume la dipendenza della fase  $\alpha(t)$  e della frequenza istantanea  $f_i(t)$  da  $m(t)$  per entrambi i tipi di modulazione angolare. Le due alternative PM e FM sono quindi esaminate assieme, in quanto intercambiabili qualora si effettui

Tabella 12.2: Legame tra segnale modulante  $m(t)$ , fase modulata  $\alpha(t)$ , e frequenza istantanea  $f_i(t)$

- una PM con  $m(t)$  pari all'integrale del messaggio informativo *oppure*
- una FM con  $m(t)$  pari alla derivata del messaggio informativo.

Prima di affrontare gli aspetti della generazione, ricezione, e determinazione della densità di potenza di un segnale modulato angolarmente, analizziamo due sue peculiarità.

**Non linearità** Una caratteristica *fondamentale* della modulazione angolare è che il segnale modulato  $x(t)$  dipende da quello modulante  $m(t)$  in modo fortemente *non lineare*, e pertanto lo spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  di (12.11) non può essere calcolato allo stesso modo del caso AM. Infatti, l'involuppo complesso di un segnale modulato angolarmente può essere espresso<sup>40</sup> come:

$$\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = a \left[ 1 + j\alpha(t) - \frac{\alpha^2(t)}{2} - j\frac{\alpha^3(t)}{3!} + \dots \right] \quad (12.13)$$

da cui risulta evidente che, anche se  $\mathcal{P}_\alpha(f)$  può essere espressa in funzione di  $\mathcal{P}_m(f)$  in base alle relazioni di tab. 12.2, nulla può essere detto in generale per  $\mathcal{P}_x(f)$ , e dunque per  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4}\mathcal{P}_x(f - f_0) + \frac{1}{4}\mathcal{P}_x(-f - f_0)$  (eq. (11.20)). Infatti, la presenza delle potenze della fase modulante  $\alpha(t)$  impedisce l'applicabilità del principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero, anche se sono noti i risultati della modulazione per due diversi messaggi  $x_1(t) = FM\{m_1(t)\}$  e  $x_2(t) = FM\{m_2(t)\}$ , il risultato ottenibile modulando la loro somma *non è pari* alla somma dei risultati individuali:  $FM\{m_1(t) + m_2(t)\} \neq FM\{m_1(t)\} + FM\{m_2(t)\}$ .

**Ampiezza costante** La circostanza che  $\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)}$  presenti un modulo costante pari ad  $a$ , indipendentemente dall'ampiezza del segnale modulante, è particolarmente utile qualora per  $m(t)$  siano previste forti variazioni di dinamica, come ad es. nel caso del segnale FDM (pag. 339) utilizzato per trasmettere più canali telefonici<sup>41</sup>. Infatti in questo caso, non essendo noto a priori il numero di canali effettivamente impegnati, la potenza del segnale  $y(t) = \sum_{n=1}^N BLU\{m_n(t), f_n\}$  ottenuto sommando i diversi canali (ognuno a modulazione BLU su di una diversa portante  $f_n$ ) può variare di molto. Il segnale complessivo  $y(t)$  viene dunque applicato all'ingresso di un modulatore FM e trasmesso a piena potenza, senza subire distorsioni di non linearità (vedi § 8.3 e 13.3.3).

### 12.3.1 Generazione di un segnale a modulazione angolare

Il metodo *più diretto* di generare un segnale FM è quello di utilizzare un vco (introdotto al § 12.2.2.2), ossia un oscillatore controllato in tensione, che produce il segnale

$$x(t) = a \sin \left( \omega_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right)$$

e dunque realizza proprio la funzione desiderata. D'altra parte, per effettuare una modulazione PM per la quale  $\alpha(t) = k_\phi m(t)$  si può usare un modulatore FM a partire da una fase modulante  $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m'(\tau) d\tau$ , ponendo  $m'(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{k_\phi}{k_f} \frac{d}{dt} m(t)$ . Un terzo metodo di modulazione è illustrato per un caso particolare, al § 12.4.6.

Entrambi i segnali FM e PM possono infine essere ottenuti mediante il modulatore in fase e quadratura (pag. 343) alimentato dalle c.a. di b.f.  $x_c(t) = \cos \alpha(t)$  e  $x_s(t) = \sin \alpha(t)$ , come effettivamente accade in diversi casi di modulazione numerica, vedi il cap. 16.

<sup>40</sup>Si fa qui uso della espansione in serie di potenze dell'esponenziale:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

<sup>41</sup>Un altro caso di multiplex FDM è quello del downlink di un trasponder DVB-S, introdotto al § 25.3

### 12.3.2 Ricezione di un segnale a modulazione angolare

Di base, si può utilizzare un demodulatore *coerente* in fase e quadratura (§ 11.2.4) per ottenere le c.a. di b.f.  $x_c(t)$  ed  $x_s(t)$  a partire dal segnale modulato, e da queste ricavare la fase modulata  $\alpha(t)$  applicando la seconda eq. (11.9), ovvero  $\alpha(t) = \arctan 2(x_s, x_c)$  (42), ottenendo infine  $m(t)$  invertendo le relazioni di tab. 12.2. Una soluzione del genere è tuttavia possibile solo nell'ambito di una implementazione *numerica*, a causa della difficoltà realizzativa di un dispositivo circuitale che presenti esattamente la relazione non lineare di tipo arcotangente. Illustriamo quindi i due metodi più comunemente usati nel mondo *analogo*.

#### 12.3.2.1 Ricevitore a PLL

Al § 12.2.2.2 si è già mostrato l'uso del circuito PLL per l'aggancio della fase della portante di modulazione. Lo stesso schema può essere usato per *inseguire* l'andamento temporale della fase di una portante modulata angularmente, realizzando al contempo la funzione desiderata.

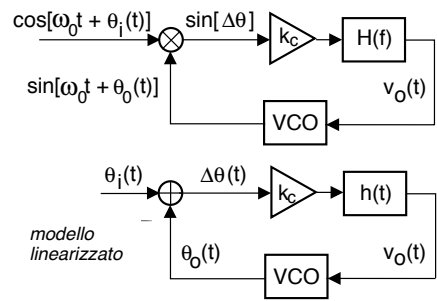
La figura a lato riporta lo schema generale di un PLL, in cui il vco genera un segnale pari a  $\sin(\omega_0 t + \theta_o(t))$ , con  $\theta_o(t) = k_v \int_{-\infty}^t v_o(\tau) d\tau$ , mentre il segnale ricevuto ha la forma  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta_i(t))$ . Lo schema può essere analizzato con i metodi dei controlli automatici, in quanto rappresenta un sistema che tenta di mantenere nullo l'errore  $\sin \Delta\theta$ , con  $\Delta\theta(t) = \theta_i(t) - \theta_o(t)$  (vedi § 12.2.2.2); tale analisi si basa sulla *linearizzazione*  $\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$ , valida per  $\Delta\theta$  piccolo. In tal caso l'analisi di Laplace<sup>43</sup> permette (vedi fig. sotto) di scrivere la relazione

$$\Theta_o(s) = \frac{k_c k_v H(s)}{s + k_c k_v H(s)} \Theta_i(s) \tag{12.14}$$

che consente di esprimere  $\theta_o(t)$  (fase del vco) come la versione *filtrata* della fase della portante modulata  $\theta_i(t)$ , da parte della risposta in frequenza *ad anello chiuso*

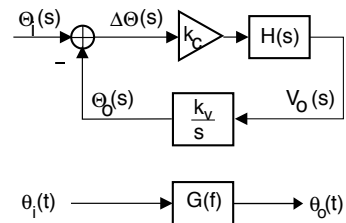
$$G(f) = \left. \frac{k_c k_v H(s)}{s + k_c k_v H(s)} \right|_{s=j2\pi f}$$

Ricordando che la fase  $\theta_o(t)$  del vco corrisponde a  $\theta_o(t) = k_v \int_{-\infty}^t v_o(\tau) d\tau$ , possiamo constatare come il segnale  $v_o(t)$  al suo ingresso (ovvero l'uscita del filtro di loop  $H(s)$ ) corrisponda alla ricostruzione del messaggio modulante  $m(t)$  nel caso di modulazione FM! Pertanto, il segnale  $v_o(t)$  realizza la funzione di demodulazione di frequenza.



In tal caso l'analisi di Laplace<sup>43</sup>

permette (vedi fig. sotto) di scrivere la relazione



<sup>42</sup>Ricordiamo che  $\arctan 2$  restituisce un angolo compreso nell'intervallo  $(-\pi, \pi)$  anziché  $(-\pi/2, \pi/2)$ .

<sup>43</sup>La (12.14) dà luogo ad una funzione di trasferimento ad anello chiuso il cui ordine dipende da come è realizzato il filtro passa basso. Per approfondimenti, vedi [https://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked\\_loop](https://it.wikipedia.org/wiki/Phase-locked_loop).

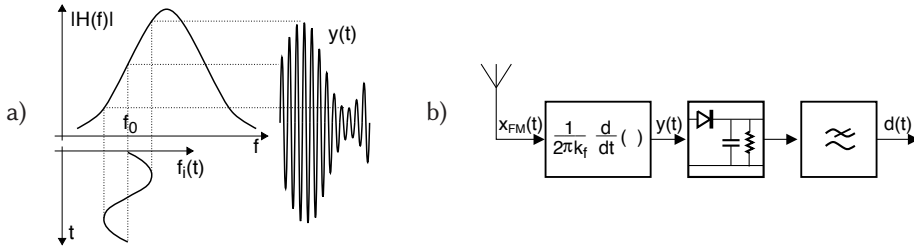


Figura 12.3: a) - conversione FM-AM; b) - schema del demodulatore a discriminatore

### 12.3.2.2 Ricevitore a discriminatore

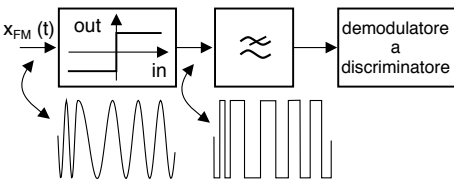
Questa seconda architettura di demodulatore di frequenza si basa su di un fenomeno detto *conversione FM-AM*, di cui in figura 12.3-a) è mostrato il principio di funzionamento più semplice, e noto come *rivelatore a pendenza* (SLOPE DETECTOR).

Un circuito risonante *accordato* ad un frequenza maggiore di  $f_0$  realizza una risposta in frequenza  $H(f)$  il cui modulo aumenta in maniera pressoché lineare nella banda di segnale, simulando così l'effetto di una derivata (vedi § 3.6). La figura mostra come, al variare della frequenza istantanea  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$ , l'ampiezza del segnale (passabanda)  $y(t)$  uscente dal derivatore *vari* in misura del valore (tempo variante) di  $|H(f)|_{f=f_i(t)}$ , ottenendo così un segnale modulato *in ampiezza* dalle stesse variazioni di  $f_i(t)$ , ovvero di  $m(t)$ . La figura 12.3-b) mostra quindi uno schema che utilizza il fenomeno descritto per ricostruire il segnale modulante  $m(t)$  a partire da  $y(t)$  mediante un semplice demodulatore di involuppo (§ 12.2.5). Svolgendo infatti i passaggi, il segnale uscente dal derivatore risulta pari a<sup>44</sup>

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} a \cos \left( 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right) = \\
 &= \frac{1}{2\pi k_f} \left( 2\pi f_0 + 2\pi k_f m(t) \right) a \sin \left( 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right)
 \end{aligned}$$

che corrisponde ad un segnale modulato sia angolarmente che in ampiezza, ed in particolare la cui ampiezza risulta  $a(t) = a(f_0/k_f + m(t))$ . Pertanto con una scelta opportuna<sup>45</sup> di  $f_0/k_f$  la modulazione di ampiezza è riconducibile al caso BLD-PI (§ 12.1.1.2), e quindi il messaggio  $m(t)$  può essere recuperato mediante un demodulatore d'involuppo (§ 12.2.5).

Il risultato ottenuto è valido purché il segnale modulato  $x(t)$  sia esso stesso privo di variazioni di ampiezza: per questo motivo il derivatore è spesso preceduto da un blocco



il derivatore è spesso preceduto da un blocco *squadratore*, che produce una versione, appunto, "squadrata" del segnale ricevuto e quindi priva di modulazione di ampiezza. Essendo

<sup>44</sup>La derivata di  $\cos[\alpha(t)]$  è pari a  $-\sin[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t)$ , ma il segno  $-$  è influente ai fini dell'elaborazione successiva.

<sup>45</sup>L'utilizzo del demodulatore involuppo è possibile solo nel caso di una modulazione a portante intera, ovvero per cui  $\frac{f_0}{k_f} + m(t) > 0$  per  $\forall t$ , e dunque è necessario che risulti  $k_f < \frac{f_0}{\max_t \{|m(t)|\}}$ .

lo squadratore fortemente non lineare, in uscita saranno presenti, oltre al segnale originario, anche componenti centrate a frequenze multiple di quella della portante, che vengono rimosse mediante un filtro passa basso posto a valle dello squadratore.

### 12.3.3 Densità spettrale di segnali a modulazione angolare

Come già osservato a pag. 378, la relazione (12.13) che esprime l'involuppo complesso di un segnale modulato angularmente nei termini di una serie di potenze

$$\underline{x}(t) = ae^{j\alpha(t)} = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[j\alpha(t)]^n}{n!} \quad (12.15)$$

non può essere utilizzata in modo diretto per ottenere quella dello spettro di densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato in funzione di una generica fase modulante  $\alpha(t)$ ; ciononostante, la (12.15) costituisce comunque un punto di partenza per analizzare altri aspetti della situazione.

Osserviamo innanzitutto che, essendo  $|\underline{x}(t)| = a$ , la sua potenza totale ha sempre valore  $\mathcal{P}_x = a^2$ , indipendentemente da  $\alpha(t)$ , e dunque<sup>46</sup>  $\mathcal{P}_x = \frac{a^2}{2}$ . Inoltre, la presenza nella (12.15) di potenze di  $\alpha(t)$  di qualunque ordine sembrerebbe indicare che  $\mathcal{P}_x(f)$  abbia una banda infinita: in realtà la presenza dei fattoriali a denominatore fa sì che la serie possa essere troncata ad un certo ordine  $N < \infty$ , e dunque  $\underline{x}(t)$  sia da considerare limitato in banda.

Per speculare sull'influenza di  $\alpha(t)$  sul segnale modulato, notiamo che quanto più  $|\alpha(t)|$  è piccolo, tanto prima la (12.15) può essere troncata con errori trascurabili; se poi  $\alpha(t)$  si mantiene sempre *molto piccolo*, ci si può limitare al solo primo termine ( $n = 1$ ), dando così luogo ad un comportamento *lineare*, dato che in tal caso si ottiene  $\underline{x}(t) = a(1 + j\alpha(t))$ . Se viceversa  $\alpha(t)$  assume valori *molto elevati*, e quindi (12.15) comprende parecchi termini, subentra un secondo aspetto peculiare dell'FM, indicato come *conversione ampiezza  $\rightarrow$  frequenza*, che può essere descritto tenendo conto che in base alla relazione  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$ , la frequenza istantanea presenta scostamenti rispetto ad  $f_0$  direttamente proporzionali alle ampiezze di  $m(t)$ , e quindi *l'andamento della densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  in funzione di  $f$  riflette quello (funzione di  $m$ ) della densità di probabilità di  $p_M(m)$  che descrive le ampiezze di  $m(t)$* , come torneremo ad approfondire al § 12.3.3.3. Infine, a valori intermedi della dinamica di  $\alpha(t)$  corrisponde una  $\mathcal{P}_x(f)$  che sarà una *via di mezzo* tra i due casi estremi discussi, e che pertanto possono essere pensati come *casi limite* tra cui porre la densità di potenza effettiva.

Dato che la natura non lineare della modulazione angolare rende necessario studiare ogni caso individualmente, il calcolo di  $\mathcal{P}_x(f)$  viene svolto nel seguito per il caso *particolare* di un segnale  $m(t)$  sinusoidale, considerando le due possibilità estreme

<sup>46</sup>Da un lato,  $\frac{a^2}{2}$  è banalmente la potenza della portante di ampiezza  $a$ . Da un altro punto vista, lo stesso risultato si ottiene a partire dalla  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_x(f - f_0) + \mathcal{P}_x(-f - f_0))$  (eq. 11.20), da cui mediante integrazione in frequenza otteniamo  $\mathcal{P}_x = \frac{1}{4} 2\mathcal{P}_x = \frac{a^2}{2}$ .

di  $\alpha(t)$  molto piccolo o molto grande, ed i risultati vengono quindi estrapolati per approssimare altre situazioni.

### 12.3.3.1 Segnale modulante sinusoidale

Per questo calcolo esprimiamo il segnale modulante come  $m(t) = \cos(2\pi\omega t)$ , con  $\omega$  che indica la frequenza di modulazione. L'espressione della fase modulante  $\alpha(t)$  e della relativa frequenza istantanea  $f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \alpha(t)$  per il segnale modulato  $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t))$  risulta allora quella riportata alla tabella seguente, per i casi di modulazione di fase e di frequenza, assieme all'espressione della massima deviazione di fase  $\Delta\alpha = \max\{|\alpha(t)|\}$  e di frequenza  $\Delta f = \max\{|f_i(t) - f_0|\}$ .

	$\alpha(t)$	$f_i(t)$	$\Delta\alpha$	$\Delta f$
PM	$k_\phi m(t) = k_\phi \cos(2\pi\omega t)$	$f_0 - \omega k_\phi \sin(2\pi\omega t)$	$k_\phi$	$\omega k_\phi$
FM	$2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = \frac{k_f}{\omega} \sin(2\pi\omega t)$	$f_0 + k_f \cos(2\pi\omega t)$	$\frac{k_f}{\omega}$	$k_f$

Osserviamo che in entrambi i casi sia  $\alpha(t)$  che  $f_i(t)$  variano sinusoidalmente con frequenza  $\omega$ ; nel caso PM l'entità di  $\Delta f$  aumenta con  $\omega$ , mentre nell'FM la  $\Delta\alpha$  diminuisce con  $\omega$ . Nel seguito si farà riferimento all'indice di modulazione angolare  $\beta$ , corrispondente alla massima escursione della fase  $\Delta\alpha$ , che risulta:

$$\beta = \begin{cases} k_\phi & \text{(PM)} \\ \frac{k_f}{\omega} & \text{(FM)} \end{cases}$$

Con questa convenzione, possiamo trattare congiuntamente entrambi i casi PM ed FM riscrivendo l'inviluppo complesso come<sup>47</sup>

$$\underline{x}(t) = a e^{j\alpha(t)} = a e^{j\beta \sin(2\pi\omega t)}$$

Notiamo ora che  $\underline{x}(t)$  è periodico di periodo  $\frac{1}{\omega}$ , e dunque per esso vale lo sviluppo in serie di Fourier (§ 2.2)  $\underline{x}(t) = a \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n\omega t}$ , i cui coefficienti sono definiti come

$$X_n = \omega \int_{-\frac{1}{2\omega}}^{\frac{1}{2\omega}} e^{j\beta \sin(2\pi\omega t)} e^{-j2\pi n\omega t} dt = \mathcal{J}_n(\beta) \quad (12.16)$$

ovvero sono pari<sup>48</sup> alle *funzioni di Bessel del primo tipo*, ordine  $n$  ed argomento  $\beta$ . Queste hanno l'andamento mostrato alla figura 12.4, in cui sono riportate anche le proprietà che le caratterizzano. I valori di  $X_n$  si ottengono quindi tracciando una linea verticale nel diagramma di figura in corrispondenza del valore adottato per  $\beta$ , e individuando il valore di ciascuna  $\mathcal{J}_n$  per quel  $\beta$ .

Osserviamo ora che in presenza di un valore di  $\beta$  elevato, in base all'ultima proprietà mostrata in fig. 12.4 ovvero che  $\mathcal{J}_n(\beta) \approx 0$  con  $n > \beta$  se  $\beta \gg 1$ , le funzioni di Bessel di ordine  $n > \beta$  sono praticamente nulle: è quindi lecito in tal caso limitare lo sviluppo in serie di Fourier di  $\underline{x}(t)$  ai primi  $\beta$  termini (positivi e negativi), ovvero

<sup>47</sup>Si è sostituito  $\cos$  con  $\sin$  nel caso PM per omogeneità di formulazione, senza alterare la sostanza delle cose.

<sup>48</sup>Le *funzioni di Bessel del primo tipo*, ordine  $n$  ed argomento  $\beta$  sono definite come  $\mathcal{J}_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx$ , riconducibili alla (12.16) mediante un cambio di variabile.

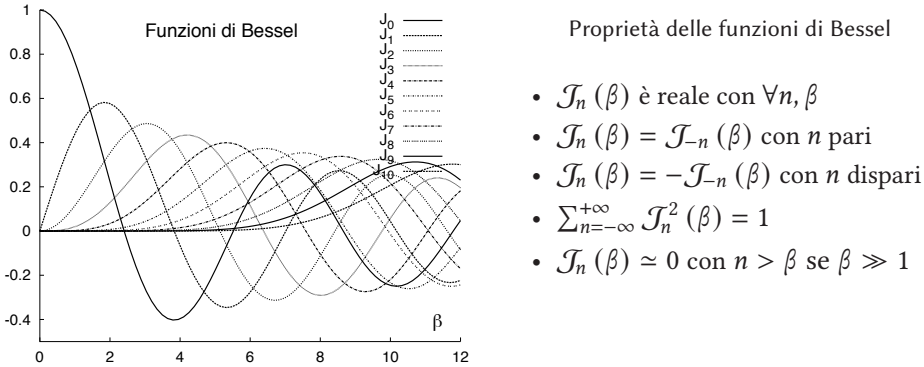


Figura 12.4: Andamento delle funzioni di Bessel del primo tipo e relative proprietà

$$\underline{x}_{FM}(t) \approx a \sum_{n=-\beta}^{\beta} J_n(\beta) e^{j2\pi nwt} \xrightarrow{\mathcal{F}} \underline{X}_{FM}(f) \approx a \sum_{n=-\beta}^{\beta} J_n(\beta) \delta(f - nw)$$

Pertanto il segnale modulato  $x(t) = \Re \{ \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \}$  risulta pari a<sup>49</sup>

$$x(t) \approx a \sum_{n=-\beta}^{\beta} J_n(\beta) \cos 2\pi(f_0 + nw)t \tag{12.17}$$

ossia è costituito da  $2\beta + 1$  cosinusoidi a frequenza  $f_0 \pm nw$  centrate attorno ad  $f_0$ , e dunque il relativo spettro di densità di potenza ha espressione<sup>50</sup>

$$\mathcal{P}_x(f) \approx \frac{a^2}{4} \sum_{n=-\beta}^{\beta} |J_n(\beta)|^2 [\delta(f - f_0 - nw) + \delta(f + f_0 + nw)] \tag{12.18}$$

ed è formato da impulsi centrati a frequenza  $f = \pm f_0 \pm nw$ .

Osserviamo che in base alla proprietà  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(\beta) = 1$ , estendendo la somma in (12.18) per  $-\infty > n > \infty$  ed integrando su  $f$  si ottiene un risultato già noto, ovvero la potenza totale  $\mathcal{P}_x$  eguaglia quella della portante non modulata, pari a  $\frac{a^2}{2}$ , indipendentemente dall'indice di modulazione  $\beta$ .

**Modulazione a basso indice** Come anticipato al § 12.3.3 e mostrato in fig. 12.4, qualora  $\beta \ll 1$  le funzioni di Bessel  $J_n(\beta)$  con  $n > 1$  presentano valori che possono essere trascurati. Pertanto in tal caso  $x(t)$  occupa una banda  $B \approx 2w$ , in modo del tutto simile all'AM-BLD.

<sup>49</sup>Infatti

$$\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} = \sum_{n=-\beta}^{\beta} J_n(\beta) e^{j2\pi nwt} e^{j2\pi f_0 t} = \sum_{n=-\beta}^{\beta} J_n(\beta) e^{j2\pi(nw+f_0)t}$$

la cui parte reale è appunto pari a  $\sum_{n=-\beta}^{\beta} J_n(\beta) \cos 2\pi(nw + f_0)t$

<sup>50</sup>Infatti ad ogni termine  $J_n(\beta) \cos 2\pi(f_0 + nw)t$  della (12.17) corrisponde una densità di potenza

$$\mathcal{P}(f) = \frac{J_n^2(\beta)}{4} [\delta(f - f_0 - nw) + \delta(f + f_0 + nw)]$$

e la potenza della somma è pari alla somma delle potenze, in virtù della ortogonalità tra cosinusoidi.

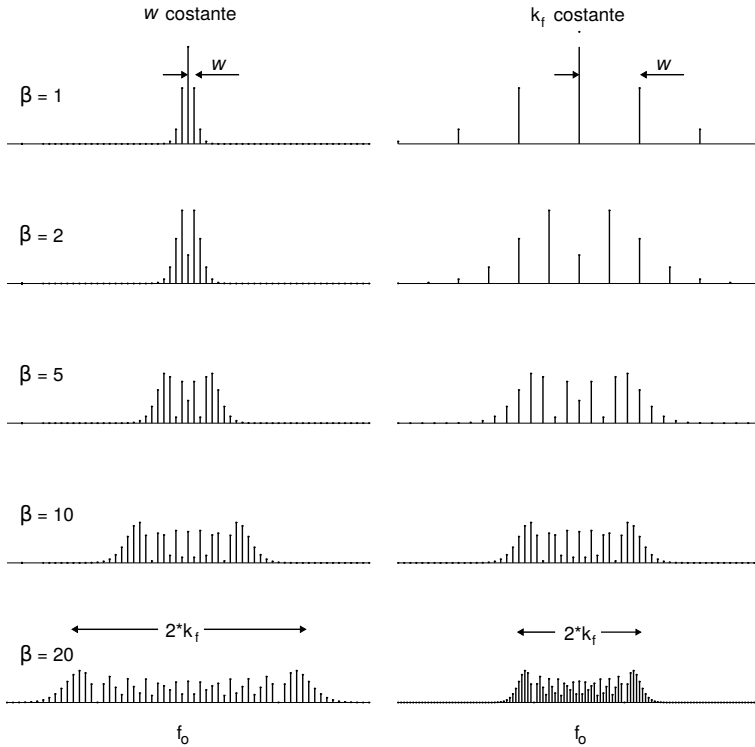


Figura 12.5: Spettro di ampiezza  $|X(f)|$  per segnale FM a modulazione sinusoidale. Solo la riga  $\beta = 10$  mantiene la stessa scala di frequenze a sin. come a ds.

**Modulazione ad alto indice** All'aumentare di  $\beta = \frac{k_f}{w}$  nella (12.18) aumenta il numero dei termini rilevanti, e la fig. 12.5 mostra l'aspetto di  $|X(f)|$  per  $f > 0$  <sup>(51)</sup> calcolato per valori di  $\beta$  crescenti, mantenendo fisso  $w$  (a sinistra) oppure  $k_f$  (a destra). Osserviamo che

- mantenendo  $w$  fisso ed aumentando  $k_f$ , ovvero l'ampiezza di  $m(t)$ , il numero di righe spettrali a frequenza  $f_0 \pm nw$  aumenta, occupando una banda crescente, che per  $\beta$  molto grande si estende da  $f_0 - \beta w$  a  $f_0 + \beta w$ , dato che  $\mathcal{J}_n(\beta) \simeq 0$  per  $n > \beta$ ;
- mantenendo  $k_f$  fisso e diminuendo  $w$ , ossia la frequenza modulante, la banda occupata tende a ridursi, mentre le nuove righe spettrali a frequenza  $f_0 \pm nw$  si infittiscono. Per  $w \rightarrow 0$  si ha  $\beta \rightarrow \infty$  mentre la spaziatura tra le righe spettrali tende ad annullarsi, producendo una densità spettrale praticamente continua.

Notiamo che in entrambi i casi all'aumentare di  $\beta$  la banda occupata a frequenze positive è bene approssimata dal valore  $B = 2\beta w = 2 \frac{k_f}{w} \cdot w = 2k_f$ , ossia pari al doppio della massima deviazione di frequenza istantanea  $\Delta f$ , vedi la tabella a pag. 382.

<sup>51</sup>Ovvero, la fig. 12.5 mostra  $|X^+(f)| = \frac{1}{2} \underline{X}(f - f_0) = \frac{a}{2} \sum_{n=-\beta}^{\beta} |\mathcal{J}_n(\beta)| \delta(f - f_0 - nw)$

### 12.3.3.2 Regola di Carson

Come appena discusso la modulazione FM da parte di un tono sinusoidale a frequenza  $w$  produce un segnale modulato  $x(t)$  la cui banda varia tra  $2w$  e  $2k_f$  nei casi di indice di modulazione  $\beta$  rispettivamente basso od alto. Una formula in grado di esprimere questo tipo di relazione è

$$B_C \simeq 2(k_f + w) = 2w(\beta + 1) \quad (12.19)$$

nota come *regola di Carson*<sup>52</sup>, in grado di tener conto di entrambi i fattori che concorrono alla determinazione della banda, e che fornisce i valori esatti<sup>53</sup> sia per  $\beta \ll 1$ , che per  $\beta \rightarrow \infty$ , in entrambi i casi in cui sia  $k_f$  ad aumentare, o  $w$  a diminuire.

Sebbene questo risultato si riferisca al caso di  $m(t) = \cos(2\pi wt)$ , la (12.19) viene spesso adottato come una buona approssimazione anche per altri tipi di segnali modulanti, come illustrato appresso.

**Modulazione multitono** Si riferisce ad un segnale FM per il quale  $m(t)$  è la combinazione di più sinusoidi a frequenza  $w_i$  ed ampiezza  $k_f^i$ . In tal caso la trattazione matematica si complica, e perviene al risultato che nel segnale modulato  $x(t)$  compaiono, oltre a componenti spettrali già analizzate e relative a ciascuna  $w_i$ , centrate in  $f_0$  e spaziate da multipli di  $w_i$ , anche componenti spaziate a frequenze somma e differenza delle combinazioni dei multipli delle  $w_i$ . In questo caso l'occupazione di banda è approssimata riscrivendo la (12.19) come  $B_C = 2w_M(\beta_M + 1)$  in cui  $w_M = \max_i \{w_i\}$  è la più grande delle frequenze modulanti e  $\beta_M = \Delta f_M / w_M$  è l'indice di modulazione *equivalente* per questo caso, avendo definito  $\Delta f_M = \sum_i k_f^i$  come la massima deviazione della frequenza istantanea  $\Delta f$ .

**Modulazione per segnali qualsiasi** Nel caso di un segnale modulante generico, limitato in banda tra  $-W$  e  $W$ , e che produce da una deviazione massima della frequenza istantanea  $\Delta f = k_f \cdot \max \{|m(t)|\}$ , l'occupazione di banda è approssimata riscrivendo nuovamente la regola di Carson come  $B_C \simeq 2W(\beta_s + 1)$  con  $\beta_s = \frac{\Delta f}{W}$ .

**Allargamento spettrale** L'applicazione della regola di Carson mostra che la banda occupata dal segnale modulato può risultare  $\beta_s + 1$  volte più estesa di quella  $W$  del segnale modulante, un comportamento del tutto nuovo rispetto a quanto avviene nel caso dell'AM. Nonostante possa sembrare un aspetto negativo, al § 14.4.2 si mostra come una maggiore occupazione di banda consenta di migliorare l'SNR dopo demodulazione, superando in tal modo le prestazioni ottenibili nel caso AM. Al contrario, se  $\beta_s \ll 1$  il comportamento si avvicina molto a quello lineare (vedi appendice 12.4.6).

<sup>52</sup>J. R. Carson fu uno dei primi a studiare le tecniche di modulazione negli anni '20, vedi ad es. [http://en.wikipedia.org/wiki/John\\_Renshaw\\_Carson](http://en.wikipedia.org/wiki/John_Renshaw_Carson)

<sup>53</sup>Nel caso di modulazione sinusoidale ad alto indice la (12.19) esprime la banda entro cui è contenuto il 98% della potenza del segnale modulato. Per indici  $2 < \beta < 10$  ne fornisce invece una stima *per difetto*, ed una approssimazione più corretta è  $B_C \simeq 2w(\beta + 2)$ .

### 12.3.3.3 Densità spettrale per FM ad alto indice

Riprendiamo il ragionamento iniziato al § 12.3.3 e relativo a come la densità di probabilità  $p_M(m)$  del segnale modulante si rifletta sulla densità di potenza  $\mathcal{P}_x(f)$  del corrispondente segnale FM nel caso di modulazione ad alto indice, ovvero qualora  $\beta_s \gg 1^{54}$ . In questo caso, la frazione di potenza totale  $\mathcal{P}_x = \frac{a^2}{2}$  del segnale FM che si distribuisce tra le frequenze  $f_1$  ed  $f_2$  è pari alla frazione di tempo per cui la frequenza istantanea  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$  permane nello stesso intervallo, ovvero pari alla frazione di tempo per cui il segnale modulante  $m(t)$  assume valori compresi tra  $m_1 = \frac{f_1 - f_0}{k_f}$  e  $m_2 = \frac{f_2 - f_0}{k_f}$ . Tale frazione è proprio pari alla probabilità di trovare  $m_1 \leq m(t) \leq m_2$ , ovvero  $Prob\{m_1 \leq m(t) \leq m_2\} = \int_{m_1}^{m_2} p_M(m) dm$ , dove  $p_M(m)$  è la densità di probabilità che descrive il processo modulante.

Si può affermare dunque che qualora si generi un segnale FM ad alto indice a partire da un processo con densità di probabilità nota, lo spettro di densità di potenza del segnale modulato acquisisce l'andamento proprio della densità di probabilità del processo modulante, indipendentemente dal suo spettro di densità di potenza. Tale conclusione mantiene validità purché  $\beta \gg 1$ ; nel caso contrario, sono validi i ragionamenti sviluppati al § 12.3.3.5.

**Esempio** Un processo  $m(t)$  limitato in banda  $\pm W$  e con con d.d.p. uniforme  $p_M(m) = \frac{1}{\Delta_M} \text{rect}_{\Delta_M}(m)$  modula ad alto indice una portante a frequenza  $f_0$  ed ampiezza  $a$ , con un coefficiente di modulazione  $k_f$ . Determinare la  $\mathcal{P}_x(f)$  del segnale modulato.

Notiamo che la frequenza istantanea  $f_i$  rimane limitata tra  $f_0 - \frac{\Delta_M}{2} k_f$  e  $f_0 + \frac{\Delta_M}{2} k_f$ . Inoltre, la potenza totale deve risultare ancora pari a  $\frac{a^2}{2}$ . Pertanto si ottiene<sup>55</sup>:

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{a^2}{4\Delta_M k_f} \left[ \text{rect}_{\Delta_M k_f}(f - f_0) + \text{rect}_{\Delta_M k_f}(f + f_0) \right]$$

**Esempio** Nel caso in cui  $m(t)$  sia sinusoidale, con fase iniziale aleatoria a distribuzione uniforme,  $m(t)$  è una realizzazione di un processo armonico (pag. 163), e dunque per  $\beta \gg 1$  risulterà  $\mathcal{P}_x(f) = \frac{a^2}{1 - (f/k_f)^2}$ , con l'andamento rappresentato dalla fig. 6.4 a pag. 163, ovvero il quadrato dell'andamento a cui tendono (per  $\beta \rightarrow \infty$ ) i grafici in basso

<sup>54</sup>Sinceramente non ho afferrato appieno il motivo di questa limitazione. Quel che ho trovato esprime che "ciò equivale ad avere  $\Delta f \gg W$ , e quindi comporta il rispetto di una condizione detta *approssimazione quasi stazionaria*" e fa riferimento ad uno studio di H.E. Rowe del 1965. La tesi è che in tal caso la frequenza istantanea varia *lentamente* rispetto al periodo  $1/W$  della massima frequenza modulante, e dunque il segnale modulato osservato per un breve periodo è approssimato ad una sinusoide non modulata ed a frequenza costante pari a  $f_i(t) = f_0 + k_f \gamma$  in cui  $\gamma$  è il valore di  $m(t)$  praticamente costante nel periodo di osservazione. A me sembra che perché ciò avvenga, sia sufficiente che  $f_0 \gg \Delta f$ . Ma forse lo capirò con il tempo.

<sup>55</sup>Volendo applicare la regola di Carson per calcolare la banda, si avrebbe (considerando  $\beta \gg 1$ )  $B_C = 2W(\beta + 1) \approx 2\frac{\Delta f}{W}W = 2\Delta f$ , in cui  $\Delta f = k_f \frac{\Delta_M}{2}$ . Pertanto risulta  $B_C = 2k_f \frac{\Delta_M}{2} = k_f \Delta_M$ , in accordo al risultato previsto nel caso di modulazione ad alto indice.

Qualora si fosse invece posto  $\beta = \frac{\sigma_f}{W}$  (vedi 12.3.3.4) si sarebbe ottenuto  $B_C = 2W(\beta + 1) \approx 2\frac{\sigma_f}{W}W = 2\sigma_f = 2k_f \sqrt{\mathcal{P}_M} = 2k_f \sqrt{\frac{\Delta_M^2}{12}} = 2k_f \frac{\Delta_M}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta_M k_f}{\sqrt{3}}$ , un risultato che è circa pari a 0.58 volte quello precedente. Data la particolarità di  $p_M(m)$  uniforme, in questo caso è da preferire il primo risultato.

di fig. 12.5. Pertanto le righe spettrali, addensandosi, tendono a disporsi in accordo all'andamento della densità di probabilità  $p_M(m)$  del processo armonico.

### 12.3.3.4 Indice di modulazione per processi

Nel caso in cui non sia nota la d.d.p. del processo modulante, ma solo la sua potenza, oppure qualora non sussista la condizione di alto indice  $\beta_s \gg 1$ , oppure ancora non sia possibile definire il valore della massima deviazione di frequenza  $\Delta f = k_f \cdot \max\{|m(t)|\}$  come ad esempio per  $m(t)$  gaussiano, allora l'occupazione di banda può ancora essere approssimata mediante un'ultima variazione della regola di Carson, che viene ora applicata dopo aver definito un indice di modulazione  $\beta_p$  per processi come

$$\beta_p = \begin{cases} \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_f} & \text{(PM)} \\ \frac{\sigma_f}{W} & \text{(FM)} \end{cases}$$

in cui  $W$  è la banda a frequenze positive del segnale modulante,  $\sigma_f = k_f \sqrt{\mathcal{P}_m}$  rappresenta la deviazione standard della frequenza istantanea<sup>56</sup>, e  $\sigma_\alpha = k_\phi \sqrt{\mathcal{P}_m}$  è la deviazione standard della fase modulante<sup>57</sup>. L'applicazione della regola di Carson con il nuovo valore di  $\beta_p$  fornisce un risultato che non indica più la banda *totale* occupata, ma individua una *banda efficace* entro cui  $\mathcal{P}_x(f)$  è in larga parte (ma non completamente) contenuta (vedi anche 25.2).

Nel caso in cui *non* risulti  $\beta \gg 1$ , lo spettro di potenza del segnale modulato FM torna a dipendere da quello del segnale modulante, e si ricade nella trattazione che segue.

### 12.3.3.5 Densità spettrale per FM a basso indice

In questo caso si suppone l'indice di modulazione  $\beta$  piccolo a sufficienza, in modo che lo sviluppo in serie dell'involuppo complesso del segnale modulato possa essere arrestato ai primi termini. Sotto opportune ipotesi, si può mostrare che vale il risultato

$$\mathcal{P}_x(f) \simeq a^2 e^{-\sigma_\alpha^2} \left[ \delta(f) + \mathcal{P}_\alpha(f) + \frac{1}{2} \mathcal{P}_\alpha(f) * \mathcal{P}_\alpha(f) + \frac{1}{3!} \mathcal{P}_\alpha(f) * \mathcal{P}_\alpha(f) * \mathcal{P}_\alpha(f) + \dots \right]$$

avendo indicando con  $\sigma_\alpha^2$  la varianza della fase modulata e con  $\mathcal{P}_\alpha(f)$  il relativo spettro di densità di potenza, pari rispettivamente a

	$\mathcal{P}_\alpha(f)$	$\sigma_\alpha^2$
PM	$k_\phi^2 \mathcal{P}_m(f)$	$k_\phi^2 P_m$
FM	$k_f^2 \frac{\mathcal{P}_m(f)}{f^2}$	$k_f^2 \int_{-W}^W \frac{\mathcal{P}_m(f)}{f^2} df$

Osserviamo che se  $k_\phi$  (o  $k_f$ ) tende a zero,  $\mathcal{P}_x(f)$  si riduce ad un impulso, corrispondente alla portante non modulata. All'aumentare di  $k_\phi$  (o  $k_f$ ), aumenta anche  $\sigma_\alpha^2$  e dunque il termine  $e^{-\sigma_\alpha^2}$  diminuisce, riducendo la concentrazione di potenza a frequenza portante. Dato che risulta comunque  $\mathcal{P}_x = a^2$ , la potenza residua si distribuisce sugli altri termini,

<sup>56</sup>Infatti, dalla definizione  $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$  si ottiene che  $\sigma_f^2 = k_f^2 \sigma_M^2$ , in cui  $\sigma_M^2 = \mathcal{P}_M$  se  $m(t)$  è un processo stazionario ergodico a media nulla.

<sup>57</sup>Come sopra, partendo dalla relazione  $\alpha(t) = k_\phi m(t)$ .

rappresentati da  $\mathcal{P}_\alpha(f)$  e delle sue *autoconvoluzioni*. E' immediato notare come, al crescere di  $k_\phi$  (o  $k_f$ ), cresca la banda.

In appendice 12.4.6 è illustrata una tecnica di modulazione per segnali FM modulati a basso indice.

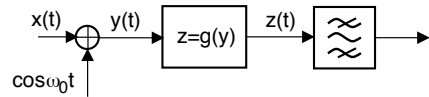
## 12.4 Appendici

### 12.4.1 Mixer mediante non linearità

Illustriamo un modo di realizzare il dispositivo che effettua la funzione di moltiplicazione tra un segnale modulante ed una portante. Sebbene esistano schemi circuitali capaci di realizzare esattamente il prodotto tra due segnali analogici<sup>58</sup>, l'approccio che segue è molto semplice, e fa uso di un sommatore, un oscillatore, un dispositivo non lineare, ed un filtro passa-banda, come mostrato in figura.

Il dispositivo non lineare ha una caratteristica ingresso-uscita del tipo

$$z = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \dots$$



e quando in ingresso viene applicata la somma di due segnali  $x(t) + \cos \omega_0 t$ , produce

$$z(t) = a_1 (x(t) + \cos \omega_0 t) + a_2 (x^2(t) + \cos^2 \omega_0 t + 2x(t) \cos \omega_0 t) + a_3 (\dots) + \dots$$

da cui, osservando che i termini  $\cos^n \omega_0 t$  sono relativi a componenti centrate a frequenza  $n f_0$ <sup>59</sup>, il filtro passa banda può estrarre il termine  $x(t) \cos \omega_0 t$  a cui siamo interessati.

Da un punto di vista circuitle<sup>60</sup> il dispositivo non lineare può essere costituito da un semplice diodo, per il quale la corrente che lo attraversa è espressa in funzione della tensione  $V$  ai suoi capi in base all'espressione  $I = I_s (e^{V/\alpha} - 1)$  in cui  $I_s$  ed  $\alpha$  sono delle costanti; per piccoli valori di  $V$  la relativa espansione in serie di Taylor permette infatti di scrivere  $e^{V/\alpha} - 1 \simeq V/\alpha + \frac{(V/\alpha)^2}{2}$  e dunque, ponendo  $V = x(t) + \cos \omega_0 t$  si ottiene il risultato anticipato.

### 12.4.2 Mixer a commutazione

Non è strettamente necessario disporre di un oscillatore sinusoidale per realizzare il prodotto di un segnale con una portante: è sufficiente un'onda quadra ed un filtro! Infatti, un qualunque segnale periodico

$$y(t) = g(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

<sup>58</sup>Vedi ad es. [https://en.wikipedia.org/wiki/Ring\\_modulation](https://en.wikipedia.org/wiki/Ring_modulation) e [https://en.wikipedia.org/wiki/Gilbert\\_cell](https://en.wikipedia.org/wiki/Gilbert_cell)

<sup>59</sup>Infatti la formula di *de Moivre* asserisce che  $(\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + j \sin n\alpha$ , come confermato anche dalla formula di Eulero  $(\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = (e^{j\alpha})^n = e^{jn\alpha} = \cos n\alpha + j \sin n\alpha$ .

<sup>60</sup>Per un esempio di progettazione elettronica che realizza le funzioni descritte, si veda ad esempio [https://digilander.libero.it/ingcasanof/quinta/misure/modulatore\\_am\\_con\\_fet/modulatore\\_am%20con%20fet.htm](https://digilander.libero.it/ingcasanof/quinta/misure/modulatore_am_con_fet/modulatore_am%20con%20fet.htm)

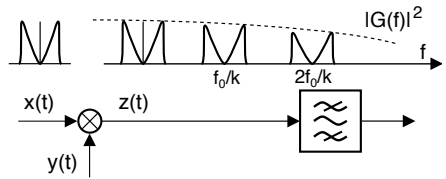
di periodo  $T = k/f_0$  (con  $k$  intero) possiede una densità di potenza<sup>61</sup>

$$\mathcal{P}_y(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{k}f_0\right) \quad (12.20)$$

Il prodotto di tale segnale per  $x(t)$  produce un segnale  $z(t)$  con densità di potenza<sup>62</sup>

$$\mathcal{P}_z(f) = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_y(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x\left(f - \frac{n}{k}f_0\right) \quad (12.21)$$

Pertanto, il desiderato spettro di potenza si ottiene inserendo dopo il moltiplicatore un filtro passa banda centrato su una delle armoniche a frequenza  $\frac{n}{k}f_0$  di  $y(t)$ , ovvero su una delle repliche spettrali che compongono  $\mathcal{P}_z(f)$ . L'in-



viluppo mostrato in figura è relativo ad una scelta per  $g(t)$  del tipo  $g(t) = \text{rect}_\tau(t)$  con  $\tau$  sufficientemente minore di  $k/f_0$  e scelto in modo opportuno<sup>63</sup>, in modo che se la banda di  $x(t)$  è sufficientemente ridotta rispetto a  $f_0/k$  l'entità della distorsione lineare di ampiezza può essere considerata trascurabile. Lo stesso dispositivo può essere usato anche per i moltiplicatori di demodulazione: in tal caso, il filtro da usare sarà un passa basso.

Dato che un punto vista circuitale il prodotto per un'onda quadra è assimilabile ad un interruttore che si apre e si chiude, un dispositivo del genere viene detto *switching mixer*.

### 12.4.3 Sintesi di frequenza con PLL ed oscillatore a cristallo

Questa sottosezione illustra una tecnica per generare una portante di modulazione (oppure eterodina) che sia *stabile* in frequenza. Dato che tutti questi elementi sono ormai integrati in un unico *chip*, possiamo anche visitare quelli a catalogo di un produttore *a caso*<sup>64</sup>! Essenzialmente il circuito PLL illustrato al § 12.2.2.2 non è in grado di generare una portante *di modulazione* stabile a sufficienza, in quanto ottenuta a partire da oscillatori realizzati mediante circuiti di tipo analogico<sup>65</sup>, la cui frequenza dipende anche dalla precisione dei valori dei componenti utilizzati e dalla temperatura di lavoro, oltre a presentare una variabilità che aumenta al crescere della frequenza di

<sup>61</sup>La (12.20) si ottiene applicando l'espressione per i coefficienti  $Y_n$  dello sviluppo in serie di  $y(t)$  in funzione dei campioni della trasformata di un suo periodo  $G(f)|_{f=n/T}$  data dalla (3.4) ovvero  $Y_n = \frac{1}{T}G\left(\frac{n}{T}\right)$ , a quella  $\mathcal{P}_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |Y_n|^2 \delta(f - n/T)$  fornita dalla (7.11) per la densità di potenza di un segnale periodico.

<sup>62</sup>Infatti in base alla § 7.5.3 ad un prodotto tra processi statisticamente indipendenti corrisponde la convoluzione in frequenza delle relative densità spettrali, e la (12.21) è conseguenza della convoluzione con gli impulsi presenti nella (12.20).

<sup>63</sup>Dato che  $G(f)$  si annulla per  $f = m/\tau$ , se scegliessimo  $\tau = 1/hf_0$  avremmo  $G(f) = 0$  per  $f = mhf_0$  impedendo il funzionamento del circuito per qualche armonica di  $f_0/k$ . In particolare, scegliendo  $h = 1$  lo schema sarebbe del tutto inutilizzabile!

<sup>64</sup>Vedi ad es. <https://www.analog.com/en/product-category/fractional-n-pll.html>

<sup>65</sup>Vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore>

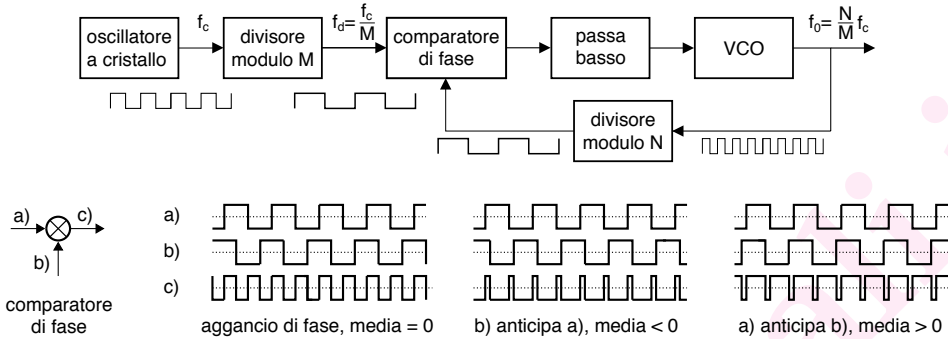


Figura 12.6: Sintesi di frequenza con PLL ed oscillatore a cristallo (sopra), e funzionamento del comparatore di fase per forme d'onda rettangolari (sotto)

oscillazione. Al contrario, gli oscillatori basati su di un cristallo<sup>66</sup> sono molto più stabili e precisi, tipicamente dell'ordine di  $\pm 20$  PPM<sup>67</sup>, anche se il loro costo, disponibilità e fragilità peggiora all'aumentare della frequenza, arrivando in pratica a qualche decina di MHz.

Per generare portanti più elevate si utilizza la frequenza dell'oscillatore a cristallo come un riferimento a cui far agganciare un circuito PLL modificato come in figura 12.6, in cui le forme d'onda sono di tipo rettangolare in modo da poterne ottenere di nuove con periodo multiplo di quello di partenza (e dunque frequenza pari ad un suo sottomultiplo) mediante l'uso di un circuito divisore modulo  $N$ <sup>68</sup>. In particolare, il moltiplicatore è ora detto *comparatore di fase*<sup>69</sup> ed opera (per forme d'onda bipolari) come mostrato nella parte inferiore di fig. 12.6, producendo un'onda bipolare a *valor medio* positivo o negativo a seconda se l'ingresso a sinistra sia in anticipo od in ritardo rispetto a quello proveniente dal basso, valor medio che è proporzionale allo slittamento in eccesso rispetto alla condizione di uno sfasamento pari ad un quarto di periodo.

La frequenza  $f_0$  generata dal vco si aggancia quindi ad un valore  $N$  volte maggiore di quello  $f_d$  in ingresso al comparatore, in virtù del divisore per  $N$  posto a valle del vco; essendo il divisore di tipo programmabile, la frequenza del segnale prodotto dal vco può essere modificata variando il valore di  $N$ . Allo stesso tempo, anche la frequenza  $f_c$  prodotta dall'oscillatore a cristallo viene divisa per un diverso numero  $M$ , in modo che la frequenza di uscita risulti pari a  $f_0 = \frac{N}{M} f_c$ . In tal modo il circuito può essere programmato per generare frequenze  $\frac{N}{M}$  volte maggiori di quella prodotta dal cristallo, mantenendo la sua stessa precisione: ad esempio un cristallo con precisione di 20 PPM e frequenza  $f_c = 10$  MHz, dopo aver scelto  $M = 1$  ed  $N = 20$ , permette di ottenere  $f_0 = 200$  MHz  $\pm 4$  KHz.

<sup>66</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore\\_al\\_cristallo](https://it.wikipedia.org/wiki/Oscillatore_al_cristallo)

<sup>67</sup>Abbreviazione di *parti per milione*: 10 PPM equivalgono a 10 cicli ogni  $10^6$ , ovvero un valore compreso tra 999.990 ed 1.000.010 per una frequenza *nominale* di 1 MHz.

<sup>68</sup>Vedi ad es. <http://studenti.fisica.unifi.it/~carla/appunti/2008-9/slides-7.pdf>

<sup>69</sup>Vedi ad es. [https://it.wikipedia.org/wiki/Comparatore\\_di\\_fase](https://it.wikipedia.org/wiki/Comparatore_di_fase)

**Moltiplicatore di frequenza** Il medesimo schema può essere impiegato per produrre *più segnali* di clock tutti multipli di una comune velocità di partenza, ad esempio nell'ambito di reti logiche complesse, o all'interno di microprocessori.

### 12.4.3.1 Sintesi digitale diretta

Si tratta della possibilità di generare le portanti di modulazione e demodulazione per via completamente numerica, nella forma di una sequenza costituita da valori dei campioni della forma d'onda sinusoidale letti da una memoria che viene indirizzata da un contatore ciclico. L'argomento sarà approfondito in una prossima edizione.

### 12.4.4 Densità di potenza per segnali AM a banda laterale unica

Affrontiamo il problema di dimostrare che per un segnale AM-BLU a banda laterale superiore (§ 12.1.2) si ottiene

$$\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_{m^+}(f - f_0) + \mathcal{P}_{m^-}(f + f_0)$$

come asserito all'eq. (12.8). A tale proposito osserviamo che la (11.20) stabilisce

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) + \mathcal{P}_{\underline{x}}(-f - f_0)) \quad (12.22)$$

in cui  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau) \}$ , e dato che nel nostro caso  $\underline{x}(t) = m(t) + j\hat{m}(t) = 2m^+(t)$  (vedi eq. (11.17)), otteniamo

$$\mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau) = \langle \underline{x}(t), \underline{x}(t + \tau) \rangle = \langle 2m^+(t), 2m^+(t + \tau) \rangle = 4\mathcal{R}_{m^+}(\tau) \quad (12.23)$$

in cui si è fatto uso della notazione di prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  per generalizzare il calcolo dell'autocorrelazione sia al caso di segnale di potenza, sia a quello di un processo. Eseguendo ora la trasformata di (12.23) otteniamo

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{m^+}(f) = 4\mathcal{P}_m(f) |H_{fp}(f)|^2$$

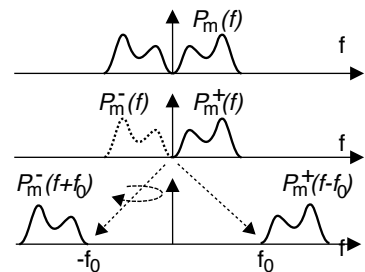
in cui  $H_{fp}(f)$  è definito al § 11.2.6, e pertanto  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$  esiste solamente sul semiasse delle frequenze positive. Dunque la (12.22) si riscrive considerando che per  $f > 0$  si ha

$$\mathcal{P}_x(f)|_{f>0} = \frac{1}{4} \mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) = \mathcal{P}_{m^+}(f - f_0)$$

mentre per  $f < 0$  risulta

$$\mathcal{P}_x(f)|_{f<0} = \mathcal{P}_{m^+}(-f - f_0) = \mathcal{P}_{m^-}(f + f_0)$$

come mostrato in figura.



### 12.4.5 Calcolo della potenza di un segnale AM BLU

Come anticipato in fondo al § 12.1.2, mostriamo che se

$$x_{BLU}(t) = \frac{k_a}{\sqrt{2}} (m(t) \cos \omega_0 t - \hat{m}(t) \sin \omega_0 t) \quad (12.24)$$

allora  $\mathcal{P}_x = \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$ . Possiamo innanzitutto scrivere che

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x^+} + \mathcal{P}_{x^-} = 2\mathcal{P}_{x^+} \quad (12.25)$$

in quanto le componenti a frequenza positiva e negativa di  $x(t)$  sono ortogonali<sup>70</sup>, e lo spettro di densità di potenza è una funzione pari della frequenza:  $\mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_x(-f)$ . Inoltre, invertendo la relazione  $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^+}(f + f_0)$  valida per la densità di potenza dell'inviluppo complesso, otteniamo  $\mathcal{P}_{x^+}(f) = \frac{1}{4}\mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0)$ , e quindi

$$\mathcal{P}_{x^+} = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{\underline{x}}(f - f_0) df = \frac{1}{4}\mathcal{P}_{\underline{x}}$$

che, sostituita nella (12.25), fornisce  $\mathcal{P}_x = 2\mathcal{P}_{x^+} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{\underline{x}}$ .

Come sappiamo  $\mathcal{P}_{\underline{x}} = \mathcal{R}_{\underline{x}}(0)$  in cui, nell'ipotesi di processo ergodico,  $\mathcal{R}_{\underline{x}}(0)$  è l'autocorrelazione di un qualunque membro, ad es. proprio di (12.24), e dunque essendo in tal caso  $\underline{x}(t) = \frac{k_a}{\sqrt{2}} [m(t) + j\hat{m}(t)]$ , si ottiene

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{\underline{x}} = \frac{1}{2}\mathcal{R}_{\underline{x}}(0) = \frac{1}{2} \left( \frac{k_a}{\sqrt{2}} \right)^2 [\mathcal{R}_{mm}(0) + \mathcal{R}_{\hat{m}\hat{m}}(0) + 2j\mathcal{R}_{m\hat{m}}(0)]$$

Osserviamo ora che  $\mathcal{R}_{m\hat{m}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t)\hat{m}(t)dt = 0$  in quanto  $m(t)$  ed  $\hat{m}(t)$  sono ortogonali; inoltre,  $\mathcal{R}_{mm}(0) = \mathcal{P}_m = \mathcal{R}_{\hat{m}\hat{m}}(0)$  (non dimostrato). Pertanto si ottiene

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2} \frac{k_a^2}{2} [\mathcal{P}_m + \mathcal{P}_m] = \frac{1}{4} k_a^2 \cdot 2\mathcal{P}_m = \frac{k_a^2}{2} \mathcal{P}_m$$

#### 12.4.5.1 Calcolo della potenza di segnali BLD-PI, PS, PPS

La tabella al § 12.1.4 è calcolata adottando lo stesso procedimento sopra esposto al § 12.4.5, in cui ora

$$\mathcal{P}_{\underline{x}} = \mathcal{P}_{x_c} = \begin{cases} k_a^2 \mathcal{P}_m & \text{(BLD-PS)} \\ a_p^2 + k_a^2 \mathcal{P}_m & \text{(BLD-PI, BLD-PPS)} \end{cases}$$

#### 12.4.6 Modulazione FM a basso indice

Riprendiamo qui il caso in cui  $\beta \ll 1$  e di conseguenza  $\Delta\alpha \ll 1$ , consentendo quindi di arrestare al 1° ordine lo sviluppo in serie di potenze (eq. (12.15)) di  $\underline{x}(t)$ . Se il segnale modulante è cosinusoidale, il segnale FM risulta

$$x_{FM}(t) = a \cos \left( \omega_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t \cos(2\pi w\tau) d\tau \right) = a \cos(\omega_0 t + \beta \sin(2\pi w\tau))$$

Ricordando che  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ ,  $x_{FM}(t)$  può essere riscritto come

$$x_{FM}(t) = a \cos\omega_0 t \cos(\beta \sin 2\pi w t) - a \sin\omega_0 t \sin(\beta \sin 2\pi w t)$$

che, se  $\beta \ll 1$ , diviene

$$x_{FM}(t) = a \cos\omega_0 t - \beta a \sin\omega_0 t \sin 2\pi w t \quad (12.26)$$

che confrontiamo con l'espressione

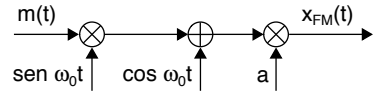
$$x_{AM}(t) = a_p \cos\omega_0 t + k_a \cos\omega_0 t \cos 2\pi w t \quad (12.27)$$

che si otterrebbe per modulazione a portante intera, o ridotta, dello stesso  $m(t)$ .

Il confronto tra (12.26) e (12.27) rivela che mentre nell' $AM$  il segnale modulante moltiplica una portante *in fase* a quella (più o meno) intera, nell' $FM$  a basso indice  $m(t)$

<sup>70</sup>Infatti risulta  $\int_{-\infty}^{\infty} X^+(f) X^-(f) df = 0$ . dato che i due termini non si sovrappongono in frequenza.

opera su di una portante in *quadratura*. Questa considerazione è alla base dello *schema di modulazione* per segnali FM a basso indice mostrato a lato e realizzabile *sommando* alla portante un segnale AM-BLD, modulato su di una portante in quadratura.



D'altra parte, uno schema di modulazione del genere produce anche una modulazione AM parassita: questa può essere eliminata in ricezione dall'azione congiunta di uno squadratore e di un filtro passa basso, come discusso in fondo al § 12.3.2.2.

L'opera

# ***Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione***

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -  
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*<sup>1</sup> che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

---

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>