

Modulazione numerica

È GIUNTO il momento di mettere assieme gli aspetti delle trasmissioni modulate (capp. 11 e 12) con quelli della trasmissione dati (cap. 15), e discutere delle tecniche necessarie a trasmettere in forma modulata un segnale di natura simbolica. Il contesto applicativo può variare su un ampio ventaglio di casi, come le forme di broadcast digitale (terrestre o satellitare), le reti di accesso WIFI o di telefonia cellulare, i modem e l'ADSL, le comunicazioni satellitari dallo spazio profondo, i ponti radio numerici per flussi dati ottenuti come multiplazione temporale di più sorgenti, di tipo multimediale e/o provenienti da reti a pacchetto... in pratica, la gran parte delle comunicazioni dati che *non* viaggiano su fibra ottica.

In tutti questi casi ci si trova in presenza di un canale trasmissivo di tipo *passa-banda*, quindi inadatto a trasportare un segnale dati realizzato mediante codifica di linea di *banda base* (§ 15.2), e dunque è necessario produrre un segnale modulato per trasporre la banda del segnale in accordo ai vincoli imposti dal canale. Ora non vengono però semplicemente applicate le tecniche esposte al cap. 12, ma queste sono rese specifiche alla caratteristica del segnale dati di essere costituito da sequenze di simboli appartenenti ad un alfabeto finito, da *mappare* (agli istanti di simbolo) su un insieme finito di punti nello spazio, che per segnali modulati è lo spazio dell'inviluppo complesso.

Il capitolo si sviluppa affrontando per prime le tecniche *a portante singola* basate su modulazione di ampiezza, di fase ed in quadratura, di cui si individuano l'occupazione spettrale e le prestazioni conseguibili. Dopo aver discusso delle particolarità e delle possibilità offerte dalla codifica differenziale, vengono trattate la modulazione di frequenza, a simboli ortogonali, e sviluppata la teoria della demodulazione incoerente. Si passa quindi alla analisi della tecnica OFDM, la relativa architettura di mo-demodulazione, la valutazione delle prestazioni, più una serie di aspetti particolari come temporizzazione, equalizzazione, codifica differenziale, criterio di ottimizzazione del *bit loading*, trasmissione codificata ed adozione di portanti pilota. A questo fa quindi seguito la trattazione dei sistemi a *spettro espanso*, con le sue sequenze pseudo-casuali, le problematiche di sincronizzazione, l'analisi della tecnica DSSS in presenza di rumore e di tono interfe-

rente, il suo utilizzo ai fini dell'accesso multiplo, accennando inoltre alle tecniche di *frequency* e *time hopping* o UWB. Il capitolo si chiude con una panoramica su ulteriori possibilità operative, dall'*offset keying* a MSK e CPK, risposta parziale e *trellis coding*.

16.1 Modulazione di ampiezza

In questo caso l'informazione numerica è impressa sulla portante alterando le ampiezze di una (o entrambe, come mostrato al § 16.3) delle componenti analogiche di bassa frequenza.

16.1.1 Modulazione BPSK

E' l'acronimo di *Bi-Phase Shift Keying*¹, e individua una tecnica per il trasporto dell'informazione basata sull'utilizzo di 2 possibili fasi per la portante:

$$x_{BPSK}(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad \text{dove} \quad \varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \text{rect}_{T_b}(t - kT_b) \quad (16.1)$$

con i valori φ_k pari a $\pm \frac{\pi}{2}$ per rappresentare le cifre binarie 0 ed 1 trasmesse agli istanti kT_b . Sebbene l'operazione così definita corrisponda ad una modulazione di fase (§ 12.3), è facile mostrare come possa essere realizzata mediante una comune modulazione di ampiezza BLD-PS (§ 12.1.1) con segnalazione antipodale (§ 7.6.1). Se definiamo infatti un segnale $m(t)$ come un codice di linea NRZ bipolare (§ 15.2.1), che assume valori ± 1 in corrispondenza delle cifre binarie 0 ed 1, allora il segnale

$$x_{BPSK}(t) = m(t) \cos \omega_0 t$$

è equivalente a quello espresso dalla (16.1), e la sua mo-demodulazione coerente avviene mediante l'architettura mostrata alla fig. 16.1. Il segnale uscente dal moltiplicatore di demodulazione² ha espressione

$$y(t) = x(t) \cdot 2 \cos \omega_0 t = 2m(t) \cdot \cos^2 \omega_0 t = m(t) + m(t) \cdot \cos 2\omega_0 t$$

e dunque il codice di linea $m(t)$ può essere riottenuto mediante filtraggio passa-basso. La parte centrale di fig. 16.1 mostra la *forma d'onda* che corrisponde alle elaborazioni previste, mentre nella parte inferiore sono raffigurate le densità spettrali corrispondenti (esprese in dB, vedi § 8.1), tenendo conto³ di eq. (15.2), di fig. 3.6, e della mo-demodulazione BLD-PS (§ 12.1.1.1).

Una buona caratteristica di questa tecnica è il valore *costante* dell'ampiezza della portante modulata, che permette di utilizzare la massima potenza al trasmettitore, appena inferiore al valore che inizia a produrre fenomeni di distorsione (§ 13.3). L'aspetto

¹Letteralmente, *slittamento di tasto a due fasi*.

²Qui e nel seguito assumiamo di disporre di una portante di demodulazione omodina o coerente (§ 12.2.1), ossia priva di errori di fase e frequenza, così come di una perfetta temporizzazione di simbolo; le considerazioni al riguardo di quest'ultimo aspetto sono svolte all'appendice 16.11.

³Il segnale di banda base $m(t) = \sum_k a_k \cdot g(t - kT_b)$ in cui $g(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$ ed i simboli a_k sono a media nulla ed indipendenti, ha una densità di potenza $\mathcal{P}_m(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_b} \text{sinc}^2(fT_b)$, il cui andamento è mostrato in fig. 3.6 di pag. 79.

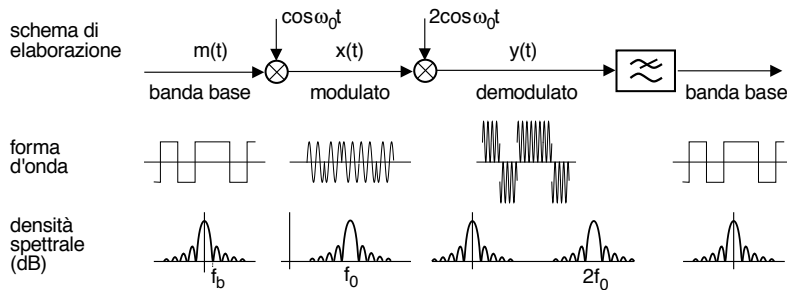


Figura 16.1: Architettura di mo-demodulazione BPSK, forma d'onda, e densità spettrale

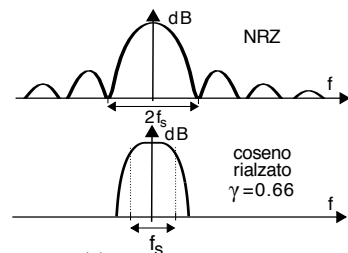
negativo è l'elevata occupazione di banda, legata all'uso di forme d'onda rettangolari per $m(t)$ che, nel caso di trasmissione su canali con limitazioni di banda, causa vincoli sulla massima frequenza binaria. Pertanto il metodo è particolarmente indicato nel caso di collegamenti in cui è limitata la potenza di trasmissione, ma non la banda⁴.

Alternative per l'impulso di banda base $g(t)$ Riprendendo i concetti discussi al § 15.2, in questo capitolo il segnale dati di *banda base* (ovvero pre-modulazione) è realizzato mediante una delle seguenti possibilità di scelta per l'impulso $g(t)$:

- NRZ o rettangolare (pag. 443), che determina una occupazione di banda multipla di $f_b = 1/T_b$;
- con trasformata a coseno rialzato (§ 15.2.2.3), con una banda pari a $\frac{f_s}{2} (1 + \gamma)$;
- a banda minima (pag. 449), che riduce l'occupazione di frequenza ad $\frac{f_s}{2}$, ma presenta difficoltà realizzative.

Gli aspetti prima evidenziati per il BPSK sono *sovertiti* qualora il segnale $m(t)$ sia basato su forme d'onda $g(t)$ con una limitata occupazione di banda, come per il coseno rialzato, con una banda a *frequenze positive* pari a $B_{BPSK} = f_b (1 + \gamma)$, doppia rispetto al caso di banda base, a causa della modulazione BLD, mentre l'ampiezza del segnale modulato *non è più costante*.

Infatti in corrispondenza degli istanti kT_b l'ampiezza di $x_{BPSK}(t)$ assume esattamente uno dei valori (± 1) del segnale dati $m(t)$, ma nell'intervallo tra due istanti $kT_b < t < (k + 1)T_b$ l'ampiezza dipende dalla somma di tutte le *code* delle funzioni $g(t)$ relative ai simboli trasmessi (vedi fig. 15.8 a pag. 450).



16.1.2 Modulazione L-ASK

Ci riferiamo ora al caso in cui si operi una classica AM-BLD (da cui il termine *Amplitude Shift Keying* - ASK) a partire da un segnale dati $m(t)$ multivivello (§ 15.1.2.4), producendo un segnale modulato di espressione

$$x_{L-ASK}(t) = m(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \text{dove} \quad m(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s)$$

⁴Come ad esempio i collegamenti satellitari, vedi § 25.3.



in cui $m(t)$ agli istanti kT_s assume valori a_k distribuiti uniformemente, in un intervallo Δ , su L livelli di ampiezza centrati sullo zero⁵. L'ampiezza di L-ASK subisce dunque variazioni, come mostrato nella

figura soprastante per un caso con $L = 8$, in cui è rappresentato anche un diagramma detto *costellazione*, che rappresenta i valori assunti dall'involuppo complesso in corrispondenza degli istanti di simbolo, che in virtù della AM-BLD presenta la sola c.a. di b.f. $x_c(t)$.

Ogni a_k rappresenta dunque $M = \log_2 L$ bit, ed il periodo di simbolo $T_s = MT_b$ ha durata multipla di T_b , pertanto la banda occupata da L-ASK è *minore* rispetto a quella del BPSK di un fattore pari a $M = \log_2 L$ ⁽⁶⁾. Anche in questo caso, se $m(t)$ è generato mediante un impulso a coseno rialzato anziché con uno NRZ⁷, la densità spettrale assume il noto andamento (vedi pag. 448) riportato ora in figura 16.2, assieme ai corrispettivi valori in dB. Pertanto la banda a frequenze positive occupata da $x_{L-ASK}(t)$ con $g(t)$ a coseno rialzato vale

$$B_{L-ASK} = f_s (1 + \gamma) = \frac{f_b}{\log_2 L} (1 + \gamma) \quad (16.2)$$

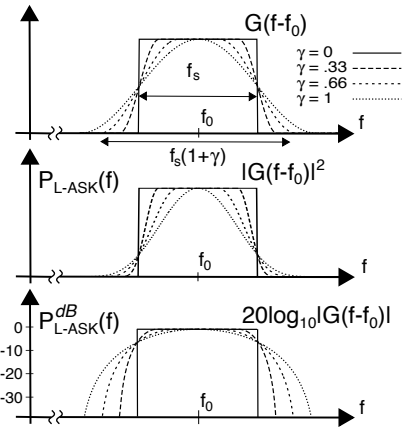


Figura 16.2: Densità spettrale di L-ASK in diverse unità di misura

Efficienza spettrale o densità di informazione E' definita come il rapporto ρ tra la frequenza binaria e la banda occupata

$$\rho = \frac{f_b}{B} \quad (16.3)$$

e si esprime in *bit/sec/Hz*, rappresentando appunto quanti bit/sec sono trasmessi per ogni Hz utilizzato. Nel caso di L-ASK con impulsi a banda minima ($\gamma = 0$) si trova allora

$$\rho_{L-ASK} = \frac{f_b}{B} = \log_2 L \quad (16.4)$$

mentre per altre forme di modulazione e/o di impulsi si ottengono altri valori⁸, confrontando i quali si valuta la bontà di un metodo rispetto all'altro nei termini dell'utilizzo di banda.

⁵Per chi si sta chiedendo quanto valgono questi livelli, diciamo che il livello i -esimo (con $i = 0, 1, \dots, L-1$) corrisponde al valore $a^i = i \cdot \frac{\Delta}{L-1} - 1$. Verificare per esercizio con $\Delta = 2$ ed $L = 4$.

⁶Ad esempio: se $L = 32$ livelli, la banda si riduce di 5 volte, ed infatti con $M = 5$ bit si individuano $L = 2^M = 32$ configurazioni. Dato che il numero M di bit/simbolo deve risultare un intero, si ottiene che i valori validi di L sono le potenze di 2.

⁷Notiamo che mentre per il BPSK scegliere il primo al posto del secondo comporta perdere i benefici di una ampiezza costante, nel caso multilivello l'ampiezza è intrinsecamente variabile.

⁸Vedi tabella 16.1 a pag. 515.

Esempio Se confrontiamo il risultato per ρ_{L-ASK} con quello relativo ad una trasmissione numerica di banda base (vedi eq. (15.5)), notiamo un *peggioramento* di un fattore 2, dovuto all'uso di una AM-BLD.

Come per il caso analogico, la banda potrebbe essere *dimezzata* adottando una AM-BLU, ma troveremo invece tra breve che si preferisce seguire approcci diversi, come ad esempio PSK e QAM.

16.1.3 Valutazione delle prestazioni

Dopo alcune considerazioni relative al legame tra SNR ed occupazione di banda, la valutazione della P_e fa tesoro di quanto ottenuto al § 15.4.

SNR, E_b/N_0 ed efficienza spettrale Nell'analisi delle prestazioni che affronteremo la probabilità di errore per simbolo P_e (*simbolo*) o per bit P_e (*bit*) è espressa in funzione della grandezza $\frac{E_b}{N_0}$ introdotta a pag. 455, e che rappresenta l'equivalente del rapporto segnale rumore *di sistema* $SNR_0 = \frac{\mathcal{P}_x}{N_0 W}$ definito al § 14.2.1.1⁹, nel senso che come questo consente il confronto tra tecniche diverse¹⁰. D'altra parte, una trasmissione AM-BLD numerica che occupi una banda a frequenze positive B si presenta in ingresso al decisore con un

$$SNR = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_n} = \frac{E_b f_b}{2B \cdot N_0/2} = \frac{E_b f_b}{N_0 B} = \rho \frac{E_b}{N_0} \quad (16.5)$$

in cui \mathcal{P}_n è limitata da un filtro di ricezione, e ρ è l'efficienza spettrale definita alla (16.3): pertanto $\frac{E_b}{N_0}$ è anche indicato come *SNR normalizzato* o *SNR per bit*. Nel caso di $g(t)$ a banda minima (§ 15.2.2.3) la (16.4) fornisce $\rho_{L-ASK} = \log_2 L$ e dunque $SNR = \log_2 L \frac{E_b}{N_0}$, mentre a pag. 455, eq. (15.16), si deriva la relazione tra $\frac{E_b}{N_0}$ e SNR per il caso particolare di un segnale dati *a coseno rialzato*.

Invertendo la (16.5) si ottiene $\frac{E_b}{N_0} = SNR/\rho$ evidenziando come, a parità di SNR, al miglioramento dell'efficienza spettrale ρ corrisponda una diminuzione di $\frac{E_b}{N_0}$, che a sua volta è causa di un peggioramento della probabilità di errore, in accordo con il *compromesso banda-potenza*, vedi § 15.4.7.

Probabilità di errore BPSK e L-ASK La P_e viene calcolata per un segnale L-ASK in funzione di E_b/N_0 , al variare del numero di livelli, ottenendo il caso BPSK per $L = 2$.

Al § 16.1.2 abbiamo osservato come l'L-ASK sia ottenibile mediante una modulazione AM-BLD di un segnale dati di banda base (vedi anche fig. 16.3), e come discusso al § 14.2.1.1, l'SNR in uscita dal filtro di ricezione (e dunque l' $\frac{E_b}{N_0}$, vedi eq. (16.5)) per una modulazione AM-BLD è pari al rapporto SNR_0 tra potenza ricevuta e potenza di rumore nella banda del segnale *modulante*. Pertanto l'SNR (e l' $\frac{E_b}{N_0}$) dopo demodulazione di L-ASK è pari a quello che si avrebbe per il segnale dati di banda base da cui ha origine. Le prestazioni per un segnale dati *di banda base* a coseno rialzato sono ricavate al

⁹Ricordiamo che \mathcal{P}_x esprime la potenza ricevuta, N_0 rappresenta il doppio della $\mathcal{P}_n(f)$ presente al decisore, e W è la banda del segnale modulante.

¹⁰Infatti come discusso a pag. 455 $E_b = \frac{\mathcal{P}_x}{f_b}$, come N_0 , dipende solamente da *parametri di sistema* (\mathcal{P}_x e f_b), mentre invece non dipende dai *parametri di trasmissione* L e γ e dal tipo di modulazione.

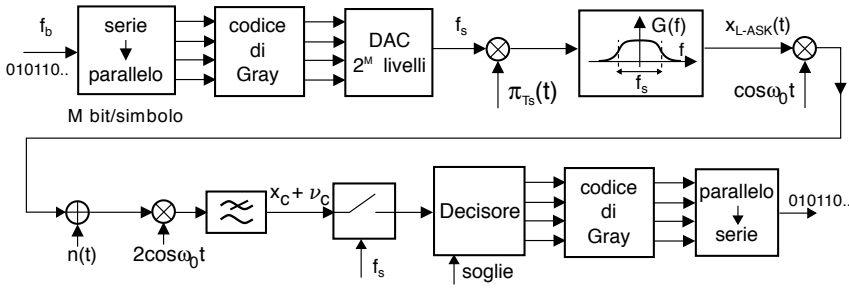


Figura 16.3: Schema di mo-demodulazione per un segnale L-ASK

§ 15.4.9, che riportiamo sotto come probabilità di errore *per simbolo* dell'L-ASK¹¹

$$P_e^{L-ASK}(\text{simbolo}) = \left(1 - \frac{1}{L}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{\log_2 L}{L^2 - 1}} \right\} \quad (16.6)$$

valida per un segnale con $\gamma = 0$, ossia a *banda minima*¹². Le curve di $P_e^{L-ASK}(\text{bit})$ in funzione di $E_b/N_0|_{dB}$ sono quelle di fig. 15.12 a pag. 461, dove si tiene anche conto dell'uso di un codice di Gray (§ 15.4.9.1) per associare i livelli a configurazioni binarie.

Come anticipato, per $L = 2$ la (16.6) esprime le prestazioni del BPSK, ovvero

$$P_e^{BPSK}(\text{bit}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\} \quad (16.7)$$

che come prima si riferisce al caso di banda minima, ed i cui valori sono graficati in fig. 16.4, identica alla (15.18) ottenuta per il caso di banda base, ed alla (7.27) relativa al filtro adattato. Per completare i confronti osserviamo che ora all'aumentare di L la banda (16.2) (per $\gamma = 0$)

$$B_{L-ASK} = f_s = \frac{f_b}{\log_2 L}$$

si riduce, mentre la P_e (16.6) aumenta: ciò può tor-

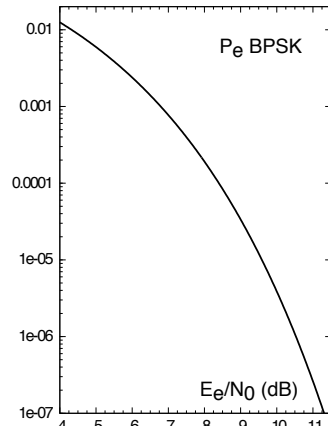


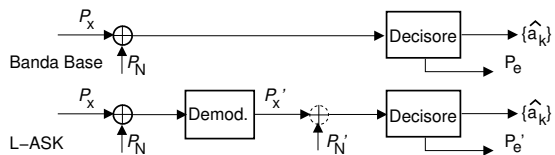
Figura 16.4: Prestazioni BPSK

¹¹Forniamo qui una contro-dimostrazione forse inutilmente elaborata. Con riferimento alla figura seguente, il calcolo della P_e per l'L-ASK si imposta definendo valori di E_b ed N_0 equivalenti a quelli di banda base, ma ottenuti dopo demodulazione, e cioè $E'_b = P'_x T_b$ e $N'_0 = P'_N / W$ (infatti,

$P'_N = \frac{N'_0}{2} 2W$, con $W = \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2 \log_2 L}$). L'equivalenza è presto fatta, una volta tarato il demodulatore in modo che produca in uscita la componente in fase $x_c(t)$ limitata in banda tra $\pm W$.

Infatti in tal caso (vedi § 14.2.1) $P'_x = P_{x_c} = k_a^2 P_M = 2P_x$ e quindi $E'_b = P'_x T_s = 2P_x T_s = 2E_b$; per il rumore si ottiene $N'_0 = \frac{P'_N}{W}$ in cui $P'_N = P_{n_c} = \sigma_{n_c}^2 = \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} 4W$ e quindi $N'_0 = 2N_0$. Pertanto, il valore E'_b/N'_0 su cui si basa ora il decisore è lo stesso E_b/N_0 in ingresso al demodulatore.

¹²Se $\gamma \neq 0$, valgono le considerazioni svolte al § 15.4.9.



nare utile in presenza di canali con limitazioni di banda ma non di potenza, dato che in tal caso la P_e può essere ripristinata aumentando la potenza e quindi E_b/N_0 , in base al cosiddetto *compromesso banda-potenza*. Al § 16.5.1 vedremo come nella tecnica di FSK ortogonale lo stesso compromesso operi in direzione opposta, ovvero riuscendo a migliorare P_e al prezzo di aumentare l'occupazione di banda.

16.2 Modulazione di fase

Nel caso in cui l'informazione viene rappresentata dalla fase della portante ci si può riferire a simboli quaternari, o multilivello.

16.2.1 Modulazione QPSK ed L-PSK

Questi due acronimi si riferiscono alla possibilità di usare rispettivamente *quattro* oppure $L > 4$ scelte diverse¹³ per la fase, dando luogo ad un segnale modulato con espressione

$$x_{L-PSK}(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$

e quindi un inviluppo complesso

$$\underline{x}_{L-PSK}(t) = a e^{j\varphi(t)} = a \cos \varphi(t) + ja \sin \varphi(t) \quad (16.8)$$

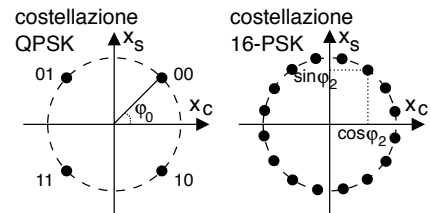
in cui

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \quad \text{e} \quad \varphi_k \in \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{L-1}\} \quad (16.9)$$

La generica fase

$$\varphi_i = \frac{\pi}{L} + i \cdot \frac{2\pi}{L} \quad \text{con} \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

rappresenta una delle $L = 2^M$ possibili combinazioni di M bit di ingresso, e corrisponde ad uno dei punti mostrati nelle *costellazioni* di figura, che



individuano il valore dell'inviluppo complesso ricevuto in assenza di rumore negli istanti di simbolo $t = kT_s$ ed a cui si fanno corrispondere gruppi di bit in accordo alla codifica di Gray (§ 15.4.9.1). Lo stesso valore di fase è quindi mantenuto per tutto il periodo di simbolo se $\varphi(t)$ è realizzata mediante rettangoli come indicato nella (16.9). Ma l'espressione (16.8) di $\underline{x}_{L-PSK}(t)$ in termini di $\{x_c, x_s\}$ evidenzia come il risultato sia ottenibile mediante una modulazione AM in fase e quadratura¹⁴, suggerendo l'implementazione del modulatore secondo lo schema di fig. 16.5, in cui i valori di $\cos \varphi_i$ e $\sin \varphi_i$ per gli L diversi gruppi di M bit sono precalcolati in una memoria a sola lettura, ed impiegati come ampiezze per realizzare due segnali dati di banda base, usati quindi come c.a di b.f. per il modulatore in fase e quadratura.

Occupazione di banda L'uso di un codice NRZ per $\varphi(t)$, e quindi per x_c ed x_s , produce una occupazione di banda elevata per $x_{L-PSK}(t)$, la cui densità di potenza

¹³Il caso in cui $L = 2$ ricade nel BPSK già discusso

¹⁴che *non* è una modulazione AM-BLU dato che $x_s \neq \hat{x}_c$

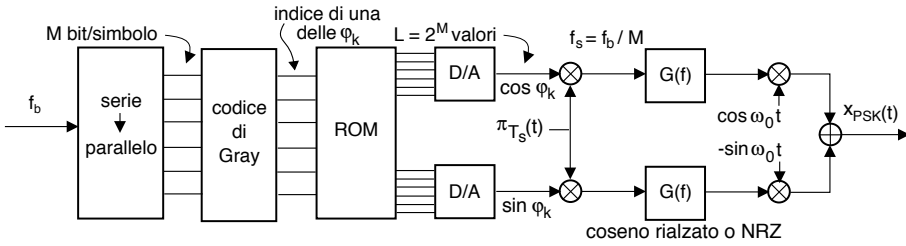


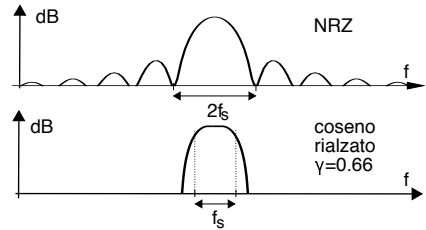
Figura 16.5: Modulatore L-PSK

in tal caso acquisisce un andamento $(\frac{\sin x}{x})^2$ centrato in f_0 e con lobo principale di estensione¹⁵ pari ad $2f_s = 2f_b/M$, come rappresentato in figura per una densità di potenza in dB. L'occupazione di banda può essere limitata a

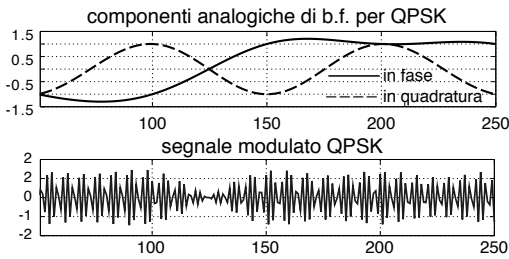
$$B_{L-PSK} = f_s (1 + \gamma)$$

se si realizza $\varphi(t)$ mediante impulsi $g(t)$ a coseno rialzato, potendo così scrivere

$$\underline{x}_{L-PSK}(t) = a \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\varphi_k} \cdot g(t - kT_s) \tag{16.10}$$



Dinamica delle ampiezze Adottando un impulso $g(t)$ a coseno rialzato anziché rettangolare, $\underline{x}(t)$ passa dai punti della costellazione *solo* negli istanti di simbolo, mentre nell'intervallo tra due di essi segue traiettorie di ampiezza variabile¹⁶, come



illustrato nella figura a fianco, non permettendo al segnale modulato di mantenere un'ampiezza costante come dovrebbe avere la modulazione angolare¹⁷. Pertanto la scelta tra NRZ o coseno rialzato dipende dalla necessità di limitare la dinamica delle ampiezze, piuttosto che l'estensione della banda.

Traiettoria dell'involuppo complesso Altrettanto interessante può essere riflettere sulla fig. 16.6 in cui si mostrano x_c ed x_s ancora per una modulazione QPSK, valutate con $g(t)$ a coseno rialzato ($\gamma = 0.5$) per 10 campioni per simbolo, e mostrate per 10 simboli in coordinate cartesiane e polari; al centro è mostrato la corrispondente evoluzione per $\underline{x}(t)$, mentre a destra si mostra la traiettoria di $\underline{x}(t)$ visualizzata per 100 simboli.

¹⁵Infatti un rettangolo di durata T_s ha trasformata $\text{sinc}(T_s f)$, con il primo zero in $f = 1/T_s = f_s$, e la modulazione AM-BLD produce un raddoppio della banda occupata.

¹⁶Se viceversa $g(t) = \text{rect}_{T_s}(t)$, $|\underline{x}|$ giace su di un cerchio, spostandosi *istantaneamente* da un punto all'altro della costellazione

¹⁷Nella parte superiore della figura è mostrato l'andamento delle c.a. di b.f. per 5 simboli di un QPSK realizzato adottando $g(t)$ a coseno rialzato con $\gamma = 0.5$, e si può notare che ognuna di esse assume il valore ± 1 in corrispondenza di ogni periodo di simbolo. Nella parte inferiore è riportato il corrispondente segnale modulato, che come si vede non è affatto ad ampiezza costante.

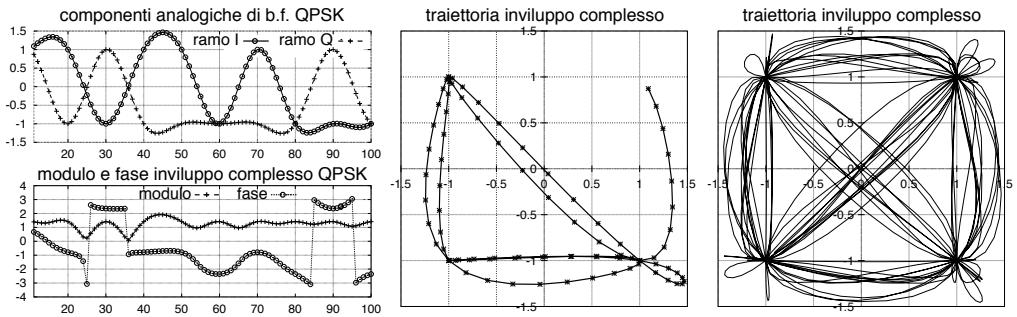


Figura 16.6: Andamento delle c.a. di b.f. x_c ed x_s per dieci simboli di segnale qpsk, in coordinate cartesiane e polari (a sn.), traiettoria dell'involuppo complesso $\underline{x}(t)$ per 10 simboli (al centro) e per 100 simboli (a ds.)

Efficienza spettrale Per L-PSK l'efficienza spettrale è identica a quanto ottenuto per l'ASK con ugual numero di livelli, dato che per entrambe la frequenza di simbolo risulta pari a $f_s = \frac{f_b}{\log_2 L}$, e dunque (per coseno rialzato con $\gamma = 0$) si ottiene

$$\rho_{L-PSK} = \frac{f_b}{B} = \frac{f_s \log_2 L}{f_s} = \log_2 L$$

Dal punto di vista delle prestazioni, occorre distinguere il caso in cui $L = 4$ (indicato come QPSK = *Quadrature Phase Shift Keying*) da quello con L generico, in quanto sussistono due diverse architetture per il demodulatore.

16.2.2 Prestazioni QPSK

In questo caso (PSK con 4 livelli) il demodulatore coerente è costituito da due rami indipendenti in fase e quadratura (vedi fig. 16.8), che operano ad una frequenza di simbolo f_s pari a metà di quella binaria. In virtù di come la codifica di Gray dispone la costellazione (vedi fig. 16.7), ogni ramo del decisore opera su di un solo bit della coppia associata al simbolo trasmesso; le due decisioni vengono poi ri-serializzate. Entrambi i rami si comportano quindi come un demodulatore L-ASK (§ 16.1.2) con $L=2$, ovvero un BPSK, e per un segnale dati a coseno rialzato a banda minima ($\gamma = 0$) la probabilità di errore relativa ad ogni

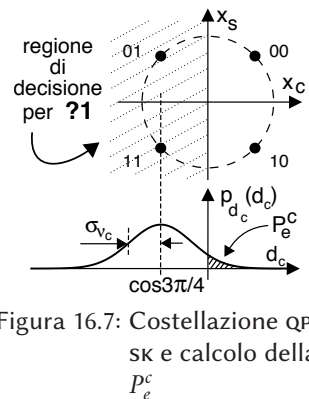


Figura 16.7: Costellazione qpsk e calcolo della p_e^c

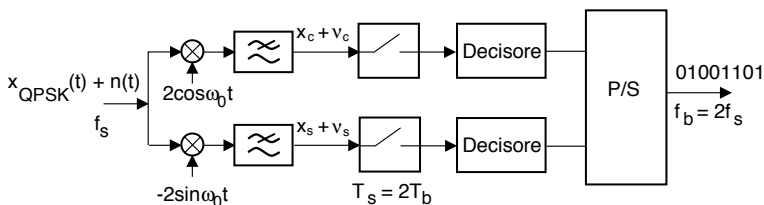


Figura 16.8: Demodulatore QPSK

singolo ramo è espressa¹⁸ dalla (16.7), fornendo

$$P_e^c = P_e^s = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$$

che rappresenta la probabilità che una componente analogica di b.f. ottenuta demodulando il segnale con sovrapposto rumore, valutata all'istante di decisione kT_s , giaccia nell'area mostrata in basso¹⁹ della figura 16.7. La probabilità di errore (per impulso a banda minima) *in un bit* della sequenza re-serializzata risulta quindi²⁰

$$P_e^{QPSK} (bit) = P_e^c \cdot Pr \{c\} + P_e^s \cdot Pr \{s\} = \frac{1}{2} (P_e^c + P_e^s) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\} \quad (16.11)$$

in cui $Pr \{c\} = Pr \{s\} = 1/2$ sono le probabilità che il bit ricevuto provenga dal ramo in fase o da quello in quadratura; d'altra parte, la probabilità di errore *per simbolo* risulta $P_e (simbolo) \simeq P_e^c + P_e^s = \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$ (trascurando nuovamente la probabilità di un errore contemporaneo su entrambi i rami, vedi nota 20).

Osserviamo quindi come il QPSK consenta di ottenere *le stesse prestazioni* del BPSK, graficate in fig. 16.4, utilizzando solo *metà banda*, in virtù del T_s doppio:

$$B_{QPSK} = f_s = \frac{f_b}{2} (1 + \gamma)$$

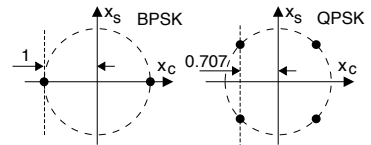
Quest'ultima osservazione permette di scrivere $\rho_{QPSK} = \frac{f_b}{B_{QPSK}} = 2 = 2 \cdot \rho_{BPSK}$, e suggerisce un ulteriore²¹ punto di vista rispetto all'invarianza delle prestazioni rispetto al BPSK: infatti, dimezzando la banda si dimezza anche la varianza del rumore in ingresso al demodulatore, e ciò compensa la riduzione di ampiezza delle c.a. di b.f. del segnale per il caso QPSK.

¹⁸In effetti, dovremmo verificare che l'attuale valore di E_b/N_0 sia lo stesso del caso BPSK: mentre per N_0 al § 14.1.3 si mostra che è vero, per quanto riguarda E_b (a prima vista) sembra che il suo valore si dimezzi. Infatti, a parità di potenza ricevuta, i punti di costellazione del BPSK giacciono all'intersezione tra l'asse cartesiano della c.a. di b.f. ed il cerchio di raggio pari all'ampiezza a del segnale ricevuto, mentre nel QPSK le fasi formano un angolo di 45° rispetto agli assi, moltiplicando per $\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2$ le coordinate cartesiane, e riducendo dunque la potenza delle c.a. di b.f. di un fattore 2, e così pure il valore di E_b . In realtà, la durata doppia del periodo di simbolo $T_s = 2T_b$ compensa questa riduzione, e dunque anche l' E'_b di ogni ramo $E'_b = P_x T_s$ si mantiene invariato.

¹⁹All'istante di decisione k su ciascun ramo si osserva una v.a. gaussiana $d_{c,s}$ con varianza $\sigma_{v_{c,s}}^2$ (vedi fig. 14.2 a pag. 411) e valor medio $x_c(kT_s) = \cos \varphi_k$ e $x_s(kT_s) = \sin \varphi_k$, dove φ_k è la fase del punto di costellazione trasmesso all'istante $t = kT_s$, vedi eq. (16.10). Nell'esempio di figura la decisione per il secondo dei due bit del simbolo cambia in funzione del segno di d_c , e dunque si commette errore sul ramo in fase se ad es. si trasmette x_1 , ma il rumore su quel ramo ha un valore sufficientemente positivo da far superare lo zero in corrispondenza dell'istante di decisione.

²⁰In effetti all'istante di decisione potrebbe verificarsi errore su *entrambi* i rami, ma tale evento avviene con probabilità $P_e^c \cdot P_e^s$ che si ritiene tanto più trascurabile rispetto a P_e^c quanto più quest'ultimo è piccolo.

²¹Ulteriore rispetto al commento alla nota 18, dove il ragionamento è svolto sull' E_b/N_0 , mentre ora sull'*SNR*.



Ottimalità di BPSK e QPSK Se queste tecniche sono attuate mediante un $G(f) = \text{rect}_{f_s/2}(f)$ ovvero a banda minima, in presenza di demodulazione *coerente* il filtro passabasso che precede il campionatore del decisore costituisce *un filtro adattato* (vedi § 7.6.1) con segnalazione *antipodale*, e le prestazioni sono quelle ottime, come si verifica confrontando l'eq. (7.27) con le (16.7) e (16.11). Se viceversa $G(f)$ non è a banda minima, ma di Nyquist, la coerenza di demodulazione permette comunque di adottare in ricezione un filtro adattato (§ 15.5) al posto del passabasso mostrato in fig. 16.3, e dunque ottenere le medesime prestazioni.

16.2.3 Prestazioni L-PSK

In questo caso il demodulatore ha una differente architettura (vedi fig. 16.9), ed il decisore opera congiuntamente su entrambi i rami, per ottenere la stima del gruppo di $M = \log_2 L$ bit associati ad una delle possibili fasi φ_k . Indicando con $d_{c,s}^k$ le c.a. di b.f. demodulate all'istante $t = kT_s$, la decisione avviene calcolando $\varphi_k^d = \arctan \frac{d_s^k}{d_c^k}$ e stabilendo all'interno di quale regione di decisione $\hat{\varphi}_k$ cada la fase ricevuta φ_k^d , a cui il decisore fa corrispondere una codeword di Gray (fig. 16.10). All'aumentare del numero di livelli L , la potenza di rumore (che concorre alla probabilità di errore) diminuisce con la stessa legge di riduzione della banda, ovvero con il $\log_2 L$, mentre la spaziatura tra le regioni di decisione diminuisce con legge lineare rispetto ad L . Pertanto, l'aumento del numero di livelli produce un peggioramento della P_e . Senza approfondire i relativi conti, forniamo direttamente il risultato (con $\gamma = 0$) della probabilità di errore sul simbolo

$$P_e^{L-PSK}(\text{simbolo}) = \text{erfc} \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{E_b}{N_0} \log_2 L} \right\} \quad (16.12)$$

che rappresenta la probabilità di decidere di aver ricevuto un $\hat{\varphi}_k \neq \varphi_k$ (diverso da quello trasmesso) e che, se $P_e \ll 1$, è approssimata con la probabilità di invadere (a causa del rumore) una regione di decisione contigua (vedi fig. 16.9).

Confrontando il risultato con quello (eq. 16.6) per l'ASK, osserviamo che l'assenza del termine $(1 - \frac{1}{L})$ è dovuto alla *circolarità* della costellazione, che il termine $\sin(\frac{\pi}{L})$ è un fattore che rappresenta il peggioramento all'aumentare di L , ed il $\log_2 L$ sotto radice è il miglioramento dovuto alla riduzione di banda. Il risultato (16.12) è una approssimazione valida se $P_e \ll 1$, e via via più accurata con L crescente.

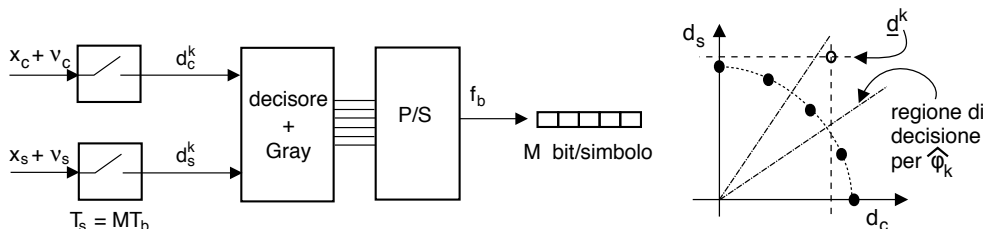


Figura 16.9: Demodulatore L-PSK

Nella tabella a lato si riporta il risultato del confronto, per uno stesso valore di P_e , dei valori $\frac{E_b}{N_0}$ necessari per L-PSK (16.12), contro quelli necessari (16.6) per L-ASK: si è eseguito il rapporto tra gli argomenti degli erfc {}, si è elevato al quadrato, indicato come Δ , ed il risultato è espresso in dB: quest'ultimo rappresenta (a parte il termine $(1 - \frac{1}{L})$ dell'L-ASK) il miglioramento di prestazioni in dB dell'L-PSK rispetto ad L-ASK, ovvero i dB di potenza risparmiata a parità di probabilità di errore. Tale risultato (4-5 dB di miglioramento) porta a prediligere sempre il PSK rispetto all'ASK.

L	$\Delta_{E_b/N_0} = \frac{1}{3} (L^2 - 1) \sin^2 \frac{\pi}{L}$	$\Delta_{E_b/N_0} (dB)$
4 (QPSK)	2.5	4
8	3.07	4.88
16	3.23	5.1
32	3.28	5.2
64	3.29	5.2

E' opportuno osservare che, qualora si desideri ottenere un valore di probabilità di errore *per bit*, questo è pari a

$$P_e (bit) = \frac{P_e (simbolo)}{\log_2 L}$$

a patto di associare, a livelli contigui, gruppi di bit differenti in una sola posizione, come previsto dal codice di Gray²² (mostrato nella figura 16.10), in modo che l'errore tra due fasi φ_k contigue provochi l'errore di un solo bit nel gruppo di $\log_2 L$ bit associati a ciascun livello. Le curve di probabilità di errore per bit, riportate anch'esse in fig. 16.10, sono calcolate in questo modo.

16.3 Modulazione QAM

Questo acronimo sta per *Quadrature Amplitude Modulation*, ed individua la tecnica di modulazione che utilizza due portanti in quadratura come il PSK

$$x_{QAM} (t) = x_c (t) \cos \omega_0 t - x_s (t) \sin \omega_0 t$$

ma a differenza del PSK, ora le componenti di banda base x_c ed x_s *non* dipendono da una stessa sequenza di fasi, ma sono originate da due flussi di dati distinti.

Con riferimento alla fig. 16.11, osserviamo che sebbene $x_c (t)$ e $x_s (t)$ si ottengano a

²²vedi il § 15.4.9.1

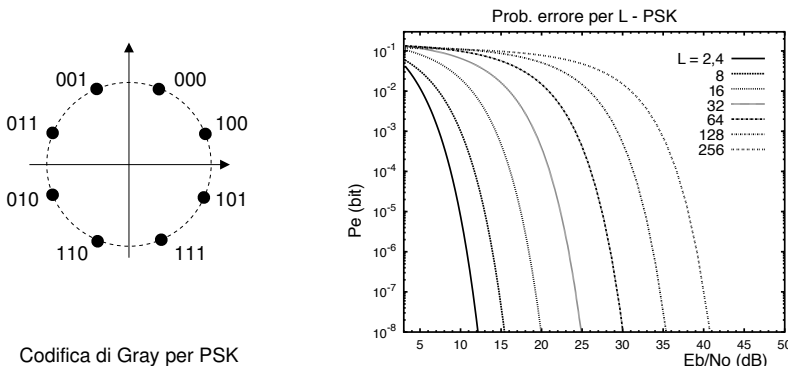


Figura 16.10: Prestazioni L-PSK con codice di Gray

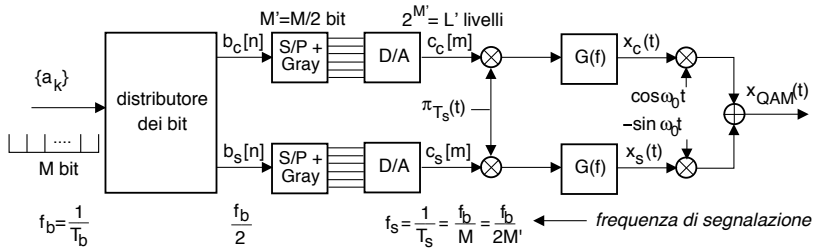
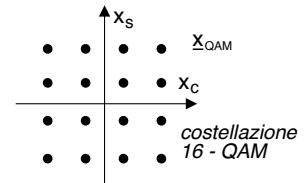


Figura 16.11: Architettura di un modulatore QAM

partire da una medesima sequenza numerica $\{a_k\}$, i bit di quest'ultima sono distribuiti alternativamente sui due rami (sequenze $b_c[n]$ e $b_s[n]$ in figura) a velocità dimezzata²³, suddividendo un gruppo di M bit in due simboli costituiti da $M' = M/2$ bit. Dalle sequenze b_c e b_s ad M' bit/simbolo poi si ottengono (mediante codifica di Gray) i valori c_c e c_s con $L' = 2^{M'} = 2^{M/2} = \sqrt{2^M} = \sqrt{L}$ livelli, che attraversando in forma impulsiva il filtro $G(f)$, danno luogo ai segnali di banda base x_c ed x_s .

La sequenza di operazioni descritte determina una costellazione *quadrata*, composta da $L = (L')^2$ punti²⁴, che rappresentano le coordinate (nel piano dell'involuppo complesso) in cui \underline{x} è forzato a transitare in corrispondenza degli istanti di Nyquist multipli del periodo di simbolo T_s , che risulta essere pari a

$$T_s = T_b \cdot M = \frac{1}{f_b} \log_2 L$$



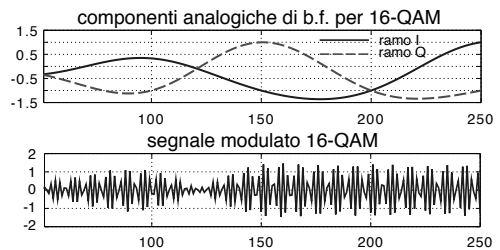
Esempio il 16-QAM si ottiene con $m = 4$ bit/simbolo ($L = 16 = 2^M = 2^4$) e sui due rami sono presenti $L' = \sqrt{16} = 4$ livelli, ottenendo il risultato di una costellazione quadrata di $L = 4 \times 4 = 16$ punti.

Occupazione di banda Se $G(f)$ è a coseno rialzato con roll off γ , allora la banda a frequenze positive di x_c ed x_s risulta pari a $\frac{f_s}{2}(1 + \gamma) = \frac{f_b}{2 \log_2 L}(1 + \gamma)$, mentre quella di x_{QAM} è pari al doppio, a causa della modulazione AM-BLD-PS operata sui due rami del modulatore, ovvero

$$B_{QAM} = \frac{f_b}{\log_2 L}(1 + \gamma) = f_s(1 + \gamma)$$

e quindi uguale a quella di ASK e PSK con uguale numero di livelli (di cui condivide quindi anche l'efficienza spettrale).

Dinamica delle ampiezze Nella parte superiore della figura a lato è mostrato l'andamento di x_c ed x_s per 5 simboli di



²³In pratica, l'indice n si incrementa ogni due incrementi dell'indice k .

²⁴Per come si è impostata la distribuzione dei bit tra i rami L deve risultare un quadrato perfetto. Sebbene sia possibile realizzare anche costellazioni di forma *non quadrata*, vedi ad es. AA.VV., *A Survey on Design and Performance of Higher-Order QAM Constellations* presso <https://arxiv.org/pdf/2004.14708.pdf>, la soluzione quadrata è preferita per semplicità realizzativa.

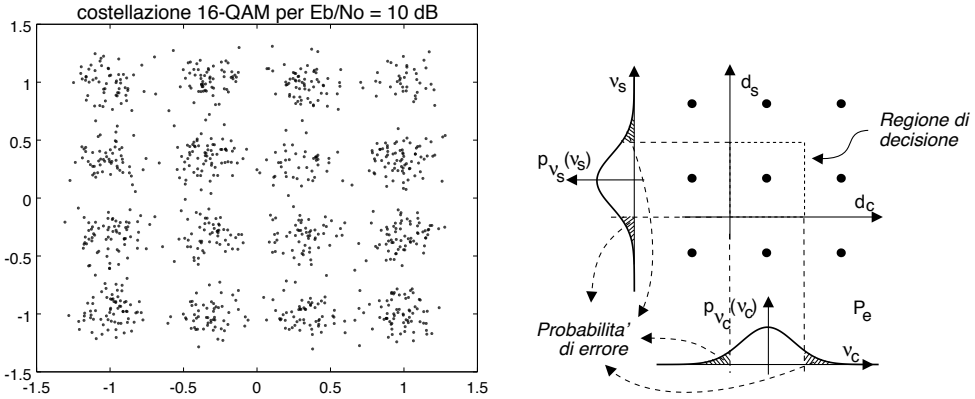


Figura 16.12: Costellazione 16-QAM in presenza di rumore (a sn), calcolo della P_e sui rami (a ds)

un 16-QAM realizzato a partire da un segnale dati con $\gamma = 0.5$, e si può notare che in corrispondenza di ogni periodo di simbolo entrambe assumono uno tra i valori $-1, -0.33, 0.33, 1$. Nella parte inferiore è riportato il corrispondente segnale modulato, che come si vede non è affatto ad ampiezza costante.

16.3.1 Prestazioni di QAM

Nella parte sinistra di fig. 16.12 è mostrata la costellazione per un 16-QAM in presenza di rumore ($E_b/N_0 = 10$ dB). La *distanza* tra due punti di costellazione è maggiore (a parità di L) del caso PSK, e pertanto c'è da aspettarsi un miglioramento delle prestazioni (a parità di E_b/N_0), in quanto l'area che individua la probabilità di errore è ridotta.

Il segnale QAM viene demodulato secondo lo schema di fig. 16.13, che ci permette di constatare come su ciascuno dei due rami in fase e quadratura transita un segnale ASK multilivello con $L' = \sqrt{L}$, e dunque possiamo adottare²⁵ l'espressione (16.6) (relativa ad un impulso $g(t)$ a banda minima) per definire la probabilità di errore su ciascuno dei due rami, pari a

$$P_\alpha = P_e^c(\text{simbolo}) = P_e^s(\text{simbolo}) = \left(1 - \frac{1}{L'}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{\log_2 L'}{(L')^2 - 1}} \right\}$$

Ricordando ora che $L' = \sqrt{L} = (L)^{1/2}$, e dunque $\log_2 L' = \frac{1}{2} \log_2 L$, si ottiene

²⁵Per applicare la (16.6) dobbiamo verificare se il valore di E_b/N_0 è lo stesso nei due casi (vedi nota 18). Mentre per N_0 non vi sono dubbi, notiamo (vedi § 12.4.5 per il caso di c.a. di b.f. incorrelate) che la potenza ricevuta \mathcal{P}_x si dimezza su entrambi i rami, così come la f_b , e pertanto si ottiene $E'_b = \frac{\mathcal{P}_x/2}{f_b/2} = \frac{\mathcal{P}_x}{f_b} = E_b$.

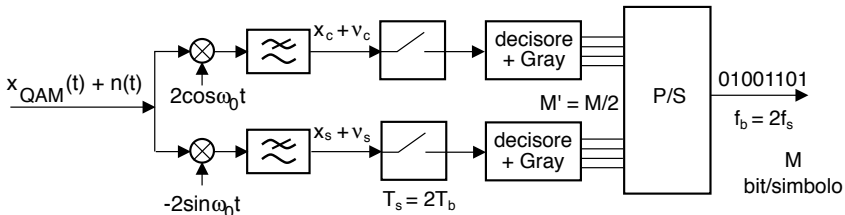


Figura 16.13: Demodulatore QAM

$$P_\alpha = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{\frac{3 E_b \log_2 L}{2 N_0 L - 1}}\right\} \quad (16.13)$$

La probabilità di errore (a simbolo) complessiva, cioè la probabilità che il segnale ricevuto $\underline{d} = \underline{x} + \underline{v}$ cada fuori della regione di decisione relativa all' \underline{x} trasmesso (vedi parte destra di fig. 16.12), risulta $P_e(\text{simbolo}) \simeq P_\alpha + P_\alpha = 2P_\alpha$, assumendo trascurabile la probabilità di sbagliare entrambe x_c ed x_s . Questa stessa ipotesi, assieme all'utilizzo di un codice di Gray per codificare i gruppi di bit associati ai livelli dei due rami, consente di esprimere la probabilità di errore per bit come

$$P_e^{\text{QAM}}(\text{bit}) = \frac{P_e(\text{simbolo})}{\log_2 L} = \frac{2}{\log_2 L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc}\left\{\sqrt{\frac{3 E_b \log_2 L}{2 N_0 L - 1}}\right\} \quad (16.14)$$

In figura 16.14 troviamo le curve dei valori di $P_e(\text{bit})$, per diversi valori di L , al variare di $\frac{E_b}{N_0}$ espresso in dB; il confronto con le curve relative al PSK permette di valutare l'entità del miglioramento di prestazioni. Come è evidente, la modulazione QAM offre prestazioni sensibilmente superiori rispetto alla PSK.

Esercizio Consideriamo un sistema di modulazione numerica PSK con 16 fasi, per il quale si riceva una potenza di segnale $\mathcal{P}_x = 10^{-3} \text{ (Volt)}^2$, in presenza di una densità di potenza di rumore $\mathcal{P}_N(f) = 2 \cdot 10^{-11} \text{ (Volt)}^2/\text{Hz}$. Si desideri ricevere un flusso numerico a velocità $f_b = 1 \text{ Mbit/sec}$ e si considerino impulsi a coseno rialzato con $\gamma = 0$.

- 1) Quale è la P_e per bit al ricevitore? E la banda occupata?
- 2) Quale nuovo valore di P_e si ottiene usando invece una modulazione QAM con lo stesso numero di punti di costellazione?
- 3) Nel caso 16-QAM, qualora si desideri ancora la P_e ottenuta al punto 1), quanta potenza è sufficiente ricevere?
- 4) Nel caso QAM con la P_e del punto 1), qualora si desideri dimezzare la banda occupata, che potenza è necessario ricevere?
- 5) Nel caso 16-QAM con la P_e del punto 1) e $\mathcal{P}_x = 10^{-3} \text{ (Volt)}^2$, quale nuova f_b è possibile raggiungere?

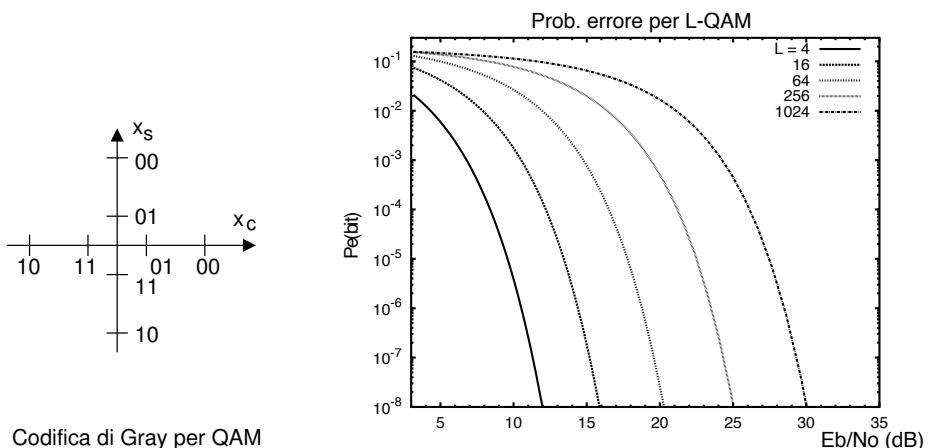


Figura 16.14: Prestazioni L-QAM con codice di Gray

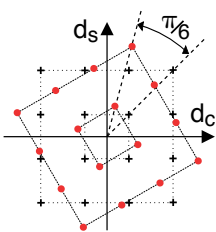
Soluzione

1. Osserviamo che $E_b = \mathcal{P}_x \cdot T_b = \frac{\mathcal{P}_x}{f_b} = \frac{10^{-3}}{10^6} = 10^{-9} \text{ (Volt)}^2/\text{Hz}$, mentre $N_0 = 2\mathcal{P}_N(f) = 4 \cdot 10^{-11} \text{ (Volt)}^2/\text{Hz}$, pertanto $\frac{E_b}{N_0} = 25$ e $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 10 \log_{10} 25 \approx 14 \text{ dB}$.
 - (a) Dalle curve delle prestazioni per il PSK si trova che con $E_b/N_0 = 14 \text{ dB}$, si ottiene $P_e = 10^{-3}$ qualora si utilizzino 16 livelli.
 - (b) La banda occupata risulta $B = \frac{f_b}{\log_2 L} = \frac{10^6}{4} = 250 \text{ KHz}$.
2. Le curve delle prestazioni per il QAM mostrano che con $E_b/N_0 = 14 \text{ dB}$ e 16 livelli, si ottiene $P_e \approx 3 \cdot 10^{-6}$.
3. le stesse curve mostrano che, con il 16-QAM, la $P_e = 10^{-3}$ si ottiene con $E_b/N_0 = 10.5 \text{ dB}$, ovvero $14 - 10.5 = 3.5 \text{ dB}$ in meno, che corrispondono ad una potenza $\mathcal{P}'_x = \frac{\mathcal{P}_x}{10^{0.35}} = \frac{10^{-3}}{2.24} = 4.47 \cdot 10^{-5} \text{ (Volt)}^2$.
4. Dimezzare la banda equivale a utilizzare $M = 8 \text{ bit/simbolo}$, ovvero raddoppiare $\log_2 L$, e dunque un numero di livelli $L = 2^M = 256 = (L')^2$. Le curve delle prestazioni per il 256-QAM mostrano che per ottenere $P_e = 10^{-3}$ occorre $E_b/N_0 \approx 18.3 \text{ dB}$, pari ad un aumento di $18.3 - 14 = 4.3 \text{ dB}$, che equivale ad una potenza $\mathcal{P}'_x = 10^{0.43} \mathcal{P}_x \approx 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ (Volt)}^2$.
5. Ci ritroviamo nelle stesse condizioni del punto 3), con un eccesso di 3.5 dB nel valore di E_b/N_0 , che può essere *speso* riducendo di egual misura T_b , e quindi aumentando f_b .
 Risulta: $T'_b = \frac{T_b}{10^{0.35}}$ e quindi $f'_b = \frac{1}{T'_b} = \frac{10^{0.35}}{T_b} = 10^{0.35} \cdot f_b = 10^{6.35} \approx 2.24 \text{ Mb/sec}$.

E se $\gamma \neq 0$? La trattazione del caso di banda base (pag. 460), mostra che l'argomento sotto radice della $\text{erfc}\{\}$ subisce un peggioramento di $(1 + \gamma) \left(1 - \frac{\gamma}{4}\right)$, che (per esempio) con $\gamma = 0.5$ fornisce 1.31, che deve essere compensato da una uguale diminuzione di E_b/N_0 . Nel caso 5), ad esempio, la f_b risulterà quindi limitata a $f''_b = f'_b/1.31 = 1.71 \text{ Mb/sec}$.

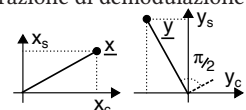
16.4 Codifica differenziale

Se la portante con cui si effettua la demodulazione presenta un errore di fase²⁶, il piano dell'involuppo complesso subisce una rotazione, producendo decisioni sistematicamente errate a causa dello spostamento dei punti di costellazione



ottenuti campionando le c.a. di b.f. (pallini rossi) rispetto a quelli che si otterrebbero nel caso di demodulazione *coerente* (crocette nere). Per rimediare al problema, si può estendere il principio della codifica *differenziale* (espresso a pag. 444 per segnali di banda base) al caso delle modulazioni numeriche, rendendo la decisione su quale punto di costellazione sia stato ricevuto indipendente dalla

²⁶Il cui effetto su $x_c(t)$ è stato discusso al § 12.2.3.1. Facciamo ricadere in questa casistica l'ambiguità di fase dei sistemi di recupero portante come descritto al § 12.2.2.1, ma anche la distorsione di fase introdotta dal canale non selettivo in frequenza, vedi § 13.1.2.4. Che un errore di fase si traduca in una rotazione dell'involuppo complesso può essere mostrato considerando che l'operazione di demodulazione omodina corrisponde a valutare $\mathcal{R}\{\underline{x}e^{j\omega_0 t}\}$, mentre una portante $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ corrisponde a $\mathcal{R}\{\underline{x}e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi}\}$, equivalente alla demodulazione coerente di $\underline{y} = \underline{x}e^{j\varphi}$ ossia un involuppo complesso *ruotato*. In figura, un caso per cui $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



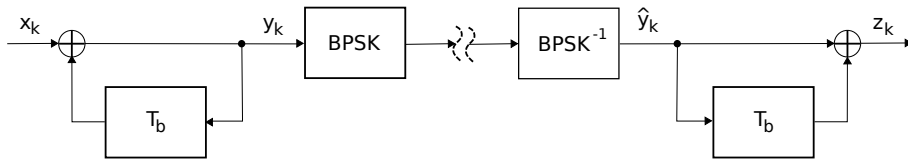


Figura 16.15: Codifica e detezione differenziali

fase della portante di demodulazione, ma dipendente invece dalla fase dell'involuppo complesso osservata *per il simbolo precedente*. Ciò si realizza modificando il criterio con cui sono determinati i punti di costellazione da trasmettere, scegliendoli ora in funzione di una coppia di simboli consecutivi, anziché di uno solo.

16.4.1 Modulazione DBPSK

Per illustrare la tecnica, procediamo con un esempio relativo al caso di trasmissione BPSK della sequenza $x_k = 001011011010010$ e mostriamo come la codifica differenziale consenta di neutralizzare un errore di fase di π . La fig. 16.15, simile²⁷ a quella a pag. 264, mostra la sequenza delle operazioni necessarie, e che consistono nel trasformare il messaggio binario x_k in quello y_k in base alla relazione

$$y_k = x_k \oplus y_{k-1} \quad (16.15)$$

(in cui l'operatore \oplus rappresenta un *or esclusivo*), e quindi effettuare la modulazione BPSK di y_k anziché di x_k . Dal lato ricevente, il segnale BPSK viene demodolato ottenendo la sequenza \hat{y}_k , che viene a sua volta trasformata in z_k in base all'espressione

$$z_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1} \quad (16.16)$$

che, in assenza di errori (ossia se $\hat{y}_k = y_k$ per tutti i k), permette di ottenere nuovamente i valori del messaggio originario²⁸ x_k a partire dalla sequenza z_k , come la figura del riquadro precedente consente di verificare tramite un esempio.

Se assumiamo ora di rappresentare lo zero con una fase nulla, e l'uno con una fase di π , possiamo riscrivere la (16.1) come

$$x_{BPSK}(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad \text{con} \quad \varphi(t) = \pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \text{rect}_{T_b}(t - kT_b) \quad (16.17)$$

e ponendo per semplicità il periodo di bit pari ad un ciclo di portante, possiamo confrontare in fig. 16.16 la forma d'onda BPSK associata alla sequenza originaria x_k , con quella ottenibile utilizzando nella (16.17) y_k anziché x_k ed indicata come DBPSK, in cui la D sta appunto per *differenziale*. Pertanto quando il demodulatore BPSK di fig. 16.15 riceve il segnale DBPSK, in assenza di errori si produce in uscita la sequenza y_k , e quindi il circuito mostrato realizza l'operazione $z_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1}$, permettendo

²⁷La similitudine non è per nulla casuale, dato che qualora il predittore mostrato a pag. 264 sia realizzato mediante un elemento di ritardo, i due schemi di elaborazione coincidono.

²⁸A parte per il primo bit, che ha il solo scopo di stabilire il riferimento di fase per la decodifica del successivo. Da un punto di vista formale, sostituendo la (16.15) nella (16.16) e in assenza di errori (ossia $\hat{y}_k = y_k$) si ottiene $\hat{z}_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1} = x_k \oplus y_{k-1} \oplus y_{k-1} = x_k$.

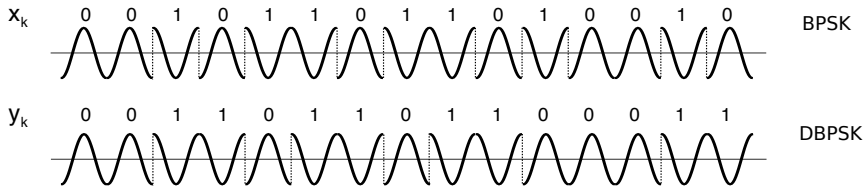


Figura 16.16: Segnale BPSK e BPSK differenziale

di ottenere la sequenza originaria. Verifichiamo ora che il segnale di partenza viene recuperato anche se la portante di demodulazione presenta un errore di fase di π , tale da causare l'inversione della forma d'onda e quindi di tutti i bit decodificati, producendo un messaggio $\hat{y}_k = \bar{y}_k = 110010010011100$ (la soprilineatura rappresenta l'inversione logica). Infatti, applicando la (16.16) alla sequenza $\hat{y}_k = \bar{y}_k$ si ottiene di nuovo la sequenza originaria, dato che $a \oplus b = \bar{a} \oplus \bar{b}$.

D'altra parte lo schema di fig. 16.15 non è l'unico possibile, osservando che la sequenza x_k può anche essere derivata *direttamente* dall'esame visivo della forma d'onda DBPSK, in quanto i bit della sequenza y_k *cambiano* nel caso in cui il corrispondente bit di x_k è un uno, mentre *non cambiano* se è uno zero, e dunque lo stesso accade per il segno della forma d'onda DBPSK. Il demodulatore può essere dunque sostituito da uno in fase e quadratura, in modo da calcolare la fase a partire dalle c.a. di b.f. come $\varphi = \arctan \frac{d_s}{d_c}$, e quindi determinare la sequenza x_k in base alle *variazioni* di fase, senza dover applicare la (16.16), consentendo di applicare il principio anche in presenza di errori di fase qualsiasi, e non solo pari a π .

Prestazioni DBPSK Esaminiamo ora cosa accade in presenza di errori: supponiamo di ricevere un messaggio $y_k = 000\underline{1}01101100011$, in cui il terzo bit (sottolineato) è errato. Calcolando $z_k = \hat{y}_k \oplus \hat{y}_{k-1}$ questa volta si ottiene $z_k = /00\underline{1}11011010010$ che risulta uguale a x_k tranne che nel terzo e quarto bit. Infatti, dato che z_k dipende dagli indici k e $k - 1$ di y , l'effetto dell'errore non si propaga oltre il bit successivo a quello errato. Dato quindi che ad ogni errore del decisore si ottengono due bit errati anziché uno, a prima vista possiamo dire che a parità di E_b/N_0 , il DBPSK è affetto da un tasso di errore *circa doppio* di quello del BPSK. Una analisi più approfondita (che omettiamo) fornisce l'espressione

$$P_e^{DBPSK}(\text{bit}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_0}} \quad (16.18)$$

che equivale ad un peggioramento di prestazioni di circa 1 dB rispetto al BPSK, ed il cui andamento è riportato a pag. 514.

16.4.2 DQPSK

Il concetto di codifica differenziale può essere facilmente esteso al caso di L-PSK, semplicemente mettendo in corrispondenza le configurazioni di bit previste dal codice di Gray con rotazioni di fase $\Delta\theta$ (tra simboli successivi) contigue, come esemplificato

nella tabella che segue²⁹ per $L = 4$ ⁽³⁰⁾, ovvero nel caso della modulazione DQPSK. L'involuppo complesso di tale segnale assumerà quindi, negli istanti di simbolo, valori la cui fase dipende dalla fase del simbolo precedente, incrementata del $\Delta\theta$ mostrato in tabella, consentendo la corretta ricezione anche in presenza di una portante di demodulazione affetta da errori di fase multipli di $\frac{\pi}{2}$. Anche qui se (a causa del rumore) si verifica un errore di ricezione, questo si propaga anche al simbolo successivo.

$x_{k-1}x_k$	$\Delta\theta$
00	0
01	$\pi/2$
11	π
10	$-\pi/2$

Anche nel caso del QAM si può applicare una forma di codifica differenziale, ma lo schema di corrispondenza tra gruppi di bit e punti della costellazione è più complesso³¹, e non viene qui trattato.

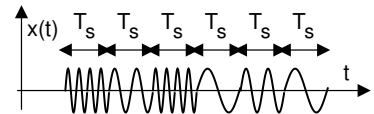
Infine, la modulazione differenziale può essere proficuamente sfruttata nella trasmissione OFDM (§ 16.8.8), al fine di evitare la necessità di equalizzazione.

16.5 Modulazione di frequenza L-FSK

Qualora si desideri che l'ampiezza del segnale modulato si mantenga strettamente costante si può adottare la tecnica di modulazione FSK (*Frequency Shift Keying*), che associa ad ogni simbolo a_k ottenuto raggruppando M bit, uno tra $2^M = L$ possibili valori (o *livelli*) di frequenza f_k , da sommare a quello della portante in accordo all'espressione

$$x_{FSK}(t) = \cos [2\pi (f_0 + m(t)) t] \quad \text{dove} \quad m(t) = \Delta \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s)$$

in cui ogni elemento della sequenza f_k assume uno tra gli L valori $\{0, 1, 2, \dots, L-1\}$. Si tratta in altri termini di una portante la cui frequenza nominale f_0 è alterata di una quantità $\Delta \cdot f_k$ Hz per un intervallo temporale pari al periodo di simbolo T_s , in cui Δ rappresenta ora la spaziatura (uniforme) tra le frequenze associate agli L livelli. Pertanto l'espressione può essere riscritta come



$$x_{FSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos [2\pi (f_0 + \Delta f_k) t] \cdot \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \quad (16.19)$$

Il risultato è senza dubbio ad ampiezza costante; se $T_s \gg \frac{1}{f_0}$ si può adottare uno schema di demodulazione basato su di un VCO ed un PLL (vedi § 12.2.2.2 e 12.3.2.1) riportato (per $L = 2$) in figura 16.17, in cui all'uscita del passa basso ritroviamo il segnale modulante.

Lo schema è effettivamente utilizzato per modem a bassa velocità e basso costo, ed ha il pregio di funzionare anche in presenza di errori tra l' f_0 usata dal VCO del trasmettitore e quella del ricevitore. Per raggiungere velocità f_b più elevate a parità

²⁹Tratta da *Andrea Goldsmith*, *Wireless Communications*, pag. 151.

³⁰Nel caso di $L > 4$ la tabella si modifica molto semplicemente scrivendo accanto al codice di Gray alla L livelli, la sequenza crescente delle fasi differenziali $\Delta\theta_k = k \frac{2\pi}{L-1}$.

³¹Vedi ad es. *K. WESOLOWSKI*, *Introduction to Digital Communication Systems*, Wiley, pag. 328.

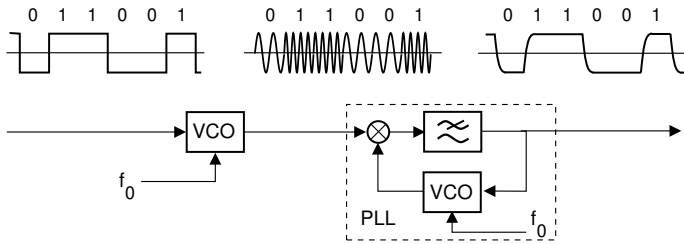


Figura 16.17: Modem fsk a bassa velocità

di L , occorre ridurre T_s , in modo da aumentare $f_s = \frac{1}{T_s}$ e quindi $f_b = f_s M = f_s \log_2 L$. In tal caso può essere necessario ricorrere ad un demodulatore più complesso, come descritto appresso.

16.5.1 Modulazione FSK ortogonale

Nel caso in cui si realizzi la condizione $\Delta = l/2T_s$ con l intero, le diverse frequenze $f_0 + \Delta f_k$ sono *ortogonali*³², e può essere adottato un *demodulatore a correlazione* (vedi § 7.6.2), realizzato mediante un banco di correlatori ed una decisione di massimo (fig. 16.18), in cui l' n -esimo correlatore esegue

$$\int_0^{T_s} \cos [2\pi (f_0 + m\Delta) t] \cos [2\pi (f_0 + n\Delta) t] dt \quad (16.20)$$

dove $f_0 + m\Delta$ rappresenta la frequenza (incognita) in arrivo, mentre $f_0 + n\Delta$ è una delle frequenze possibili, con $n \in \{0, 1, 2, \dots, L - 1\}$. Essendo tali frequenze tra loro

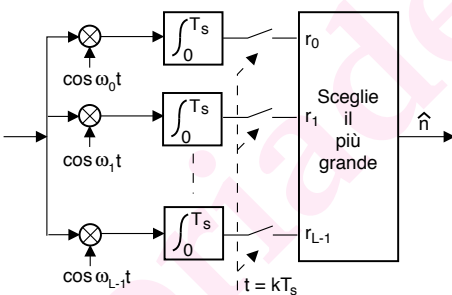


Figura 16.18: Demodulatore fsk a correlazione

ortogonali³³ entro l'intervallo di integrazione, al termine del calcolo una sola delle uscite sarà diversa da zero. Come discusso al § 7.6 in presenza di rumore l'uscita di ogni correlatore diviene una v.a. con varianza $\frac{N_0}{2} \mathcal{E}_G$, *corrompendo* l'ortogonalità tra simboli, e dunque si rende necessaria l'operazione di confronto per realizzare una decisione di *massima verosimiglianza* (§ 6.6.2.1). Indicando infatti con $r_n, n = 0, 1 \dots, L - 1$ la grandezza prodotta

³²La discussione al riguardo è sviluppata al § 16.12.1, definendo anche le condizioni di demodulazione *incoerente* e *coerente*, ovvero se le portanti generate in ricezione $\cos [2\pi (f_0 + \Delta f_k) t + \phi_k]$ presentino o meno una fase ϕ_k casuale rispetto a quella trasmessa. In particolare, la spaziatura Δ multipla di $\frac{1}{2T_s}$ garantisce ortogonalità solo nel caso di modulazione *coerente*, mentre nel caso *incoerente* occorre una spaziatura *doppia*, ossia Δ multiplo di $\frac{1}{T_s}$.

³³La condizione di ortogonalità tra le forme d'onda associate ai diversi simboli corrisponde alla intercorrelazione nulla tra le forme d'onda in un periodo (§ 7.1.4), ed infatti scegliendo opportunamente Δ ed f_0 (vedi § 16.12.1) l'integrale (16.20) vale $\mathcal{R}_{nm} = \begin{cases} .5 \cdot T_s & \text{se } n = m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Ciò si dimostra (ricordando che $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$), notando che per $m = n$ l'uscita del correlatore vale $\frac{1}{2} \int_0^{T_s} (1 + \cos (4\pi (f_0 + m\Delta) t)) dt$, e scegliendo opportunamente f_0 e Δ (vedi § 16.12.1), il coseno che viene integrato descrive un numero intero di periodi all'interno dell'intervallo $(0, T_s)$, fornendo quindi un contributo nullo. Se invece $n \neq m$ la funzione integranda non contiene il termine costante, ma di nuovo in virtù di § 16.12.1, contiene solo termini a media nulla.

dal campionatore n -esimo, e con $\mathbf{r} = [r_0, r_1, \dots, r_{L-1}]$ il vettore aleatorio L -dimensionale corrispondente, la scelta del maggiore tra gli r_n corrisponde a scegliere l'ipotesi $f_{\hat{n}}$ che rende massima la $p(\mathbf{r}/f_{\hat{n}})$ ³⁴.

Occupazione di banda In generale, se ogni diversa f_k è equiprobabile l'FSK ha una densità spettrale del tipo³⁵ mostrato alla figura 16.19. Se $L \gg 1$, l'occupazione di banda complessiva risulta quindi (circa) uguale a $L \cdot \Delta$. Nel caso di *modulazione coerente* (vedi nota 32) la minima spaziatura è di $\Delta = \frac{1}{2T_s} = \frac{f_s}{2}$, e dunque nel caso di L elevato la minima banda occupata può essere approssimata come

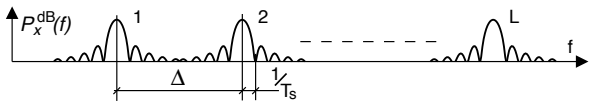


Figura 16.19: Densità spettrale per FSK lento

$$B_{FSK}^{coerente} \simeq L \cdot \frac{f_s}{2} = \frac{f_b}{2} \cdot \frac{L}{\log_2 L} \quad (16.21)$$

mentre per quanto riguarda l'efficienza spettrale si ottiene

$$\rho_{FSK} = \frac{f_b}{B} = f_b \cdot \frac{2}{f_b} \cdot \frac{\log_2 L}{L} = \frac{2}{L} \log_2 L$$

ossia $\frac{1}{2}$ volte peggiore dell'L-ASK (pag. 494). Ma: se l'efficienza spettrale è così bassa, che vantaggi ci sono ad usare l'FSK? ... a sua difesa, portiamo i seguenti argomenti:

Il caso semplice con $T_s \gg \frac{1}{f_0}$ può essere demodolato con lo schema a PLL rappresentato in fig. 16.17, di facile realizzazione ed economico: ad esempio, veniva usato per salvare su *compact cassette* audio i dati degli *home computer* degli anni '70³⁶

Nel caso a due livelli l'efficienza spettrale è quasi $\rho_{BFSK} = \frac{2}{L} \log_2 L \Big|_{L=2} = 1$, come per il caso del BPSK³⁷. Al contrario, al crescere di L l'efficienza spettrale diviene sempre peggiore.

³⁴Infatti il vettore \mathbf{r} ha una d.d.p. condizionata $p(\mathbf{r}/f_n)$ gaussiana multidimensionale a componenti indipendenti, e dunque (vedi § 6.5.1) si fattorizza nel prodotto di L gaussiane monodimensionali con uguale varianza e media nulla, tranne per la componente $n = m$ relativa all'ipotesi realmente occorsa, che presenta una media non nulla. Pertanto per ogni possibile ipotesi f_n la $p(\mathbf{r}/f_n)$ è concentrata sulla n -esima componente, e dunque decidere per $\hat{n} = \arg \max_n \{r_n\}$ equivale a scegliere $\hat{n} = \arg \max_n \{p(\mathbf{r}/f_n)\}$.

³⁵Difatti la (16.19) può essere riscritta come la somma di L segnali $x_k(t)$, uno per ogni possibile valore di f_k , costituiti da un codice di linea RZ che modula la corrispondente $f_0 + \Delta f_k$, a cui corrisponde dunque un tono intermittente. Essendo i simboli indipendenti e (in virtù della portante) a media nulla, la (7.46) di pag. 227 si riduce alla nota forma $\mathcal{P}_{X_k}(f) = \frac{\sigma_A^2}{T_s} |G_k(f)|^2$ in cui $G_k(f) = \mathcal{F}\{g_k(t)\}$ e $g_k(t) = \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_k)t] \text{rect}_{T_s}(t)$; applicando ora il risultato di fig. 3.5 a pag. 77 si ottiene la densità di potenza mostrata in fig. 16.19.

³⁶tipo: Sinclair Spectrum, Commodore Vic20 e 64 ... Come noto, le cassette audio soffrono di variazioni di velocità di trascinamento del nastro (*wow & flutter*), ma il PLL non ne risente.

³⁷Tranne che, essendo ora presenti solo 2 frequenze, l'approssimazione (16.21) non è più corretta. In particolare, con riferimento alla fig. 16.19, è tanto meno corretta quanto più f_s è elevata, che corrisponde ad oscillazioni del *sinc*² più estese in frequenza.

La probabilità di errore Si può dimostrare che l'uso dello schema di fig. 16.18 e di portanti di demodulazione ortogonali e coerenti³⁸ permette di ottenere una

$$P_e^{FSK}(\text{simbolo}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \left(\int_{-\infty}^{z + \sqrt{\log_2 L \cdot E_b/N_0}} e^{-y^2} dy \right)^{L-1} dz \quad (16.22)$$

che deve essere valutata per via numerica, e che può essere resa *piccola a piacere*, nei limiti previsti dalla teoria dell'informazione³⁹, semplicemente aumentando L ⁴⁰ (e dunque T_s). La figura a lato mostra i valori della (16.22) in funzione di E_b/N_0 per diversi valori di L , e illustra come all'aumentare di quest'ultimo sia necessaria sempre minor potenza per ottenere la stessa P_e , a patto che risulti

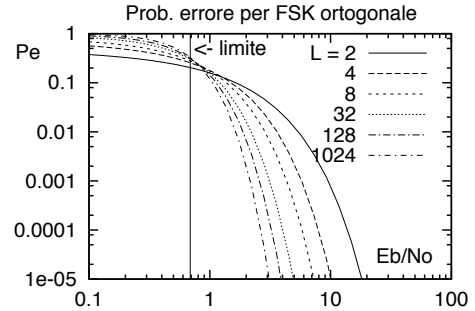
$$E_b/N_0 > \ln 2 = 0,69$$

che rappresenta il valore noto come *limite di Shannon-Hartley*, ricavato a pag. 561.

Il miglioramento di P_e con L è una manifestazione del *compromesso banda-potenza*: osserviamo infatti che anche la banda occupata $B_{FSK} \simeq \frac{f_b}{2} \frac{L}{\log_2 L}$ aumenta (a parità di f_b) all'aumentare di L , e dunque a parità di E_b/N_0 l'FSK riesce ad ottenere P_e arbitrariamente piccole, a spese di una occupazione di banda sempre maggiore. L'aumento di L però non può essere illimitato, sia per le limitazioni di banda del canale, che a causa della complessità del ricevitore, a cui si aggiunge il ritardo temporale necessario ad accumulare gli $M = \log_2 L$ bit che realizzano un simbolo con un enorme numero L di livelli.

Discussione sull'ottimalità per $L \rightarrow \infty$ Osserviamo innanzitutto che il ricevitore a correlazione commette errore quando il rumore sovrapposto al segnale di ingresso è casualmente "simile" ad una delle cosinusoidi utilizzate per la trasmissione. In tal caso, l'uscita dell'integratore relativo alla frequenza "simile" può superare quella relativa alla frequenza trasmessa, e corrotta dal medesimo rumore. All'aumentare di L (per f_b fisso) aumenta il periodo di simbolo $T_s = \frac{\log_2 L}{f_b}$ e quindi diventa sempre più "difficile" per il rumore emulare "bene" una delle frequenze di segnalazione, e quindi si riduce la probabilità di errore. La nota 14 a pag. 560 propone una interpretazione analitica di questo fenomeno.

Chiaramente, all'aumentare di L aumenta proporzionalmente la complessità del ricevitore, che deve disporre di un numero di correlatori crescente. Pertanto, le



³⁸Ovvero qualora siano soddisfatte le condizioni per f_0 e Δ valutate al § 16.12.1 per il caso di demodulazione coerente, e si verifichi la *sincronizzazione* tra le forme d'onda in ingresso ai correlatori del banco.

³⁹Ovvero tenendo conto che (vedi § 17.2) f_b non può superare la capacità di canale (eq. (17.18)), che a sua volta non può superare il limite C_∞ espresso dalla (17.20).

⁴⁰Vedi la discussione seguente per una motivazione informale di questo comportamento.

prestazioni ideali per L che tende ad infinito rivestono solamente un interesse teorico.

16.6 Demodulazione incoerente

Nel caso in cui la portante di demodulazione non abbia la stessa fase di quella ricevuta, ci si trova nelle condizioni espresse al § 12.2.3.1, ossia il piano dell'involuppo complesso risulta ruotato, rendendo impraticabili le tecniche di modulazione di fase, a meno di non adottare tecniche differenziali (§ 16.4).

In realtà è ancora praticabile la tecnica OOK (*on off keying*), ovvero una modulazione PAM della portante con un impulso NRZ polare, oltre a quella dell'FSK *incoerente*. Per entrambe si tratta di rivelare la presenza/assenza di una sinusoidale nel rumore, per la durata di un bit T_b o di un simbolo T_s , e si ricorre allo schema di demodulazione discusso al § 12.2.4 e riportato a fianco, in cui la portante di demodulazione è una di quelle dell'FSK, oppure l'unica nel caso di OOK, ed il generico passa basso è realizzato come un integratore, ovvero con risposta

impulsiva⁴¹ $h(t) = \frac{1}{T_s} \text{rect}_{T_s}(t)$, ovvero ancora come un *filtro adattato* all'impulso di trasmissione $g(t) = \text{rect}_{T_s}(t)$ ⁴², in modo da scrivere il segnale ricevuto come

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \text{rect}_{T_s}(t - kT_s) \cos(\omega_0 t + \theta)$$

in cui $a_k = A$ se la frequenza f_0 è attiva durante il simbolo k , oppure $a_k = 0$ nel caso opposto. Il rumore $n(t)$ in ingresso, con densità di potenza $\frac{N_0}{2}$, rende le grandezze di osservazione r_c e r_s due v.a., che nel caso di segnale presente hanno valor medio⁴³ $m_c = A \cos \theta$ e $m_s = A \sin \theta$, oppure zero per segnale assente, mentre in entrambi i casi e per entrambi i rami la varianza risulta pari a⁴⁴ $\sigma^2 = N_0/T_s$.

La decisione se sia presente o meno la frequenza è basata sul *modulo* dell'involuppo complesso $\underline{r} = r_c + jr_s$, ovvero $\rho = \sqrt{r_c^2 + r_s^2}$, ed attuata mediante l'approccio di massima verosimiglianza esposto al § 14.4.2. Nelle ipotesi poste, il caso in cui $a_k = 0$ corrisponde

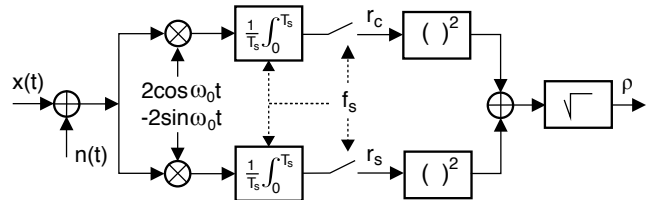


Figura 16.20: Demodulatore incoerente di involuppo

⁴¹ Ad esempio realizzato mediante un *integrate and dump* (pag. 215), che deve essere *resettato* a fine T_s .

⁴² Il fattore $1/T_s$ che compare nell'espressione di $h(t)$ rende l'energia dell'impulso complessivo $g(t) * h(t) = \text{tri}_{2T_s}(t)$ (vedi eq. (3.26)) *normalizzata* rispetto a T_s (vedi § 3.8.8).

⁴³ Infatti il segnale demodulato (as es.) sul ramo in fase ha ampiezza costante $A \frac{1}{T_s} \cos \theta$, che risulta moltiplicata per T_s quando integrato su tale periodo.

⁴⁴ Infatti il filtro adattato ha una $|G(f)|^2 = \text{sinc}^2(T_s f)$, e dunque il rumore alla sua uscita (vedi § 14.1.3 e pag. 206) presenta una densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = N_0 \text{sinc}^2(T_s f)$. La potenza di rumore perciò risulta pari a $P_n = \sigma^2 = \frac{N_0}{T_s}$, in quanto $n(t)$ è a media nulla, e $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(T_s f) df = \frac{1}{T_s}$. Quest'ultimo risultato può essere verificato considerando che $\text{sinc}^2(T_s f)$ ha antitrasformata $\frac{1}{T_s} \text{tri}_{2T_s}(t)$, e che per la proprietà del valore iniziale (pag. 66) $\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(T_s f) df = \frac{1}{T_s} \text{tri}_{2T_s}(t=0) = \frac{1}{T_s}$.

ad osservare una v.a. di Rayleigh (pag. 423) con d.d.p.

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}$$

mentre se $a_k = A$ si osserva⁴⁵ una v.a. di Rice, con d.d.p.

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2+A^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right)$$

ed in questa circostanza si è trovato (eq. 14.20) che se le due ipotesi di segnale presente (H_1) ed assente (H_0) sono equiprobabili e la soglia di decisione è posta pari a $A/2$, la probabilità di errore può essere approssimata come $P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{A^2}{8\sigma^2}}$.

Nel caso dell'OOK osserviamo che $A^2/2$ è la potenza di una sinusoida di ampiezza A , ma se questa per metà del tempo (gli $a_k = 0$) è spenta la potenza si dimezza, e così risulta $E_b = P_s T_b = \frac{A^2}{4} T_b$; sostituendo dunque $\frac{A^2}{4} = E_b/T_b$ e $\sigma^2 = N_0/T_b$ nell'espressione della P_e otteniamo

$$P_e^{OOK}(bit) = P_e^{2-FSK}(bit) = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{2N_0}} \tag{16.23}$$

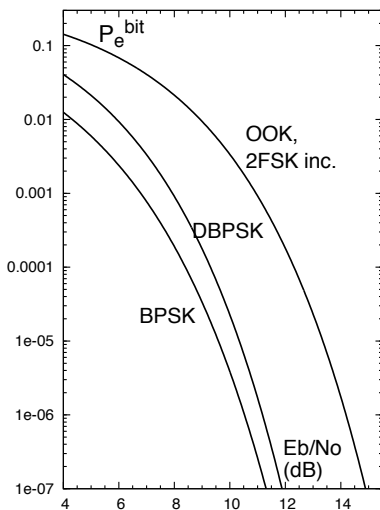


Figura 16.21: Confronto di prestazioni per demodulazione binaria coerente, differenziale, e incoerente

La stessa espressione descrive anche le prestazioni per una modulazione FSK a due livelli: in tal caso infatti la decisione avviene confrontando due v.a. ρ_1, ρ_2 con distribuzione una di Rice e l'altra di Rayleigh, ottenute duplicando lo schema di fig. 16.20 per le due frequenze (ortogonali) utilizzate, associate ad uno stesso bit uno o zero, e dunque il problema statistico è identico al precedente. La figura 16.21 permette il confronto delle prestazioni tra le tecniche di modulazione binarie presentate.

Nel caso poi di una modulazione L-FSK incoerente, la decisione avviene scegliendo tra L v.a. ρ_i di cui una distribuita Rice e tutte le altre Rayleigh; lo sviluppo analitico è un po' più complesso, e fornisce un risultato che seppur peggiore del caso coerente, lo approssima abbastanza bene per L ed E_b/N_0 elevati.

16.7 Schema riassuntivo delle prestazioni

La tabella 16.1 mette a confronto le prestazioni ottenibili con le tecniche di modulazione fin qui discusse, per un segnale dati a banda minima, e con simboli costituiti da

⁴⁵La discussione a pag. 424 fa riferimento ad una sola v.a. (quella in fase) a media A , mentre nel caso attuale sia ha $\rho = A$ ma con una fase qualsiasi. Per le proprietà di simmetria radiale del problema, la conclusione è valida anche nel nostro caso.

Metodo	bit/simbolo	P_e (bit) con codifica di Gray ed impulso a banda minima	Banda RF	ρ [bit/sec/Hz]
BPSK	1	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$	$f_b (1 + \gamma)$	$\frac{1}{(1+\gamma)}$
QPSK	2	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right\}$	$\frac{f_b}{2} (1 + \gamma)$	$\frac{2}{(1+\gamma)}$
OOK, 2-FSK	1	$\frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{2N_0} \right)$ (incoerente, impulso RZ)	$\sim 2f_b$	$\sim \frac{1}{2}$
L-ASK	M	$\frac{1}{M} \left(1 - \frac{1}{L} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{3 \frac{E_b}{N_0} \frac{M}{L^2-1}} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-PSK	M	$\frac{1}{M} \operatorname{erfc} \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{L} \right) \sqrt{\frac{E_b}{N_0} M} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-QAM	M	$\frac{2}{M} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{E_b}{N_0} \frac{M}{L-1}} \right\}$	$f_b \frac{(1+\gamma)}{M}$	$\frac{M}{(1+\gamma)}$
L-FSK incoerente	M	vedi pag. 514	$f_b \frac{L}{M}$	$\frac{M}{L}$
L-FSK coerente	M	eq (16.22) a pag. 512	$f_b \frac{L}{2M}$	$\frac{M}{2L}$

Tabella 16.1: Confronto tra metodi di modulazione numerica a portante singola

$M = \log_2 L$ bit. Se $\gamma \neq 0$, si deve aggiungere un termine $(1 + \gamma) \left(1 - \frac{\gamma}{4} \right)$ al denominatore sotto radice, procedendo come indicato al § 15.4.9.

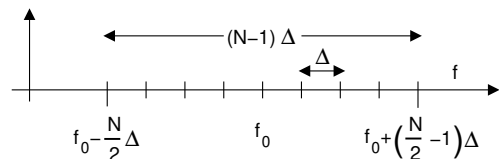
16.8 Modulazione OFDM

La sigla sta per ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEX, ossia *multiplazione a divisione di frequenza ortogonale*. Si tratta della tecnica di modulazione numerica *multiportante* adottata per le trasmissioni ADSL⁴⁶, DVB-T, WiFi e per telefonia mobile; si contraddistingue per la particolarità di utilizzare in modo *ottimo* la banda del canale, e di ricondurre l'operazione di equalizzazione ad un prodotto tra vettori.

16.8.1 Rappresentazione nel tempo ed in frequenza

La modulazione OFDM suddivide una sequenza binaria su N diversi flussi, trasmessi a divisione di frequenza mediante forme d'onda ortogonali. Concettualmente possiamo pensare l'OFDM come una evoluzione⁴⁷ della modulazione FSK, in cui le diverse frequenze sono spaziate tra loro di Δ Hz come descritto dall'espressione

$$f_n = f_0 + \Delta \cdot \left(n - \frac{N}{2} \right) \quad (16.24)$$



⁴⁶ADSL = Asymmetric Digital Subscriber Line, vedi § 24.9.4.

⁴⁷La trasmissione numerica contemporanea su più portanti è a volte indicata con il nome di *Multi Carrier Modulation* (MCM) o *Discrete Multi Tone* (DMT). La modulazione FSK utilizza invece una portante alla volta, in quanto la sua definizione prevede la presenza di un solo oscillatore.

con $n = 0, 1, \dots, N - 1$ e sono utilizzate contemporaneamente, mentre su ognuna di esse si realizza una modulazione numerica a due o più livelli (es. QPSK o QAM) con impulso NRZ rettangolare di durata T .

Indicando con $\underline{a}_n^k = a_{n_c}^k + ja_{n_s}^k$ le coordinate nel piano dell'involuppo complesso di un generico punto della costellazione realizzata per la portante f_n all'istante $t = kT$, il segnale OFDM può essere scritto come

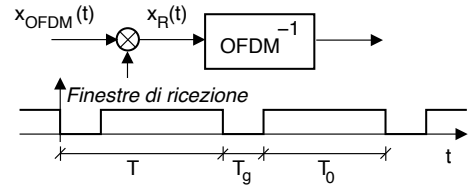
$$x_{OFDM}(t) = \sum_k \text{rect}_T(t - kT) \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_{n_c}^k \cos \omega_n(t - kT) - a_{n_s}^k \sin \omega_n(t - kT) \right) \quad (16.25)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * \left(\text{rect}_T(t) \sum_{n=0}^{N-1} \left(a_{n_c}^k \cos \omega_n t - a_{n_s}^k \sin \omega_n t \right) \right) \quad (16.26)$$

in cui la prima sommatoria (su k) identifica gli istanti di simbolo, e la seconda (su n) le diverse portanti. Tale segnale presenta⁴⁸ un involuppo complesso rispetto a f_0 pari a

$$\underline{x}_{OFDM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) * \left(\text{rect}_T(t) \sum_{n=0}^{N-1} \underline{a}_n^k e^{j2\pi[\Delta(n - \frac{N}{2})]t} \right) \quad (16.27)$$

L'espressione (16.26) non vincola la durata T di un simbolo ad un valore particolare; deve però risultare $T \geq T_0 = 1/\Delta$, in quanto il ricevitore opera sul segnale $x_R(t)$ ottenuto per moltiplicazione con una finestra temporale di estensione $T_0 = 1/\Delta$, allo scopo di rendere ortogonali tra loro⁴⁹ le frequenze $f_n = f_0 + \Delta \cdot (n - N/2)$, e mettere il ricevitore in grado di calcolare i valori \underline{a}_n^k per tutti gli n presenti all'istante $t = kT$, mediante un ricevitore concettualmente simile a quello a correlazione presentato a pag. 510.



L'intervallo T_0 è detto *periodo principale* del simbolo OFDM, mentre la differenza $T_g = T - T_0$ è indicata come *tempo di guardia*, od anche *preambolo*, ed il segnale ricevuto durante T_g non è usato in ricezione. Il motivo di tale "spreco"⁵⁰ risiede nel fatto che, in presenza di un canale che introduce distorsione lineare, la parte iniziale di ogni

⁴⁸Osserviamo innanzitutto che per un segnale

$$x(t) = \cos \omega_1 t = \frac{1}{2} \left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t} \right)$$

risulta $x^+(t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_1 t}$, e quindi il suo involuppo complesso $\underline{x}(t)$ calcolato rispetto ad f_0 vale

$$\underline{x}(t) = 2x^+(t) e^{-j\omega_0 t} = 2 \frac{1}{2} e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega_0 t} = e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}$$

Allo stesso modo si ottiene che per $y(t) = \sin \omega_1 t$ risulta $\underline{y}(t) = \frac{1}{j} e^{j(\omega_1 - \omega_0)t}$. Pertanto, considerando che $\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$, ad ogni termine $z_k(t) = a_{n_c}^k \cos \omega_n t - a_{n_s}^k \sin \omega_n t$ corrisponde un

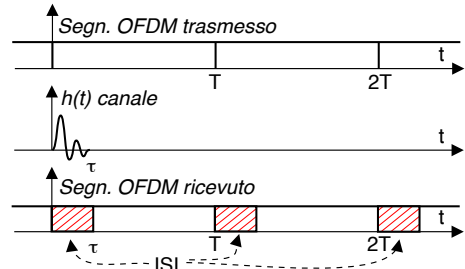
$$\underline{z}(t) = a_{n_c}^k e^{j(\omega_n - \omega_0)t} + ja_{n_s}^k e^{j(\omega_n - \omega_0)t} = \underline{a}_n^k e^{j2\pi(f_n - f_0)t}$$

Applicando ora la (16.24) si ottiene $f_n - f_0 = \Delta \cdot \left(n - \frac{N}{2} \right)$ e quindi la (16.27).

⁴⁹Come mostrato per il caso *incoerente* discusso al § 16.12.1

⁵⁰Infatti la frequenza di simbolo $f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 + T_g}$ risulta ridotta rispetto al caso in cui T_g sia nullo.

simbolo risulta corrotta (vedi figura a lato) da una interferenza intersimbolica (ISI) dovuta al risultato della convoluzione tra la coda del simbolo precedente e l' $h(t)$ del canale. Consideriamo ora *un solo simbolo* (fissiamo $k = 0$ e consideriamo l'origine dei tempi ritardata di T_g) ricevuto nell'intervallo $T_0 = \frac{1}{\Delta} \leq T$, con inviluppo complesso



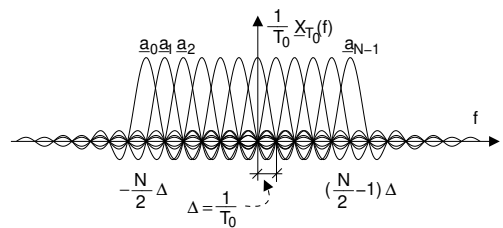
$$\underline{x}_{T_0}(t) = \text{rect}_{T_0}(t) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi[\Delta(n-\frac{N}{2})]t} \tag{16.28}$$

e calcoliamone la trasformata per determinare l'occupazione di banda:

$$\underline{X}_{T_0}(f) = T_0 \text{sinc}(fT_0) * \sum_{n=0}^{N-1} a_n \delta\left(f - \Delta\left(n - \frac{N}{2}\right)\right) = \tag{16.29}$$

$$= T_0 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \text{sinc}\left(\left(f - \Delta\left(n - \frac{N}{2}\right)\right)T_0\right) \tag{16.30}$$

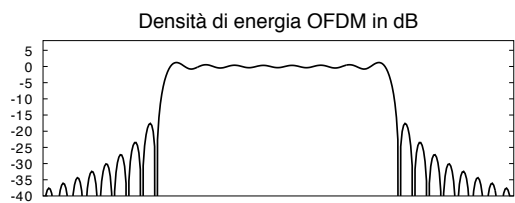
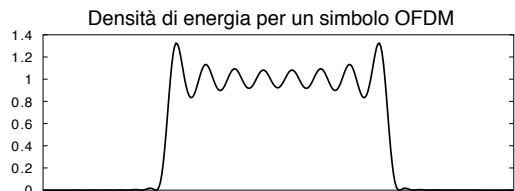
Otteniamo pertanto la costruzione grafica mostrata alla figura a lato, che evidenzia come ogni funzione *sinc* sia moltiplicata per uno dei coefficienti a_n , che potrebbero quindi essere ri-ottenuti in ricezione campionando (in modo complesso) $\underline{X}(f)$ su frequenze spaziate di Δ .



Per quanto riguarda la densità di potenza $\mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f)$ dell'inviluppo complesso $\underline{x}_R(t)$ ricevuto e finestrato, consideriamo l'espressione (vedi § 7.3.1)

$$\mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f) = \frac{1}{T} E \left\{ \left| \underline{X}_{T_0}(f) \right|^2 \right\} \tag{16.31}$$

in cui $\left| \underline{X}_{T_0}(f) \right|^2$ è la densità di energia di un simbolo OFDM (eq. (16.30)): la figura a lato ne mostra l'andamento (in scala lineare ed in dB) per un simbolo a 32 portanti, di cui 16 (esterne) *spente* (vedi appresso), mentre per le 16 centrali si è posto $a_n = 1$. Notiamo come si ottenga una densità spettrale di potenza *quasi rettangolare* pur utilizzando simboli a durata finita.



Potenza complessiva Mostriamo ora come mettere in relazione la potenza ricevuta complessiva \mathcal{P}_{x_R} di $x_R(t)$ e del suo inviluppo complesso $\mathcal{P}_{\underline{x}_R}$

$$\mathcal{P}_{x_R} = \int \mathcal{P}_{\underline{x}_R}(f) df \tag{16.32}$$

con la dinamica dei valori a_n utilizzati per modulare le singole portanti: nel seguito ci riferiamo a costellazioni L-QAM, indicando con M_n ed $L_n = 2^{M_n}$ rispettivamente il numero di bit e di punti di costellazione per la portante n-esima, ad ognuna delle quali la (16.26) attribuisce una potenza \mathcal{P}_n .

Per calcolare la (16.32) mediante la (16.31) utilizzando l'espressione di $\underline{X}_{T_0}(f)$ fornita dalla (16.30), osserviamo che le funzioni $\text{sinc}(fT_0)$ che vi compaiono sono *ortogonali* se spaziate per un multiplo di $\Delta = \frac{1}{T_0}$, ovvero (vedi § 4.1.2) sussiste la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}((f - n\Delta)T_0) \text{sinc}((f - m\Delta)T_0) df = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{1}{T_0} & \text{se } n = m \end{cases}$$

Pertanto, introducendo una insignificante⁵¹ traslazione di f pari a $\frac{N}{2}\Delta$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\underline{x}_R} &= \frac{1}{T} \int E \left\{ |\underline{X}_{T_0}(f)|^2 \right\} df = \\ &= \frac{1}{T} \int T_0^2 \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E \{ a_n a_m^* \} \text{sinc}((f - \Delta n)T_0) \text{sinc}((f - \Delta m)T_0) df = \\ &= \frac{T_0^2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} E \{ a_n^2 \} \int \text{sinc}^2((f - \Delta n)T_0) df = \frac{T_0^2}{T} \sum_{n=0}^{N-1} E \{ a_n^2 \} \frac{1}{T_0} = \frac{T_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_{a_n}^2 \end{aligned}$$

in quanto i termini *incrociati* prodotti dalla doppia sommatoria si annullano⁵².

Scegliendo il lato della costellazione QAM in modo opportuno⁵³, si può ottenere $\sigma_{a_n}^2 = E \{ a_n^2 \} = 2\mathcal{P}_n$, in cui \mathcal{P}_n è la potenza per la n-esima portante QAM; considerando infine (vedi eq. (11.22) a pag. 349) che

$$\mathcal{P}_{x_R} = \mathcal{P}_{x_R}^+ + \mathcal{P}_{x_R}^- = \frac{2}{4} \mathcal{P}_{\underline{x}_R} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{\underline{x}_R}$$

possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_{x_R} = \frac{1}{2} \frac{T_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} 2\mathcal{P}_n = \frac{T_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{P}_n$$

in cui è evidenziata la perdita di potenza legata alla presenza del preambolo.

16.8.2 Architettura di modulazione

Una caratteristica fondamentale della modulazione OFDM è quella di essere realizzata senza *oscillatori e integratori*, ma attraverso l'uso della elaborazione numerica. Con riferimento alla figura 16.22, il flusso binario a frequenza f_b viene *parallelizzato* per formare simboli ad $L = 2^M$ livelli a frequenza $f_s = f_b/M = f_b/\log_2 L$. Questi M bit/simbolo

⁵¹Equivalente a definire l'involuppo complesso con riferimento ad una portante a frequenza pari alla prima delle f_n .

⁵²Vedi nota 22 a pag. 47

⁵³Al § 15.8.1 si è mostrato che se gli a_n sono v.a. indipendenti e distribuite uniformemente su L' livelli tra $\pm A$, si ottiene $\sigma_a^2 = \frac{A^2}{3} \frac{L'+1}{L'-1}$. Nel caso di una costellazione QAM quadrata ad L livelli si ha $L' = \sqrt{L}$, e se le realizzazioni sui rami in fase e quadratura sono indipendenti risulta $\sigma_{a_n}^2 = E \left\{ (a_{nc} + ja_{ns})^2 \right\} = 2\sigma_a^2 = \frac{2A^2}{3} \frac{\sqrt{L}+1}{\sqrt{L}-1}$; volendo eguagliare tale valore a $2\mathcal{P}_n$, occorre quindi scegliere $A = \sqrt{3\mathcal{P}_n \frac{\sqrt{L}-1}{\sqrt{L}+1}}$.

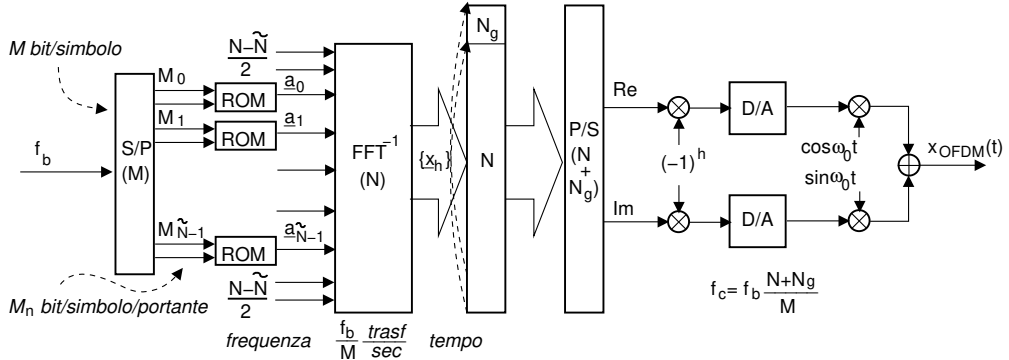
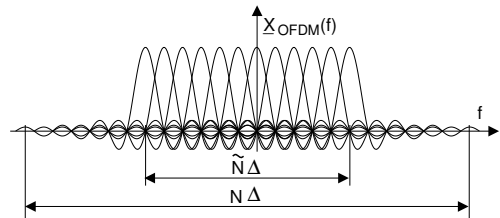


Figura 16.22: Architettura di un modulatore OFDM numerico

sono suddivisi in \tilde{N} gruppi di M_n ($n = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$) bit ciascuno, con $M = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} M_n$, e ad ogni gruppo di M_n bit corrisponde un punto di costellazione a_n , scelto tra $L_n = 2^{M_n}$ punti possibili.

La sequenza $\{a_n\}$ viene poi arricchita con $N - \tilde{N}$ valori nulli (metà all'inizio e metà alla fine) ottenendo una nuova sequenza $\{a_n\}$ di N valori, in modo che la sommatoria in (16.30) dia luogo ad un involuppo complesso praticamente limitato in banda (vedi figura) tra (circa) $\pm \frac{N}{2} \cdot \Delta$ Hz, che può essere pertanto rappresentato dai suoi campioni x_{T_0} (hT_c) presi a frequenza $f_c = N \cdot \Delta \frac{\text{campioni}}{\text{secondo}}$. Il blocco indicato come FFT^{-1} ha esattamente il ruolo di valutare i campioni temporali di x_{T_0} , calcolando⁵⁴



⁵⁴La (16.33) è in qualche modo simile alla formula di ricostruzione (2.7) (vedi pag. 39) per il segnale (complesso) periodico limitato in banda $\pm \frac{N}{2} F$

$$x(t) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} X_m e^{j2\pi m F t}$$

che calcolata per $t = hT_c = \frac{h}{NF}$ fornisce $x(hT_c) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} X_m e^{j2\pi \frac{m}{N} h}$. Ponendo ora $n = m + \frac{N}{2}$ e $Y_n = X_{n-\frac{N}{2}}$ otteniamo

$$x(hT_c) = \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{j2\pi \frac{n-N/2}{N} h} = e^{-j\pi h} \sum_{n=0}^{N-1} Y_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h}$$

dato che $(n - \frac{N}{2}) \frac{1}{N} = \frac{n}{N} - \frac{1}{2}$. Osservando ora che dalla (16.28) con $T_c = \frac{1}{N\Delta}$ si ha

$$x(hT_c) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \Delta (n-\frac{N}{2}) \frac{h}{N\Delta}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \Delta \frac{n-N/2}{N} h} = e^{j\pi h} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h}$$

e che $e^{-j\pi h} = (-1)^h$, si ottiene la (16.33). La coppia di relazioni

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} x_h e^{-j2\pi \frac{h}{N} n} \quad \text{e} \quad x_h = \sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h}$$

sono chiamate *Discrete Fourier Transform* (DFT) diretta e inversa, in quanto costituiscono la versione discreta della trasformata di Fourier (vedi § 4.5), e consentono il calcolo di una serie di campioni in frequenza a partire da campioni nel tempo e viceversa.

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j2\pi \frac{n}{N} h} = \frac{1}{(-1)^h} \underline{x}_{T_0}(hT_c) \quad (16.33)$$

Il risultato della FFT^{-1} è quindi una sequenza di valori complessi $\{\underline{x}_h\}$, che a meno di un segno alterno rappresentano i campioni dell'involuppo complesso $\underline{x}_{T_0}(t)$ espresso dalla (16.28) relativamente ad un simbolo. Dopodiché, il preambolo da trasmettere durante il tempo di guardia T_g è ottenuto *aggiungendo* in testa a $\{\underline{x}_h\}$ un gruppo di campioni prelevati dalla coda⁵⁵.

Infine, le parti reale ed immaginaria di $\{\underline{x}_h\}$ sono inviate ad una coppia di convertitori D/A operanti a $f_c = \frac{N+N_g}{T} = \frac{N}{T_0} = N\Delta$ in modo da ottenere le c.a. di b.f., utilizzate per produrre il segnale $x_{\text{OFDM}}(t)$ mediante una coppia di modulatori in fase e quadratura.

16.8.3 Efficienza dell'OFDM

Come vedremo al § 16.8.9, questa è una tra le tecniche di modulazione che meglio approssima i risultati della teoria dell'informazione, tanto più quanto maggiore è la sua efficienza. Quest'ultima si ottiene considerando che solo \tilde{N} portanti su N trasportano informazione, e che solo $f_c \cdot T_0$ campioni su $f_c \cdot T$ sono unici; combinando queste quantità si ottiene

$$\rho = \frac{\tilde{N} T_0}{N T} = \frac{\tilde{N} T - T_g}{N T} = \frac{\tilde{N}}{N} \left(1 - \frac{T_g}{T}\right)$$

che misura la frazione di segnale utile rispetto all'occupazione di banda ed al numero di campioni/simbolo presenti in $x_{\text{OFDM}}(t)$. La ridondanza introdotta (le portanti vuote ed il preambolo) ha gli stessi scopi di quella introdotta dal roll-off γ di un impulso a coseno rialzato, in quanto evita che si verifichino fenomeni di interferenza tra simboli, e realizza un segnale limitato in banda. Osserviamo che l'efficienza migliora all'aumentare di T e di N , dato che T_g ed $N - \tilde{N}$ sono fissi.

Esercizio Un flusso binario a velocità $f_b = 1$ Mbps è trasmesso mediante modulazione OFDM con portante 1 GHz, caratterizzata da: $\tilde{N} = 464$ portanti attive su $N = 512$ totali, $M_n = 2$ bit a portante, con modulazione QPSK, e $T_g = 28 \mu\text{sec}$ di tempo di guardia.

Calcolare: 1) il numero di bit/simbolo M ed il corrispondente periodo di simbolo T e 2) la spaziatura tra portanti $\Delta = 1/T_0$ e la corrispondente occupazione di banda.

1. $M = M_n \cdot \tilde{N} = 2 \cdot 464 = 928$ bit/simbolo, e
 $T = 1/f_b \cdot M = 10^{-6} \cdot 928 = 928 \mu\text{sec}$;
2. $T_0 = T - T_g = 928 - 28 = 0.9$ msec, dunque $\Delta = 1/T_0 \approx 1.11$ KHz, e
 $B = N \cdot \Delta = 512 \cdot 1.11 \cdot 10^3 \approx 568$ KHz.

16.8.4 Architettura di demodulazione

Per ottenere gli elementi della sequenza $\{\underline{a}_n\}$ e quindi il gruppo di M bit che hanno originato il simbolo si adotta l'architettura mostrata in figura 16.23, che svolge una

⁵⁵In effetti la (16.33) fornisce un risultato periodico rispetto ad h , con periodo N , ossia con periodo $N \cdot T_c = N \frac{1}{f_c} = N \frac{1}{N\Delta} = \frac{1}{\Delta} = T_0$ per la variabile temporale. Per questo motivo il *preambolo* dell'OFDM è detto anche *estensione ciclica*.

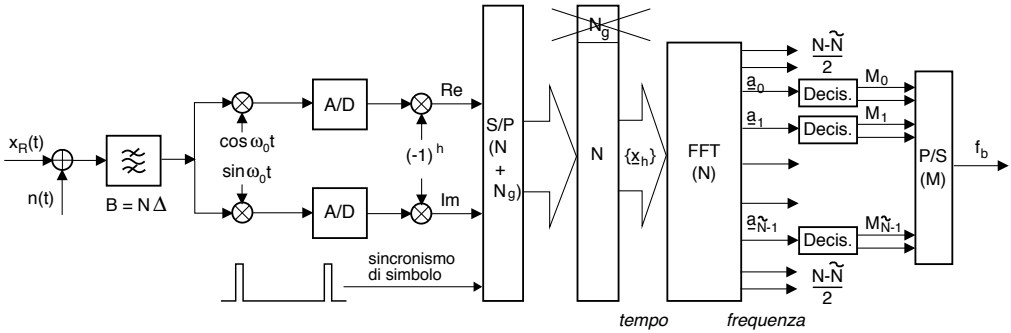


Figura 16.23: Architettura di un demodulatore OFDM numerico

azione del tutto inversa a quella del modulatore. Innanzitutto il ricevitore deve acquisire il sincronismo di frequenza (vedi § 16.8.11), in modo che il segnale ricevuto possa essere demodulato in fase e quadratura, e le C.A. di B.F. campionate a frequenza $f_c = \frac{N+N_g}{T}$. Dopo l'inversione di segno ad indici alterni, e dopo avere acquisito il sincronismo di simbolo, $f_c \cdot T$ campioni complessi sono *bufferizzati*, quindi gli N_g campioni del preambolo rimossi, e sugli N valori del periodo principale viene calcolata una FFT (vedi nota 54), ottenendo i valori

$$\frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \tilde{x}_h e^{-j2\pi \frac{h}{N} n} = \underline{X}_{T_0} \left(\left(n - \frac{N}{2} \right) \Delta \right) = \underline{a}_n \quad (16.34)$$

Solo gli \tilde{N} valori centrali sono avviati verso altrettanti decisori, che determinano il punto di costellazione più vicino all' \underline{a}_n ricevuto per ogni portante, associandovi il relativo codice di M_n bit, ed il risultato finale è quindi serializzato per produrre gli M bit che hanno dato origine al simbolo.

16.8.5 Prestazioni

Al § 16.12.2 viene svolta una laboriosa analisi per arrivare a valutare l'espressione della P_e^{bit} in caso di tempo di guardia $T_g = 0$ ed in presenza di rumore additivo gaussiano limitato alla stessa banda del segnale; il risultato è confrontato con quello ottenibile per una trasmissione QAM che occupi la medesima banda dell'OFDM, trasporti lo stesso flusso f_b , utilizzi ovviamente una sola portante con un adeguato numero di livelli, e adotti un impulso a coseno rialzato che determini la stessa (in)efficienza spettrale legata nell'OFDM alla presenza delle \tilde{N} portanti spente. Il risultato è che le prestazioni sono *identiche*.

E allora dov'è la convenienza? E' il tema delle prossime sottosezioni!

16.8.6 Sensibilità alla temporizzazione

Con l'OFDM *non siamo* nelle condizioni di demodulazione coerente come per l'FSK (§ 16.5.1), e le portanti del simbolo OFDM ricevuto mantengono ortogonalità (§ 16.12.1) purché finestrate su di un periodo $T_0 = \frac{1}{\Delta}$. Pertanto nel caso in cui il ricevitore non acquisisca una perfetta sincronizzazione di simbolo, se l'ISI introdotta dal canale ha

una durata minore di T_g , la FFT di demodulazione può operare su di un gruppo di campioni presi a partire dalla coda del preambolo, riducendo così la sensibilità rispetto agli errori di sincronizzazione.

16.8.7 Equalizzazione

Consideriamo il caso in cui la trasmissione attraverso un canale la cui $h(t)$ è descritta da un involuppo complesso $\underline{H}(f)$ in cui il modulo non è costante e/o la fase non è lineare: in tal caso $\underline{X}_{T_0}(f)$ di (16.30) si altera a causa del filtraggio, ed i suoi campioni \underline{a}_n restituiti dalla (16.34) si modificano in

$$\tilde{\underline{a}}_n = \underline{a}_n \cdot \underline{H}_n$$

dove $\underline{H}_n = H_n e^{j\varphi_n} = \underline{H}(f - \Delta(n - \frac{N}{2}))$ sono i campioni (complessi) di $\underline{H}(f)$. Come anticipato, l'equalizzazione si riduce a svolgere un semplice prodotto tra la sequenza dei valori ricevuti $\tilde{\underline{a}}_n$ e quella di equalizzazione $\frac{1}{H_n} e^{-j\varphi_n}$ che inverte l'effetto del canale, ovviamente purché si conosca $\underline{H}(f)$, od una sua stima.

16.8.8 Codifica differenziale

Nel caso in cui l'entità della distorsione lineare introdotta dal canale non sia *eccessiva* si può evitare del tutto lo stadio di equalizzazione e ricorrere ad una *codifica differenziale* (§ 16.4), che risulta particolarmente semplice qualora le sottoportanti siano modulate PSK o QPSK. In tal caso infatti il processo di demodulazione per ogni sottoportante non risente di variazioni di guadagno, ovvero variazioni di $H_n = |\underline{H}_n|$, e dunque devono essere compensate le sole variazioni di fase φ_n tra una portante e l'altra, ognuna delle quali determina la corrispondente rotazione (vedi nota a pag. 17) del piano dell'involuppo complesso su cui sono riferiti gli \underline{a}_n , rispetto alla disposizione degli assi per la portante $n - 1$.

Acquisendo dunque un primo riferimento di fase da una *portante pilota* (§ 16.8.11) sempre accesa senza trasportare informazione, si può prendere quello per demodulare la portante successiva, acquisire da questa un nuovo riferimento di fase, e iterare il procedimento per tutte le portanti. Questo procedimento si attua applicando la teoria del § 16.4 alla sequenza simbolica di valori complessi \underline{a}_n da trasmettere, sostituendo nelle (16.15) e (16.16) l'OR esclusivo con una operazione di prodotto, ed aggiungendo una operazione di coniugato, come mostrato in fig. 16.24, in cui R rappresenta un ritardo unitario.

Dal lato della trasmissione le portanti sono quindi modulate a partire dalla sequenza

$$\underline{d}_n = \underline{a}_n \cdot \underline{d}_{n-1}$$

con $n = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$, avendo posto $\underline{d}_0 = 1$. In assenza di rumore e di distorsione lineare la sequenza \underline{d}_n è ricevuta inalterata, ed è così disponibile in uscita dal demodulatore

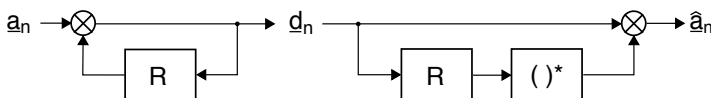


Figura 16.24: Codifica differenziale per simboli complessi, R rappresenta un ritardo

OFDM; da essa si ottiene quindi

$$\hat{a}_n = \underline{d}_n \cdot \underline{d}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot \underline{d}_{n-1} \cdot \underline{d}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot |\underline{d}_{n-1}|^2 \quad (16.35)$$

che presenta la stessa fase di \underline{a}_n .

In presenza di distorsione lineare al posto di \underline{d}_n si riceve invece $\tilde{\underline{d}}_n = \underline{d}_n \cdot \underline{H}_n$ in cui $\underline{H}_n = H_n e^{j\varphi_n}$ sono i campioni della risposta in frequenza del canale, e dunque la (16.35) fornisce

$$\hat{a}_n = \tilde{\underline{d}}_n \cdot \tilde{\underline{d}}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot \underline{d}_{n-1} \cdot \underline{H}_n \cdot \underline{d}_{n-1}^* \cdot \underline{H}_{n-1}^* = \underline{a}_n \cdot |\underline{d}_{n-1}|^2 \cdot \Delta H_n \cdot e^{j\Delta\varphi_n}$$

in cui $\Delta H_n = |\underline{H}_n \underline{H}_{n-1}^*|$ (ma il modulo non ci interessa), e $\Delta\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ è la differenza tra i valori della risposta di fase del canale valutata per due portanti contigue, e rappresenta l'entità di cui è ruotato il piano dell'involuppo per i simboli trasportati dalle due portanti. Pertanto, se questa è di lieve entità (essendo le portanti vicine), produce un errore trascurabile.

Accenniamo brevemente all'ulteriore possibilità di applicazione del principio differenziale, oltre che portante per portante, anche ad interi simboli OFDM consecutivi: in questo caso il vettore di simboli \underline{a}_n^k da trasmettere all'istante k viene combinato con i valori del vettore trasmesso al simbolo precedente $k - 1$, ovvero $\underline{d}_n^k = \underline{a}_n^k \cdot \underline{d}_n^{k-1}$. In questo modo possono essere contrastati i fenomeni tempo-varianti che modificano il canale, per una stessa portante n , simbolo dopo simbolo.

16.8.9 Distribuzione ottima di potenza

Si riferisce alla possibilità dell'OFDM di assegnare valori di potenza differenti alle diverse portanti, che consente di sfruttare *al massimo* la capacità trasmissiva dal canale, anche in presenza di attenuazione selettiva e/o rumore colorato.

La trasmissione numerica con una f_b elevata, eseguita utilizzando un tecnica ad *una sola* portante, deve necessariamente occupare una banda molto ampia, rendendo scarsamente applicabile la semplificazione di cui al § 13.1.2.4; in tal caso $H(f)$ presenta distorsione di ampiezza, la cui equalizzazione (§ 18.4) causa una *colorazione* del rumore in ingresso al demodulatore, ed un peggioramento delle prestazioni. Un problema analogo nasce nel caso in cui il rumore non sia bianco, ad esempio perché derivante da un segnale interferente.

In entrambi i casi per tenere conto dell'andamento incostante di $\mathcal{P}_N(f)$ il calcolo della *capacità di canale*⁵⁶ $C = W \log_2(1 + \mathcal{P}_R/WN_0)$, valido in presenza di un rumore bianco $\mathcal{P}_N(f) = N_0/2$ e con una potenza ricevuta \mathcal{P}_R in una banda (positiva) W , si modifica come segue. Se consideriamo il canale scomposto in *infinite sottobande* entro le quali le densità di potenza di segnale e di rumore possono ritenersi costanti, l'espressione della capacità diviene

$$C = \sup_{\mathcal{P}_R(f)} \int_{f \in I_f} \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{P}_R(f)}{\mathcal{P}_N(f)} \right) df \quad (16.36)$$

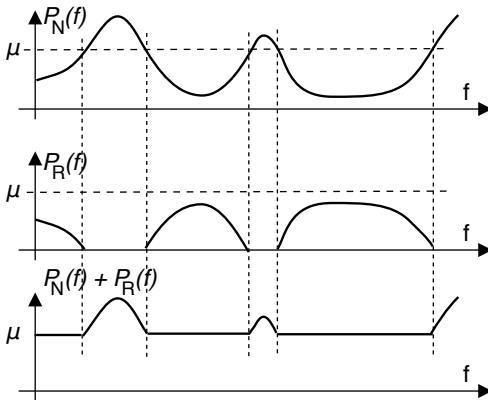
⁵⁶Come discusso ai § 17.2 e 17.3 la teoria di Shannon asserisce che $f_b = C$ è la massima velocità di trasmissione per cui si può (teoricamente) conseguire una probabilità di errore nulla, e che il canale consegue capacità C massima a seguito di una scelta appropriata su come trasmettere il messaggio.

in cui I_f rappresenta l'insieme delle frequenze in cui è presente il segnale, ovvero $I_f = \{f : \mathcal{P}_R(f) > 0\}$. La (16.36) significa che se $\mathcal{P}_N(f)$ in ingresso al canale non è pari ad una costante, la massima capacità trasmissiva C (e dunque velocità f_b) può essere raggiunta *sagomando in modo opportuno* la densità di potenza $\mathcal{P}_R(f)$ del segnale ricevuto. Nell'OFDM ciò equivale a distribuire la potenza totale \mathcal{P}_R in modo non uniforme tra le portanti, a patto che la $\mathcal{P}_R(f)$ che rende massima (16.36) rispetti i vincoli

$$\int_{f \in I_f} \mathcal{P}_R(f) df = \mathcal{P}_R \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_R(f) \geq 0 \quad (16.37)$$

Questo problema di *ottimo vincolato* ammette la soluzione (vedi § 16.12.3)

$$\mathcal{P}_R(f) + \mathcal{P}_N(f) = \begin{cases} \mu & \text{se } \mathcal{P}_N(f) < \mu \\ \mathcal{P}_N(f) & \text{se } \mathcal{P}_N(f) \geq \mu \end{cases} \quad (16.38)$$



detta anche *riempimento d'acqua* (WATER-FILLING) perché (vedi figura) determina una maggiore potenza di segnale nelle regioni di frequenza dove il rumore è minore, un po' come se \mathcal{P}_R fosse un volume d'acqua *versata sopra* $\mathcal{P}_N(f)$. La costante μ viene determinata in modo da ottenere $\int \mathcal{P}_R(f) df = \mathcal{P}_R$.

In un sistema di modulazione numerica a singola portante $\mathcal{P}_R(f)$ non può essere modificato a piacere, in quanto il suo andamento è vincolato dal particola-

re formatore di impulsi $G(f)$ scelto per ottenere una ricezione priva di ISI. Nel caso dell'OFDM invece la potenza assegnata a ciascuna portante può essere variata liberamente, e se la $\mathcal{P}_R(f)$ che realizza le condizioni (16.38) viene resa nota al modulatore, è possibile avvicinarsi alla velocità massima permessa dalla (16.36).

Bit loading In particolare si ottiene che la massima velocità f_b è conseguibile attribuendo a tutte le portanti la medesima probabilità di errore, e quindi in definitiva determinando dei valori $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_n$ per ogni portante $n = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$ tali da rendere le $P_{e/n} = P_e$. Questo risultato può essere ottenuto scegliendo le potenze \mathcal{P}_n in accordo alla (16.38), e quindi trasmettere (o *caricare*) più bit M_n sulle portanti n per le quali \mathcal{P}_n è maggiore.

16.8.10 Modulazione codificata

Abbiamo appena mostrato come, conoscendo la $\mathcal{P}_N(f)$ e la $H(f)$ del canale, sia possibile equalizzare $\mathcal{P}_x(f) = \frac{\mathcal{P}_R(f)}{|H(f)|^2}$ e al contempo soddisfare (16.38) e rendere massima la f_b . Ma nel caso di collegamenti tempo-varianti la $H(f)$ non è nota, ed anche se lo fosse non esiste garanzia che rimanga costante. In tal caso non ha senso determinare una distribuzione ottima della potenza e dei bit sulle portanti, mentre invece occorre

aggiungere della ridondanza al segnale trasmesso mediante un codice di canale, allo scopo di correggere i bit errati.

Osserviamo ora che nel caso di una modulazione a portante singola la presenza di una $H(f)$ tempo-variante rende il processo di equalizzazione particolarmente complesso, dato che deve *inseguire* le variazioni di $H(f)$. Se l'equalizzazione non è perfetta insorge ISI, e la trasmissione può divenire rapidamente così piena di errori da renderne impossibile la correzione anche adottando codici di canale.

Nel caso dell'OFDM, al contrario, l'andamento di $H(f)$ determina un peggioramento di prestazioni solamente per quelle portanti per le quali $|H(f)|$ si è ridotto⁵⁷. Pertanto l'applicazione di un codice di canale (§ 17.4) al blocco di M bit che costituisce un simbolo, seguito da una operazione di scrambling (§ 15.6.2.3), consente al lato ricevente di recuperare l'informazione trasmessa anche nel caso in cui per alcune portanti si determini un elevato tasso di errore.

La trasmissione OFDM in cui è presente una codifica di canale prende il nome di trasmissione COFDM (*Coded OFDM*).

16.8.11 Portanti pilota

Fin qui abbiamo assunto che il ricevitore OFDM mostrato in fig. 16.23 operi in condizioni di sincronismo sia per quanto riguarda la portante di demodulazione, sia per gli intervalli di simbolo. A questo scopo alcune delle sottoportanti - dette *pilota* - non sono usate per trasmettere dati, ma sono mantenute costantemente attive, con potenza di poco superiore alle altre, allo scopo di facilitare la sincronizzazione in frequenza. In figura 16.25 è rappresentato il caso per il DVB-T, in cui ogni riga rappresenta le portanti di un simbolo, e quelle pilota si trovano in posizione fissa; sono inoltre mostrate delle *portanti disperse* (SCATTERED) le cui posizioni evolvono ciclicamente di simbolo in simbolo, e consentono di acquisire un sincronismo sia di simbolo che di trama, oltre che eventualmente permettere una migliore stima della $H(f)$ del canale attraversato.

⁵⁷Si consideri ad esempio il caso in cui $H(f)$ ha origine da un fenomeno di cammini multipli, che determina un andamento di $H(f)$ selettivo in frequenza (§ 20.4.5).

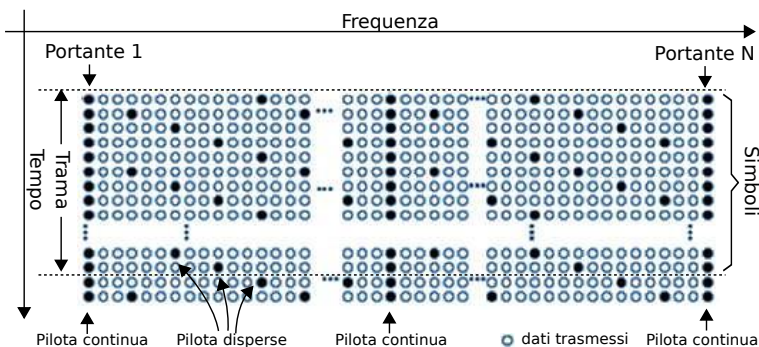
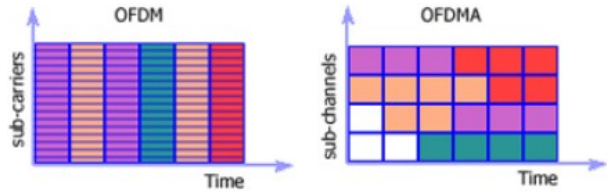


Figura 16.25: Allocazione delle portanti OFDM in un sistema di trasmissione DVB-T

16.8.12 Accesso multiplo OFDMA

Lo sviluppo di protocolli di gestione e coordinamento delle risorse impiegate da più utenti mobili per comunicare con una stessa stazione radio-base (§§ 11.1.1.3, 16.9.2.5) rende possibile assegnare *differenti sottoinsiemi* di portanti ai diversi utenti, permettendo

di ripartire la banda a disposizione in percentuali variabili tra gli stessi. Ogni utente semplicemente *spende* le portanti a lui non intestate prima di eseguire l'IFFT, così come ne scarta il risultato della decodifica. Si determinano così i vantaggi



- rispetto ad un sistema a divisione di tempo (§ 24.2.1, 24.3.1, 22.5.2.1) si ha un minor ritardo in quanto non occorre attendere il proprio time-slot o *contendere* la risorsa in comune, bensì i vari utenti trasmettono *in contemporanea*;
- l'assegnazione delle portanti può variare simbolo per simbolo, permettendo di allocare dinamicamente più banda agli utenti con maggiori esigenze;
- gli utenti con esigenze minori oltre alla banda risparmiano anche in potenza trasmessa;
- la riduzione del numero di portanti attive diminuisce la dinamica del segnale OFDM nel tempo, mitigando le problematiche di non-linearità.

Per far fronte a fenomeni di fading selettivo (§ 20.4.5) la qualità del canale tra stazione base ed ogni utente è monitorata di continuo affinché l'allocazione delle portanti possa essere modificata dinamicamente, e mantenuta una adeguata qualità di servizio per tutti: in questo senso si realizzano gli scopi della radio cognitiva (pag. 539).

La modalità di trasmissione OFDMA è stata adottata nei sistemi WiFi 802.11ax,⁵⁸ WiMAX 802.16e, e di telefonia mobile LTE e 5G.

16.9 Sistemi a spettro espanso

In questa tecnica di modulazione la stessa banda di frequenze è utilizzata contemporaneamente da più trasmissioni differenti, che non interferiscono tra loro grazie all'uso di forme d'onda mutuamente ortogonali; ciò avviene adottando una opportuna *trasformazione* del messaggio da trasmettere, in modo che questo occupi una banda molto maggiore di quella originaria, e sulla manipolazione inversa in ricezione. Il peculiare aumento della banda occupata è indicato con il termine di *spread spectrum*⁵⁹, e la tecnica di trasmissione risultante prende anche il nome di *multiplazione a divisione di codice* o CDM (*code division multiplex*).

Sebbene la doppia operazione di *spreading/despreading* non produca nessun vantaggio effettivo nei riguardi delle prestazioni ottenibili qualora la ricezione sia disturbata

⁵⁸https://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_802.11ax-2021

⁵⁹To spread = spalmare, vedi ad es. lo *spread butter*.

dalla sola presenza di rumore additivo gaussiano, si ottengono invece i seguenti altri benefici:

- altre trasmissioni e/o disturbi a banda stretta che occupano la stessa regione di frequenza occupata dal segnale espanso causano una potenza interferente ridotta;
- la densità spettrale del segnale trasmesso può confondersi con quella del rumore, rendendo la trasmissione stessa poco rilevabile da parte di soggetti ostili;
- per conoscere il contenuto della trasmissione occorre poter riprodurre in ricezione una esatta replica della trasformazione attuata.

16.9.1 Sequenze pseudo-casuali

La trasformazione che produce l'espansione spettrale si basa sull'utilizzo di una sequenza cosiddetta *pseudo-noise* o PN (§ 16.9.3), ovvero le cui caratteristiche statistiche si avvicinano a quelle di un rumore stazionario bianco e cioè a valori incorrelati, tranne che questi non sono casuali ma *deterministici*, in modo che la loro ripetizione ciclica rende la sequenza PN riproducibile dal lato ricevente. La fig. 16.26-a) mostra una parte di un possibile segnale dati $p(t)$ pseudo casuale, bipolare, di durata $L \cdot T_p$, la cui espressione può essere posta nella forma

$$p(t) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k g(t - kT_p - \theta) \tag{16.39}$$

con θ v.a. uniforme tra $\pm T_p/2$, basata sulla ripetizione di impulsi NRZ bipolari $g(t) = \text{rect}_{T_p}(t)$ di durata T_p con polarità stabilita dagli L valori a_k , scelti pari a ± 1 in modo da avvicinarsi alle condizioni⁶⁰

- media nulla e varianza unitaria, cioè $m_A = 0, \sigma_A^2 = 1$;
- una autocorrelazione $\mathcal{R}_a(n)$ la più piccola possibile con $n \neq 0$, mimando così la proprietà di indipendenza statistica.

⁶⁰Data la sequenza deterministica $a_k = \{a_0, a_1, \dots, a_{L-1}\}$ di lunghezza L , media e varianza sono definiti come

$$m_A = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k, \quad \sigma_A^2 = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} (a_k - m_A)^2$$

mentre l'autocorrelazione tra coppie di elementi a distanza n è definita da

$$\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L-n} \sum_{k=0}^{L-n-1} a_k a_{k+n}$$

Considerando invece la sequenza periodica ottenuta ripetendo gli a_k , possiamo definire la stessa grandezza come

$$\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k a_{(k+n) \bmod L}$$

detta anche *autocorrelazione ciclica*.

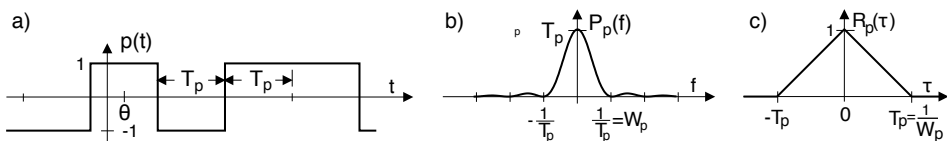


Figura 16.26: a) - sequenza pseudonoise; b) - densità di potenza; c) - autocorrelazione

Al § 7.7.4 abbiamo mostrato che un segnale simile a $p(t)$ ed espresso dalla (16.39), nel caso in cui gli a_k siano v.a. indipendenti a media nulla, presenta uno spettro di densità di potenza⁶¹

$$\mathcal{P}_p(f) = \sigma_A^2 \frac{\mathcal{E}_G(f)}{T_p} = T_p \text{sinc}^2(fT_p) \tag{16.40}$$

rappresentato in fig. 16.26-b), e per il quale la frequenza $W_p = \frac{1}{T_p}$ ne approssima l'occupazione di banda: prendiamo dunque questo risultato come una accettabile approssimazione per $p(t)$. Dalla (16.40) consegue che l'autocorrelazione di $p(t)$ si esprime come⁶²

$$\mathcal{R}_p(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_p(f) \} = \text{tri}_{2T_p}(\tau) \tag{16.41}$$

mostrata in fig. 16.26-c), e che appunto si azzerava per $\tau \geq T_p$. Sebbene le sequenze pseudo-noise utilizzate realmente (§ 16.9.3) non aderiscano esattamente a queste caratteristiche, vi si avvicinano in modo soddisfacente per gli scopi delle telecomunicazioni.

Chip rate L'estensione temporale T_p di un simbolo di $p(t)$ è indicata come *periodo di chip*⁶³, e ci si riferisce ai suoi simboli come *chip*, per distinguerli dai bit; pertanto, la frequenza $f_p = W_p = 1/T_p$ è detta *chip rate*.

16.9.2 Modulazione per sequenza diretta

Ottiene l'espansione spettrale eseguendo il prodotto $\tilde{x}(t) = x(t)pn(t)$ tra un segnale di banda base $x(t)$ e la ripetizione ciclica del segnale PN $pn(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(t - iLT_p)$, con il risultato di effettuare una modulazione AM-BLD-PS; l'operazione nel suo insieme prende il nome di *Direct Sequence Spread Spectrum* (o DSSS).

Sebbene l'effetto di espansione spettrale sia valido per $x(t)$ qualsiasi, affrontiamo l'analisi con riferimento ad un segnale $x(t)$ numerico binario NRZ antipodale ossia polare⁶⁴, il cui periodo di bit $T_b \gg T_p$ ne determina una densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ del tipo di (16.40) ma con banda $W_x \ll W_p$. La fig. 16.27 illustra la situazione, facendo anche notare come scegliendo $T_b = LT_p$ e moltiplicando i bit del messaggio per la sequenza di chip della PN si ottiene di fatto una *sequenza di sequenze* PN, ognuna con segno invertito o meno a seconda del valore dei singoli bit del messaggio, e con una banda che è quella di un segnale dati a frequenza $f_p = W_p \gg f_b$. Osserviamo che il

⁶¹Avendo scelto $g(t) = \text{rect}_{T_p}(t)$, risulta $G(f) = T_p \text{sinc}(fT_p)$ e quindi

$$\mathcal{E}_G = |G(f)|^2 = T_p^2 \text{sinc}^2(fT_p)$$

che diventa la (16.40) dato che $\sigma_A^2 = 1$.

⁶²Applicando il teorema di Wiener si ottiene (vedi tabella a pag. 88)

$$\mathcal{R}_p(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_p(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ T_p \text{sinc}^2(fT_p) \} = \text{tri}_{2T_p}(\tau)$$

⁶³Oltre che indicare un circuito integrato, la parola *chip* è la stessa usata per le patine fritte olandesi, e prima ancora per *scheggia, frammento* o *truciolo*.

⁶⁴

Il *prodotto* tra due segnali dati di tipo *polare* a frequenza f_b e $f_p = Lf_b$, è equivalente a creare il segnale dati partendo dall'*or esclusivo* \oplus delle corrispondenti rappresentazioni binarie fatte da zeri ed uni, come mostrato dalle tabelle poste a lato.

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	b	$a \cdot b$
-1	-1	1
-1	1	-1
1	-1	-1
1	1	1

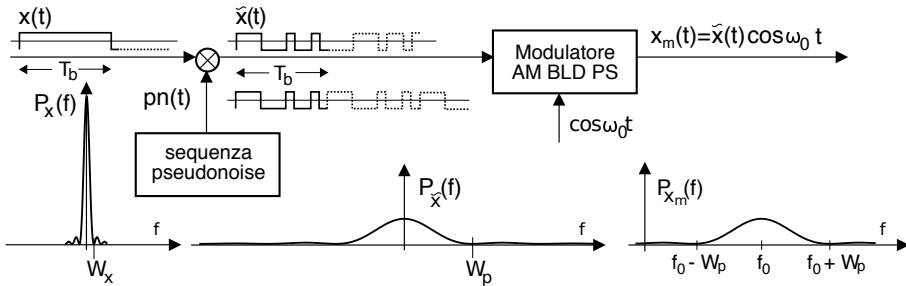


Figura 16.27: Generazione di un segnale modulato DSSS

segnale *allargato* $\tilde{x}(t)$ è così chiamato anche perché la potenza $\mathcal{P}_{\tilde{x}}$ è la stessa⁶⁵ \mathcal{P}_x di $x(t)$, che ora risulta però *spalmata* sulla banda W_p di $pn(t)$.

L'effetto di espansione spettrale può essere verificato anche osservando che la densità di potenza $\mathcal{P}_{\tilde{x}}(f)$ è il risultato della convoluzione in frequenza⁶⁶

$$\mathcal{P}_{\tilde{x}}(f) = \mathcal{P}_x(f) * \mathcal{P}_{pn}(f) \approx \int_{-W_x}^{W_x} \mathcal{P}_x(\lambda) \mathcal{P}_{pn}(f - \lambda) d\lambda$$

in cui la definizione degli estremi di integrazione tiene conto del fatto che $\mathcal{P}_x(f) \approx 0$ per $|f| > W_x$. Considerando ora che $W_p \gg W_x$, notiamo che per $|\lambda| \leq W_x$ si ha $\mathcal{P}_{pn}(f - \lambda) \approx \mathcal{P}_{pn}(f)$, e quindi

$$\mathcal{P}_{\tilde{x}}(f) \approx \left[\int_{-W_x}^{W_x} \mathcal{P}_x(\lambda) d\lambda \right] \mathcal{P}_{pn}(f) = \mathcal{P}_x \mathcal{P}_{pn}(f)$$

Infine, $\tilde{x}(t)$ è usato per modulare AM-BLD-PS una portante a frequenza f_0 , producendo il segnale $x_m(t) = \tilde{x}(t) \cos 2\pi f_0 t$.

16.9.2.1 Guadagno di processo

E' il termine adottato per indicare il rapporto

$$G_p = \frac{W_p}{W_x} = \frac{T_b}{T_p} = \frac{f_p}{f_b} \quad (16.42)$$

tra la banda del segnale *allargato* e quella del segnale di partenza. Il *processing gain* varia tipicamente tra 10 e 10000 volte, ossia tra 10 e 40 dB, e come vedremo rappresenta una misura del miglioramento dell'SNR nel caso di presenza di segnali interferenti.

16.9.2.2 Despreading

Proseguiamo l'analisi considerando lo schema di ricevitore schematizzato in fig. 16.28, nella cui parte sinistra è mostrato il segnale modulato ricevuto $x_m(t) = \tilde{x}(t) \cos \omega_0 t$

⁶⁵Considerando $x(t)$ realizzazione di un processo ergodico indipendente da $pn(t)$, la potenza di $\tilde{x}(t)$ risulta (§ 7.5.3) $\overline{\tilde{x}^2} = E\{x^2(t) pn^2(t)\} = \overline{x^2} = \mathcal{P}_x$, dato che dalla (16.41) si ha $E\{pn^2(t)\} = 1$.

⁶⁶L'autocorrelazione del prodotto di processi indipendenti è pari al prodotto delle autocorrelazioni (§ 7.5.3), ed a questo si applica la proprietà di equivalenza tra prodotto nel tempo e convoluzione in frequenza, applicato alle trasformate delle autocorrelazioni, in base al teorema di Wiener (§ 7.2.1).

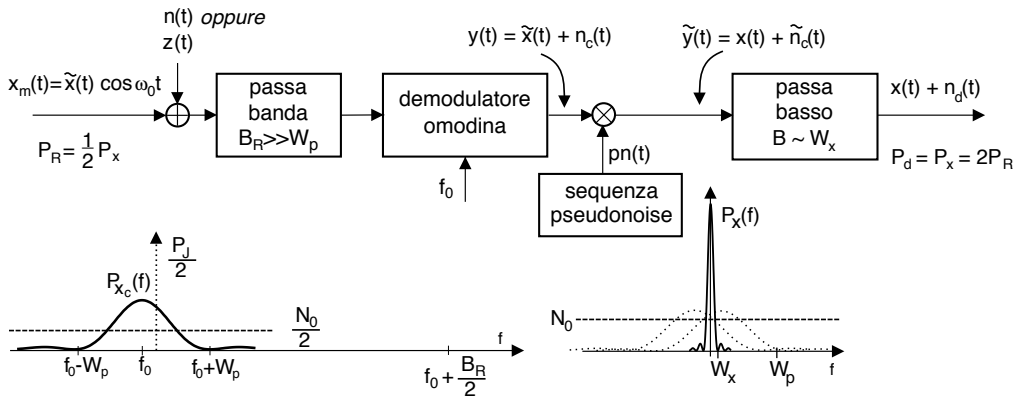


Figura 16.28: Ricevitore DSSS con rumore additivo $n(t)$ o interferenza $z(t)$

con potenza⁶⁷ $\mathcal{P}_R = \frac{1}{2} \mathcal{P}_x$, a cui si sovrappone un disturbo gaussiano $n(t)$ (od un interferente a banda stretta $z(t)$). Entrambi (segnale e disturbo) attraversano quindi il filtro passabanda di ricezione, caratterizzato da una banda di rumore $B_R \gg W_p \gg W_x$ in quanto deve lasciar passare l'intero spettro *allargato*, compresi i suoi lobi laterali. Dopo demodulazione omodina si ottiene il nuovo segnale di banda base $y(t) = \tilde{x}(t) + n_c(t)$ in cui $n_c(t)$ è la componente in fase del disturbo. A questo punto avviene l'operazione di *despreading* che si avvale della possibilità per il ricevitore di generare la stessa sequenza PN usata in trasmissione, in forma *temporalmente sincrona*, in modo da poter scrivere

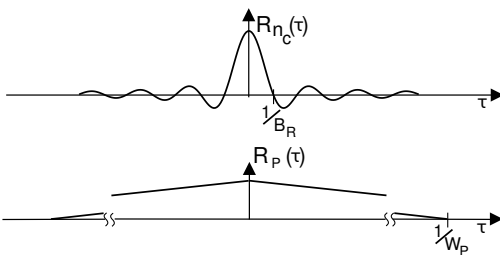
$$\tilde{y}(t) = [\tilde{x}(t) + n_c(t)] pn(t) = x(t) pn^2(t) + n_c(t) pn(t) = x(t) + \tilde{n}_c(t)$$

in virtù dei valori ± 1 assunti da $pn(t)$. Pertanto, mentre il messaggio $x(t)$ è tornato quello precedente all'allargamento, $n(t)$ e/o il disturbo $z(t)$ subiscono le *spreading* descritto al § 16.9.2. Un successivo filtraggio passa-basso con banda W_x pari a quella di segnale produce infine il risultato $y_d(t) = x(t) + n_d(t)$, in cui il segnale utile ha potenza $\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_x = 2\mathcal{P}_R$, mentre per il termine di disturbo additivo $n_d(t)$ è stata rimossa la potenza che cade al di fuori della banda di segnale.

16.9.2.3 Prestazioni in presenza di rumore

La componente in fase (dopo demodulazione omodina) del rumore bianco $n(t)$ con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$ ha densità $\mathcal{P}_{n_c}(f) = N_0 \text{rect}_{B_R}(f)$ (vedi § 14.1.3) e dunque autocorrelazione

$$\mathcal{R}_{n_c}(\tau) = N_0 B_R \text{sinc}(B_R \tau)$$



Allo scopo di valutare la densità di potenza $\mathcal{P}_{\tilde{n}_c}(f)$ del rumore $\tilde{n}_c(t)$ dopo despreading, con l'aiuto della figura a lato osserviamo che l'autocorrelazione di $\tilde{n}_c(t)$ è pari a $\mathcal{R}_{\tilde{n}_c}(\tau) = \mathcal{R}_{n_c}(\tau) \mathcal{R}_p(\tau)$, e

⁶⁷ $\tilde{x}(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)$ con φ v.a. a d.d.p. uniforme può essere considerato come il prodotto di due processi statisticamente indipendenti, la cui potenza è il prodotto delle potenze, vedi § 7.5.3

che $\mathcal{R}_{n_c}(\tau) \simeq 0$ con $|\tau| \gg \frac{1}{B_R} \ll \frac{1}{W_p}$, mentre $\mathcal{R}_p(\tau) \simeq 1$ con $|\tau| \ll T_p = \frac{1}{W_p}$: pertanto possiamo scrivere $\mathcal{R}_{\tilde{n}_c}(\tau) \simeq \mathcal{R}_{n_c}(\tau)$ e quindi

$$\mathcal{P}_{\tilde{n}_c}(f) \simeq \mathcal{P}_{n_c}(f) = N_0 \text{rect}_{B_R}(f)$$

La componente di rumore $n_d(t)$ in uscita dall'ultimo passa basso con banda $\simeq W_x$ ha pertanto una potenza $N_d \simeq 2N_0W_x$, permettendo di valutare il rapporto segnale-rumore dopo demodulazione come

$$\left(\frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{n_c}}\right)_d = \frac{2\mathcal{P}_R}{2N_0W_x} = \frac{\mathcal{P}_R}{N_0W_x}$$

ossia proprio pari all'*SNR di sistema* (pag. 412), mostrando come la concatenazione delle operazioni di spreading e despreading *non alteri* le prestazioni del processo di modulazione nei confronti del rumore bianco.

16.9.2.4 Prestazioni in presenza di un tono interferente

Mostriamo che se il termine di disturbo additivo $z(t)$ occupa una banda relativamente stretta in rapporto a B_R , allora la sua potenza dopo demodulazione risulterà *ridotta* di un fattore pari al guadagno di processo W_p/W_x . Come caso limite consideriamo un *tono* interferente sinusoidale $z(t)$ (o *jammer*) centrato a frequenza $f_0 + f_z$ ossia

$$z(t) = \sqrt{2\mathcal{P}_j} \cos(\omega_0 + \omega_z)t$$

con potenza $\mathcal{P}_z = \mathcal{P}_j$. Dopo demodulazione si ottiene $z_c(t) = \sqrt{2\mathcal{P}_j} \cos \omega_z t$

$$\mathcal{P}_{z_c}(f) = \frac{\mathcal{P}_j}{2} [\delta(f - f_z) + \delta(f + f_z)] \tag{16.43}$$

Moltiplicando quindi il tono interferente demodulato $z_c(t)$ per $pn(t)$ come necessario per il despreading, si ottiene un disturbo $\tilde{z}_c(t)$ con densità di potenza $\mathcal{P}_{\tilde{z}_c}(f) = \mathcal{P}_{z_c}(f) * \mathcal{P}_p(f)$, mostrata alla riga centrale di fig. 16.29⁶⁸, permettendo di apprezzare l'effetto di *allargamento* subito dal tono interferente. Notiamo ora che la massima interferenza si ottiene quando $|f_z| \ll W_p$, al limite pari a zero, come mostrato all'ultima riga della figura in scala espansa per il caso limite di $f_z = 0$. Pertanto il limite superiore della potenza interferente uscente dal passa basso con banda W_x è

$$\mathcal{P}_{z_d} = \int_{-W_x}^{W_x} \mathcal{P}_{\tilde{z}_c}(f) df \leq 2W_x \frac{\mathcal{P}_j}{W_p}$$

e dunque il rapporto segnale-interferente diviene

$$\left(\frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{z_d}}\right)_d \geq 2\mathcal{P}_R \frac{W_p}{2W_x\mathcal{P}_j} = \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_j} \frac{W_p}{W_x}$$

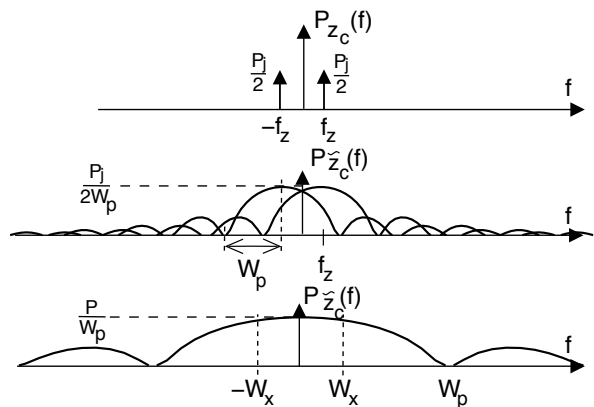


Figura 16.29: Despreading di un tono interferente

⁶⁸Il risultato si ottiene tenendo conto delle eq. (16.40) e (16.43), effettuando la convoluzione, e ricordando che $T_p = 1/W_p$.

che rappresenta un miglioramento esattamente pari al guadagno di processo G_p , eq. (16.42).

16.9.2.5 Accesso multiplo CDMA

Una frequente applicazione della tecnica spread spectrum è quella di permettere la comunicazione *contemporanea* di una pluralità di soggetti, possibile qualora ognuno di essi adotti una diversa sequenza PN: tale approccio prende il nome di CDMA (*Code Division Multiple Access*). Mostriamo ora che con questo approccio ogni comunicazione subisce (a causa delle altre) solo un modesto innalzamento del rumore di fondo, tanto più piccolo quanto minore è il valore della *intercorrelazione* tra i codici PN utilizzati. Indichiamo con $z(t)$ il termine interferente (dopo demodulazione) dovuto alla presenza di N diversi utenti, ognuno con un diverso codice $pn_i(t)$ e segnale dati $x_i(t)$, che può essere scritto come

$$z(t) = \sum_{i=1}^N A_i x_i(t - \tau_i) pn_i(t - \tau_i) \cos \theta_i$$

in cui A_i , τ_i e $\cos \theta_i$ sono rispettivamente ampiezza, ritardo di simbolo e fase della portante relativi all' i -esimo utente. Assumendo ora eguali tra loro le ampiezze del segnale utile $x(t)$ e degli interferenti, dopo il despreading otteniamo

$$\tilde{y}(t) = x(t) + \left[\sum_{i=1}^N x_i(t - \tau_i) pn_i(t - \tau_i) \cos \theta_i \right] pn(t)$$

Se realizziamo ora il filtro passa basso di fig. 16.28 come un integratore esteso ad un periodo di bit, ovvero un filtro adattato al segnale NRZ⁶⁹, il valore della sua uscita campionata al termine della durata del k -esimo periodo di bit risulta

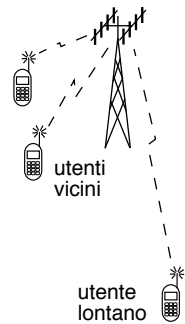
$$\begin{aligned} d(kT_b) &= T_b x(kT_b) + \sum_{i=1}^N \left[\cos \theta_i \int_{(k-1)T_b}^{kT_b} x_i(t - \tau_i) pn_i(t - \tau_i) pn(t) dt \right] \\ &= T_b x(kT_b) + z_d(kT_b) \end{aligned}$$

in cui $z_d(kT_b)$ rappresenta il termine di interferenza complessiva da parte di tutti gli altri N utenti, indicata come *interferenza multiutente* o MUI (multi-user interference). Dato che i valori di x_i possono essere ± 1 , l'integrale calcola in effetti l'*intercorrelazione* $\mathcal{R}_{p_0 p_i}(\tau_i)$ (§ 7.1.4) tra la sequenza PN usata per la propria trasmissione e le sequenze PN usate dagli altri, calcolata per un ritardo τ_i . Pertanto, scegliendo la famiglia di sequenze pseudo-noise in modo che esibiscano una intercorrelazione molto ridotta (in teoria nulla, se le PN fossero esattamente *ortogonali*), l'effetto degli interferenti si riduce in egual misura.

Controllo di potenza Qualora un utente di un sistema CDMA sia sensibilmente più lontano dal ricevitore rispetto agli altri, se tutti trasmettono con la stessa potenza l'attenuazione subita dal segnale dell'utente lontano fa sì che il termine MUI aumenti

⁶⁹Eventualmente realizzato come descritto a pag. 215, supponendo inoltre che sia verificata la condizione di sincronizzazione temporale.

di importanza, anche in presenza di intercorrelazione bassa, causando un importante degrado della qualità della trasmissione. Questo fenomeno è indicato come *effetto near-far*. Per ovviare al problema un sistema CDMA viene usualmente corredato di un meccanismo di *controllo di potenza*, espletato dalla stazione radio base⁷⁰, che misurando la potenza ricevuta da ciascun utente, ne richiede la diminuzione ai vicini e/o l'aumento ai lontani, in modo da ricevere la medesima potenza da ciascuno di essi.



Prestazioni multi-utente con PN incorrelate Consideriamo il caso in cui le trasmissioni CDMA di K diversi utenti siano tutte ricevute con la medesima potenza \mathcal{P}_x , e le sequenze PN utilizzate da ciascuno di essi abbiano una intercorrelazione nulla. Allora, per una generica trasmissione la potenza interferente \mathcal{P}_{n_d} risulta ridotta rispetto a quella effettivamente ricevuta di una quantità pari al guadagno di processo, e quindi il *rapporto segnale-interferenza* (indicato come SIR) risulta circa pari a⁷¹

$$SIR = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{n_d}} = \frac{\mathcal{P}_x}{(K-1)\mathcal{P}_x/G_p} = \frac{G_p}{K-1}$$

Dato che le PN effettivamente utilizzate *non presentano* intercorrelazione nulla, il risultato mostrato costituisce una approssimazione limite rispetto alla quale valutare la qualità delle prestazioni effettivamente ottenute. Nel caso di trasmissione a due livelli la prob. di errore (16.7) minima (a causa degli interferenti) diviene quindi

$$P_e^{BPSK} (bit) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{SIR} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{G_p}{K-1}} \right\}$$

Infine, per tener conto allo stesso tempo sia dell'effetto degli interferenti che del rumore gaussiano comunque presente, può essere usato il *rapporto segnale-rumore più interferente* (o SINR) definito come

$$SINR = \frac{\mathcal{P}_x}{\mathcal{P}_{n_d} + \mathcal{P}_n} = \left(\frac{\mathcal{P}_{n_d} + \mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_x} \right)^{-1} = \left(\frac{K-1}{G} + \frac{N_0}{E_b} \right)^{-1}$$

ossia pari *al parallelo* degli SNR, come discusso a pag. 244.

Esempio In un sistema CDMA-DSSS si desidera una $P_e = 10^{-6}$, a cui la tecnica di modulazione adottata fa corrispondere un $E_b/N_0 = 13$ dB. Trascurando il rumore termico, determinare il massimo numero K di utenti contemporaneamente attivi se $G_p = 30$ dB.

Imponendo $E_b/N_{0I} = G_p/(K-1) = 10^{1.3} = 20$ si ottiene $K = (G_p+20)/20 = 10^{20}/20 = 51$.

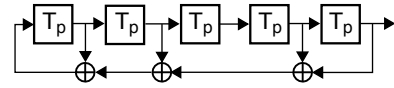
16.9.3 Sequenze pseudo casuali

Accenniamo brevemente ad alcune tipologie di sequenze pseudo noise.

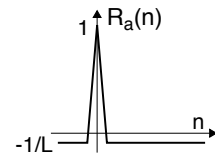
⁷⁰Ossia l'antenna con cui tutti telefonini nella medesima cella sono in comunicazione.

⁷¹In tal caso infatti i $K-1$ interferenti sono assimilabili ad un rumore gaussiano (in virtù del teorema centrale del limite) con potenza complessiva $(K-1)\mathcal{P}_x$ e limitato in banda alla stessa banda W_p del segnale utile. Dopo il despreading la densità spettrale interferente $N_{0I}/2$ si allarga su di una banda $G_p W_p$, e si riduce di ampiezza dello stesso fattore G_p . Pertanto il filtro passa basso a valle del despreading lascia passare una potenza interferente pari a $(K-1)\mathcal{P}_x/G_p$.

Sequenze di massima lunghezza Una prima possibilità è quella delle sequenze- m , o di *massima lunghezza*, ottenute mediante dei registri a scorrimento controeazionati⁷² con m ritardi, simili a quelli discussi a proposito del CRC (pag. 476) ma con la struttura mostrata in figura, in cui non è presente nessun ingresso esterno ed il bit che rientra è calcolato in base all'OR esclusivo di una combinazione di bit di stato. Dato che con m bit si ottengono 2^m configurazioni dello stato, ma che quella *tutti zeri* arresterebbe il processo di generazione, le sequenze di *massima lunghezza*⁷³ sono composte da $L = 2^m - 1$ bit (ognuno dei quali corrisponde ad una diversa configurazione dello stato) che si ripetono ciclicamente, e sono ottenute per particolari scelte⁷⁴ di quali bit far partecipare alla controeazione.



Tra le proprietà positive di questa famiglia annotiamo la *quasi equiprobabilità* dei bit uno e zero, la equa distribuzione delle sequenze di bit uguali⁷⁵, ed una *autocorrelazione ciclica* $\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k a_{(k+n) \bmod L}$ che vale 1 per $n = 0$ ed $-1/L$ altrimenti⁷⁶ (vedi figura). D'altra parte, l'*intercorrelazione* ciclica tra due diverse sequenze- m (di uguale lunghezza L) presenta valori massimi che sono una percentuale apprezzabile di $\mathcal{R}_a(0)$, rendendo necessario individuare altre soluzioni per i casi di accesso multiplo.



Sequenze di Gold e Kasami Le sequenze *di Gold* si ottengono eseguendo l'OR esclusivo bit a bit di due diverse⁷⁷ sequenze- m \mathbf{a} e \mathbf{b} di uguale lunghezza L ; ripetendo il procedimento per tutti i $2^m - 1$ possibili scorrimenti temporali di \mathbf{b} rispetto ad \mathbf{a} , ed includendo \mathbf{a} , si ottengono 2^m diverse sequenze, con una intercorrelazione massima pari a $\sqrt{2/L}$. Una soluzione lievemente diversa è quella *di Kasami*, in cui una delle due sequenze- m di partenza viene *decimata* ciclicamente, e che produce $2^{m/2}$ sequenze, con intercorrelazione massima pari a $1/\sqrt{L}$.

Sequenze di Walsh-Hadamard⁷⁸ Si tratta di sequenze ortogonali, ovvero per le quali risulta $\sum_{k=0}^{L-1} a_k b_k = 0$, ossia \mathbf{a} e \mathbf{b} sono sequenze *incorrelate* qualora allineate, e che sono generate mediante l'algoritmo iterativo schematizzato alla figura che segue, che individua un numero di $L = 2^m$ sequenze, di lunghezza L .

⁷²Vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Linear-feedback_shift_register

⁷³In quanto in linea di principio il periodo della sequenza può essere inferiore al massimo.

⁷⁴Anche in questo caso come al § 15.6.3.3 la posizione degli XOR può essere associata ad un polinomio generatore, e per produrre una sequenza di massima lunghezza occorre scegliere un *polinomio primitivo*, vedi [https://en.wikipedia.org/wiki/Primitive_polynomial_\(field_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Primitive_polynomial_(field_theory)). A parità di m , cambiando polinomio si ottengono sequenze differenti ma di uguale lunghezza, ed il loro numero massimo N aumenta all'aumentare di m con legge $N = (2^m - 2)/m$.

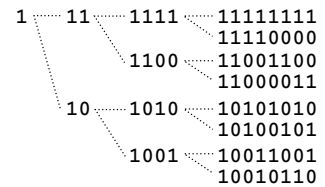
⁷⁵Indicando con *run* una sequenza di bit uguali, su $2^m - 1$ bit si trova un run di uni lungo m , un run di zeri lungo $m - 1$, e quindi 2^{m-i-2} run sia di zeri che di uni di lunghezza i , per $1 < i \leq m - 2$.

⁷⁶L'autocorrelazione si intende calcolata a partire da valori *bipolari*, ossia ottenuti a partire dalla sequenza binaria facendo corrispondere ± 1 ai valori 0, 1, vedi nota 64.

⁷⁷La coppia di sequenze- m non è qualsiasi, ma scelta tra quelle con una intercorrelazione massima ridotta, chiamate *sequenze preferite*.

⁷⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard_code

Possono dunque essere usate nel contesto di un sistema di accesso multiplo qualora gli apparati possano essere sincronizzati tra loro, come per il collegamento *in discesa* tra una stazione radio base ed i terminali radiomobili associati ad essa⁷⁹. Il lato meno positivo di queste sequenze è una autocorrelazione che presenta diversi picchi secondari, e dunque non sono idonee ad assolvere la funzione di sincronizzazione (§ 16.11.1). D'altra parte, la proprietà di ortogonalità può altresì essere sfruttata per realizzare una *segnalazione* ortogonale (§ 7.6.2) nel contesto di una comunicazione punto-punto.



Sequenze di Barker Presentano valori di autocorrelazione (*non ciclica*)

$$\mathcal{R}_a(n) = \frac{1}{L} \sum_{m=0}^{L-1-|n|} a_m b_{m+|n|}$$

con valori $\mathcal{R}_a(0) = 1$ e $|\mathcal{R}_a(n)| \leq 1/L$ per $1 \leq n < L$, e come le sequenze-*m* esibiscono buone proprietà rispetto al bilanciamento ed alle corse. L'aspetto negativo è che la massima lunghezza di sequenza conosciuta è $L = 13$, e con questa lunghezza, ne esiste solo una! Nonostante ciò, sono utilizzate ad esempio nei sistemi di accesso WiFi.

16.9.4 Frequency Hopping

Si tratta di una diversa tecnica *spread spectrum*, in cui la sequenza PN è di tipo *multilivello*, ed è utilizzata in uno schema L-FSK incoerente (§ 16.5) per cambiare in continuazione la frequenza portante a cui avviene la trasmissione, tipicamente FSK anch'essa (vedi figura 16.30), da cui il nome di *saltando di frequenza* (traduzione letterale di FREQUENCY HOPPING). Per una corretta ricezione, è necessaria una accurata sincronizzazione temporale tra la PN usata in trasmissione e quella in ricezione.

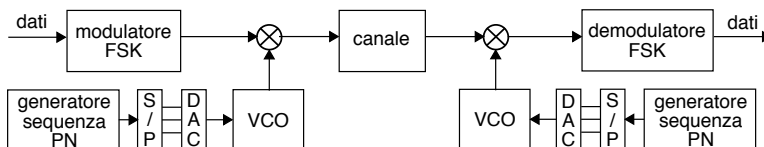


Figura 16.30: Schema di una trasmissione Frequency Hopping

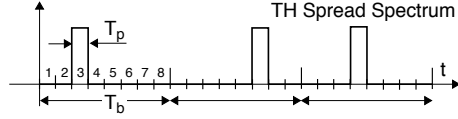
Anche in questo caso si verifica un fenomeno di espansione spettrale, ma stavolta non tutta la banda è occupata in modo *permanente* come nel DSSS, ma anzi durante ogni *salto* si occupa solo la banda necessaria alla modulazione *non allargata*. In questo caso un disturbo a banda stretta provoca interferenza solo durante il salto che occupa la sua stessa frequenza, e dunque può essere facilmente contrastata adottando una codifica di canale (§ 17.4). Inoltre, la tecnica FHSS è proficuamente impiegata in sistemi di accesso multiplo CDMA, dato che possono avvenire contemporaneamente più trasmissioni FHSS utilizzando per esse differenti sequenze PN a bassa intercorrelazione.

Se il periodo di chip (ovvero il tempo per cui il VCO permane sulla stessa frequenza) è più breve del periodo di simbolo, il sistema è detto *fast frequency hopping* o FFHSS, mentre se è maggiore è detto *slow FH* o SFHSS.

⁷⁹Ma in tal caso, anziché *accesso multiplo*, potremmo definire la modalità di trasmissione come un *broadcast ortogonale*.

16.9.5 Time Hopping o UWB

In questo caso la trasmissione avviene su intervalli temporali molto ridotti, e dunque con una occupazione di banda molto elevata (a volte indicata come *ultra wide band* o UWB⁸⁰); l'altro aspetto in comune con le tecniche a spettro espanso è il posizionamento pseudo-casuale degli impulsi nell'ambito di una trama temporale, in base ad una sequenza PN⁸¹. La figura a lato mostra un segnale THSS di banda base, in cui per ogni bit viene trasmesso un chip con $T_p \ll T_b$, posizionato su (ad es.) una di otto possibili posizioni, in maniera pseudo casuale.

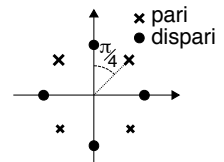


16.10 Altre possibilità

Diamo un accenno ad altre tecniche di modulazione numerica, che non sono state sviluppate in questo capitolo.

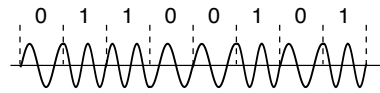
Offset keying⁸² Una variante del QPSK detta OQPSK, in cui la temporizzazione dei rami I e Q viene *sfasata* di metà del periodo di simbolo, in modo che la fase dell'involuppo complesso non vari per più di $\pi/2$ ogni T_s , e dunque il modulo dell'involuppo complesso non può più annullarsi: ciò si traduce in una dinamica delle ampiezze ridotta, riducendo così i problemi legati alla distorsione non lineare (§ 8.3).

Modulazione $\pi/4$ Un'altra variante del QPSK, in cui ogni simbolo viene mappato alternativamente su due costellazioni QPSK *ruotate* di $\pi/4$, in modo che i possibili salti di fase tra simboli contigui possono essere di $\pm 45^\circ$ e $\pm 135^\circ$ anziché 90 e 180 come nel QPSK. L'alternanza tra le due costellazioni avviene in base ad una modulazione differenziale, realizzata associando ad ogni simbolo la rotazione riportata in tabella⁸³. La trasmissione può quindi essere ricevuta adottando un ricevitore in fase e quadratura, dato che per decidere il simbolo ricevuto non è necessario un riferimento di fase assoluto, ma ci si basa su quello del simbolo precedente. Inoltre, la sincronizzazione è semplificata in quanto c'è un cambio di fase ad ogni simbolo, anche qualora siano ...tutti uguali.



$a_k a_{k-1}$	$\Delta\theta$
11	45°
01	135°
00	-135°
10	-45°

Minimum shift keying - MSK⁸⁴ Individua una modulazione FSK binaria *coerente* in cui l'intervallo di frequenza Δ assume il *minimo* valore $\frac{1}{2T_s}$ (vedi § 16.12.1), ottenendo un segnale modulato che mantiene una *continuità di fase* tra bit contigui, come mostrato in figura in cui $f_0 = 1.25 \cdot f_b$ e $f_1 = 1.75 \cdot f_b$, e quindi



⁸⁰<http://en.wikipedia.org/wiki/Ultra-wideband>

⁸¹<http://en.wikipedia.org/wiki/Time-hopping>

⁸²https://en.wikipedia.org/wiki/Phase-shift_keying#Variants

⁸³Dunque ad esempio la sequenza 001011 produce una sequenza di fasi $-135^\circ, -180^\circ, -135^\circ$

⁸⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Minimum-shift_keying

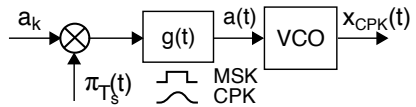
$\Delta = 0.5f_b = 1/2T_b$: questa caratteristica consente una riduzione della banda occupata, in virtù dell'assenza di brusche variazioni di ampiezza.

Modulazione a fase continua - CPK⁸⁵ Come per il caso precedente si realizza un segnale privo di discontinuità, facendo evolvere la fase dell'involuppo complesso *con continuità* tra il valore iniziale e quello finale, nell'arco di un periodo di simbolo. Per fissare le idee, consideriamo l'uscita di un vco

$$x_{CPK}(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta \int_0^t a(\tau) d\tau)$$

alimentato da un segnale dati $a(t) = \sum_{k=1}^L a_k g(t - kT_s)$ come in figura.

Scegliendo $g(t) = \text{rect}_{T_b}(t)$ ed $a_k \in \{0, 1\}$ si ottiene l'MSK, e la variazione della fase avviene in modo lineare (integrale di un rettangolo) realizzando una FM; nel CPK si utilizza invece



un sagomatore privo di discontinuità (ad es. un coseno rialzato nel tempo, ovvero $g(t) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi t/T_s) \text{rect}_{T_b}(t)$), realizzando un segnale modulato (per così dire) sia in fase che in frequenza. Questa ulteriore *dolcezza* dell'involuppo complesso⁸⁶ determina un ulteriore risparmio di banda; d'altra parte la *fase di partenza* per ciascun simbolo dipende da quelli precedentemente trasmessi, e dunque il segnale deve essere decodificato nella sua interezza e non simbolo per simbolo.

Risposta parziale⁸⁷ Si tratta ancora di una modulazione angolare e dunque adotta lo schema mostrato sopra, ma stavolta $g(t)$ ha una durata maggiore di T_s : ciò riduce ancor di più la banda, ma introduce interferenza intersimbolica (ISI) in modo *controllato*, nel senso che è *noto* come i simboli precedenti incidono sul valore dell'attuale. Per questo, la decodifica può avvenire mediante una MLSD (§ 18.4.5), con un lieve peggioramento di prestazioni (in presenza di rumore) rispetto alla assenza di ISI. In questa categoria rientra il GMSK⁸⁸, una forma di MSK a risposta parziale in cui $g(t)$ ha un andamento *gaussiano* (ma ovviamente troncato nel tempo), e che è utilizzato diffusamente (GSM, 802.11 FHSS, BLUETOOTH) in virtù della ridottissima occupazione spettrale⁸⁹.

Modulazione codificata a traliccio - TCM⁹⁰ E' una tecnica che combina la codifica di canale (§ 17.4) con il processo di modulazione, e che anziché aumentare il numero di bit da trasmettere e quindi la banda, aumenta il *numero di punti* di costellazione per simbolo. A prima vista ciò comporterebbe un peggioramento di prestazioni, ma queste sono compensate dal guadagno di codifica associato alla ridondanza introdotta, che si manifesta in un vincolo sui possibili valori della sequenza di simboli, che viene a dipendere anche dal valore di un certa quantità di bit precedenti.

⁸⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Continuous_phase_modulation

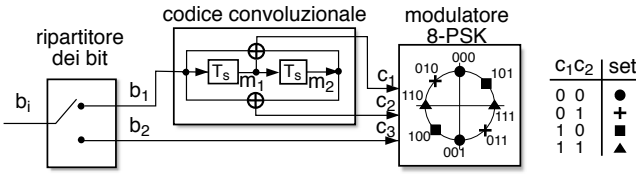
⁸⁶Dato che a differenza di MSK, tra due simboli anche la derivata di $x_{CPK}(t)$ è continua.

⁸⁷Vedi ad es. <http://complextoreal.com/wp-content/uploads/2013/01/qpr.pdf>

⁸⁸Vedi ad es. T. Turetti, *GMSK in a nutshell*, Citeseerx 1996

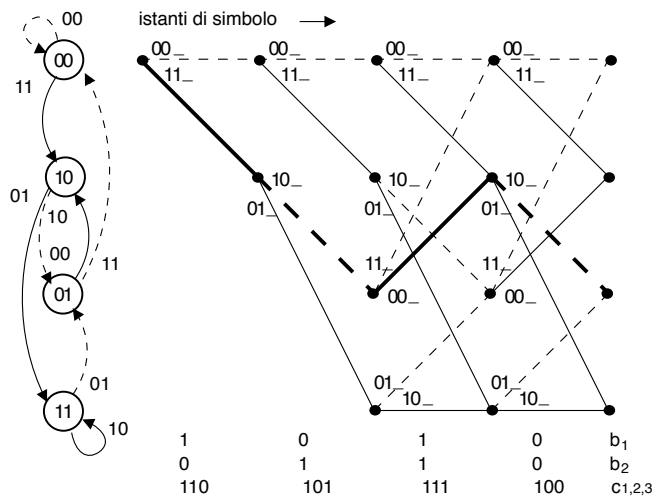
⁸⁹Un po' come realizzare un segnale dati a *banda minima*, senza ricorrere ad un passa basso ideale.

⁹⁰Vedi ad es. <http://complextoreal.com/wp-content/uploads/2013/01/tcm.pdf>



Per fissare le idee riferiamoci alla figura a lato: i bit in arrivo b_i sono inviati alternativamente (b_1) ad un codificatore convoluzionale (2,1,2) (§ 17.4.2) con tasso $R_c = \frac{1}{2}$, e (b_2) ad un modulatore 8-PSK. In questo esempio il codificatore è realizzato come in fig. 17.4 a pag. 576, e dunque produce due bit $c_1 c_2$ in uscita per ognuno che ne entra, in funzione di due bit precedenti $m_1 m_2$ (o *di stato*); anche questo risultato viene inviato al modulatore 8-PSK, le cui 8 possibili fasi sono state suddivise in quattro partizioni come in figura, ed assegnate alle configurazioni binarie (non di Gray) indicate, in modo che per ogni partizione il bit di ingresso non codificato $c_3 = b_2$ sceglie uno tra due punti *più distanti* possibile.

Le possibili sequenze $c_{1,2}$ in uscita dal codificatore sono schematizzate mediante l'automata mostrato alla figura a lato, in cui gli stati sono etichettati con il valore dei bit $m_{1,2}$, e le transizioni con il codice di uscita $c_{1,2}$ corrispondente all'ingresso b_1 pari a zero (linea a tratti) o uno (linea continua), così come calcolate in base agli EX-OR. Le possibili sequenze $c_{1,2,3}$ in ingresso al modulatore sono descritte da tutti i percorsi di attraversamento del *traliccio*⁹¹ disegnato in figura a destra dell'automata, in cui le righe corrispondono allo stato $m_{1,2}$ e le colonne agli istanti di simbolo, mentre le transizioni (continue o tratteggiate a seconda se b_1 è 1 o 0) sono etichettate con i bit associati alla costellazione 8-PSK, a meno del bit b_2 che è indicato dal sottolineato. In definitiva, la sequenza di simboli PSK corrispondente ad un ingresso (ad es.) 10 01 11 00 è 110 101 111 100, come mostrato in basso in figura, e corrispondente alla linea spessa.



La ricezione di questo segnale si svolge in due fasi: nella prima si individua il punto di costellazione, per ogni istante di simbolo k ed ogni partizione p , più vicino al segnale ricevuto r_k , e si valuta la relativa *verosimiglianza logaritmica* $-\log [p(r_k/p)]$, riportandone il valore sull'arco del traliccio a cui si riferisce (vedi anche §§ 17.4.2.3 e 18.4.5). Nella seconda si individua nel traliccio il percorso di minimo costo mediante l'applicazione dell'algoritmo di Viterbi, illustrato a pag. 577.

Notiamo come le scelte fatte abbiano messo in corrispondenza le transizioni uscenti (od entranti) in uno stesso stato con costellazioni disposte *a croce*, ovvero con la massima

⁹¹TRELLIS in inglese, da cui il nome del metodo *trellis coded modulation*.

distanza tra i punti. Per ogni periodo di simbolo solo 4 delle 8 fasi sono possibili. Si può mostrare che il semplice schema dell'esempio permette un miglioramento di E_b/N_0 di 3 dB, e quasi altri 3 possono essere aggiunti per codificatori di maggior complessità.

Sistemi MIMO⁹² Acronimo di *Multiple Input Multiple Output*, è realizzato utilizzando più di una antenna sia in trasmissione che in ricezione, attuando così una *trasmissione in diversità* (§ 20.3.3.1) in grado di aumentare la capacità di un collegamento radio grazie allo sfruttamento del fenomeno dei *cammini multipli*. Approfonditi al cap. 21.

Radio Cognitiva⁹³ Attiene a come trasmettere *intelligentemente* in modo da usare i migliori canali radio a disposizione, in presenza di altre comunicazioni contemporanee: analizzando con continuità lo spettro radio, modifica conseguentemente i parametri di trasmissione e ricezione per permettere un utilizzo più efficiente dello spettro radio nella propria regione di spazio.

16.11 Sincronizzazione

Nelle trasmissioni numeriche occorre ottenere allo stesso tempo sia la sincronizzazione della portante di demodulazione, nei limiti delle ambiguità di fase residue, sia la corretta temporizzazione di simbolo, per campionare le c.a. di b.f. ricevute al centro del periodo di simbolo⁹⁴, ed evitare l'insorgenza di ISI. Le due problematiche possono essere affrontate l'una di seguito all'altra, adottando le soluzioni già esposte⁹⁵. D'altra parte sono ora possibili varianti, come ad esempio il *Costas loop*⁹⁶ che, utilizzando entrambe le c.a. di b.f., realizza l'aggancio di frequenza anche per tecniche di modulazione a portante soppressa, oppure procedure che tentano di acquisire per primo il sincronismo di simbolo, e quindi usano i valori delle c.a. di b.f. ricevute per effettuare correzioni alla fase dell'oscillatore di demodulazione⁹⁷.

Qualora la portante di demodulazione presenti una ambiguità di fase residua si può applicare la tecnica della codifica differenziale esposta al § 16.4, oppure inserire una sequenza di simboli noti (o *flag*) all'inizio della trama trasmissiva, in modo che il confronto tra i valori previsti e quelli ricevuti permetta di correggere tale ambiguità. Da notare che i *flag* o *trailer* ad inizio trama possono essere vantaggiosamente usati anche da schemi di recupero del clock del tipo di quelli al § 15.7.2.1.

⁹²Vedi ad es. <http://complextoreal.com/wp-content/uploads/2013/01/mimo.pdf>

⁹³http://en.wikipedia.org/wiki/Cognitive_radio

⁹⁴Od alla fine, come nel caso di un ricevitore a correlazione, o basato su di un filtro adattato.

⁹⁵Per il recupero della portante si possono usare circuiti del tipo di § 12.2.2.1, mentre l'uso del PLL (§ 12.2.2.2) non è possibile a causa della assenza di residui di portante. Una volta acquisto il sincronismo di frequenza, quello di simbolo può essere ottenuto mediante schemi operanti in banda base, come quelli al § 15.7.2.1.

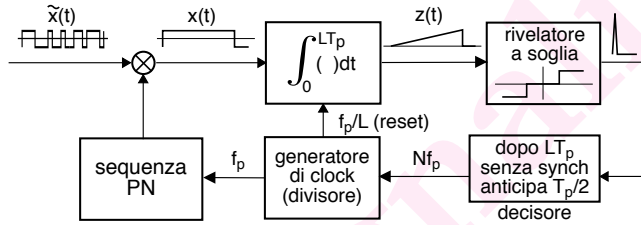
⁹⁶http://en.wikipedia.org/wiki/Costas_loop

⁹⁷Vedi as es. http://en.wikipedia.org/wiki/Carrier_recovery#Decision-directed

16.11.1 Sincronizzazione per sistemi a spettro espanso

In questo caso occorre considerare anche la modalità di acquisizione della fase della sequenza PN necessaria al despreading, che avviene in due passi: il primo effettua una ricerca sequenziale ed ha una precisione di metà del periodo di chip T_p , mentre il secondo riduce l'errore mediante una tecnica a controreazione, e lo mantiene sotto controllo.

Considerando già avvenuta la sincronizzazione di portante e la demodulazione, il primo passo può essere attuato mediante lo schema in figura detto *sliding correlator*, in cui l'integratore (ad es. un integrate and dump) calcola la correlazione tra la PN in arrivo e quella generata localmente.



Schema di un *sliding correlator*

In caso di coincidenza temporale il risultato $z(t)$ è una rampa (negativa se il bit fosse stato -1), mentre per un ritardo θ tra la seq. locale e quella ricevuta il risultato dell'integrazione all'istante LT_p è l'autocorrelazione $R_{\tilde{x}}(\theta)$, più termini di rumore a valor atteso nullo. Alla conclusione del periodo di bit $T_b = LT_p$ il generatore di clock resetta l'integratore, non prima però che il rivelatore a soglia abbia prodotto un impulso di sincronismo, inibendo il componente di decisione e terminando la ricerca. In assenza di sincronizzazione, il decisore fa invece avanzare la fase della PN di $T_p/2$, tentando di nuovo l'aggancio. Il metodo richiede dunque $2L^2T_p$ secondi (nel caso peggiore), tempo che può essere ridotto eseguendo più ricerche in parallelo.

Dopo aver acquisito la sincronizzazione *lasca* il controllo della generazione della PN passa ad un circuito indicato come *delay locked loop* o DLL, che può essere realizzato in diversi modi, e di cui discutiamo il funzionamento dello schema *canonico* mostrato in fig. 16.31. Un generatore pseudonoise produce la sequenza PN_0 affetta dall'errore di temporizzazione residuo $-T_p/2 \leq |\theta| \leq T_p/2$, che ai fini della discussione assumiamo come un ritardo, e dunque scriviamo $PN_0 = \tilde{x}(t - \theta)$; lo scopo del DLL è di rendere $\theta = 0$. Da PN_0 sono derivate due nuove sequenze, $PN_{early} = \tilde{x}(t - \theta + \delta)$ e $PN_{late} = \tilde{x}(t - \theta - \delta)$, che differiscono da PN_0 rispettivamente per un anticipo od un ritardo $\delta < T_p/2$, e che sono moltiplicate per il segnale allargato di banda base $\tilde{x}(t)$. L'integratore del ramo superiore (*early*) calcola pertanto l'autocorrelazione⁹⁸

$$R_{\tilde{x}}(\delta - \theta) = \int_0^{LT_p} \tilde{x}(t) \tilde{x}(t - \theta + \delta) dt$$

tra $\tilde{x}(t)$ e la sua copia *in anticipo* di $\delta - \theta$, mentre quello inferiore (*late*) calcola $R_{\tilde{x}}(-\delta - \theta)$ tra $\tilde{x}(t)$ e la sua copia *in ritardo* di $\delta + \theta$ (vedi lato destro di fig. 16.31): questi due risultati sono campionati⁹⁹ a fine sequenza, ed indicati con z_{early} e z_{late} ;

⁹⁸L'esempio si riferisce ad una sequenza PN di massima lunghezza, della cui autocorrelazione si è discusso a pag. 533.

⁹⁹Il blocco che valuta il valore assoluto dell'uscita dell'integratore è necessario in quanto $\tilde{x}(t)$ trasporta anche l'informazione $x(t)$, che determina l'eventuale inversione di segno della sequenza PN, e dunque un

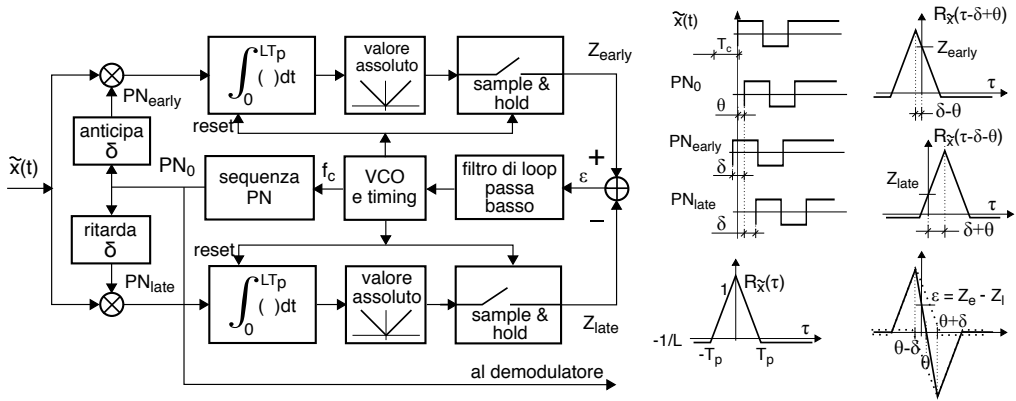
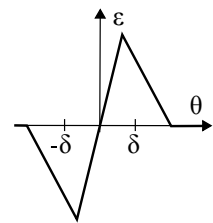


Figura 16.31: Delay locked loop e forme d'onda relative

notiamo che se $\theta = 0$, si ha $z_{early} = z_{late} = R_{\tilde{x}}(\delta)$.

Proseguendo con l'esempio, osserviamo come l'evenienza $z_{early} > z_{late}$ indichi che la fase di PN_{early} è più prossima a quella del segnale ricevuto di quanto non lo sia quella di PN_{late} , e dunque PN_0 è in ritardo, ovvero stiamo andando... troppo piano¹⁰⁰. In questo caso la differenza $\varepsilon = z_{early} - z_{late}$ risulta positiva (vedi costruzione grafica in basso a ds in fig. 16.31), e ciò determina (attraverso il filtro di loop) una *accelerazione* del vco, che tende quindi a ridurre il ritardo iniziale θ . Se si fosse verificato l'opposto ($\theta < 0$ e dunque $z_{early} < z_{late}$) sarebbe risultato $\varepsilon < 0$, a cui corrisponde un *rallentamento* del vco.

Man mano che θ si riduce, PN_{early} e PN_{late} tendono a disporsi simmetricamente in anticipo ed in ritardo di δ rispetto a PN_0 , in modo che z_{early} e z_{late} prendono il medesimo valore e la loro differenza ε si annulla, la f_c prodotta dal vco è costante, e PN_0 è esattamente in fase con $\tilde{x}(t)$. Mentre θ si azzerava, la costruzione grafica in basso a destra di fig. 16.31 *transla* verso sinistra, in modo che corrisponda $\varepsilon = 0$ per $\theta = 0$. Ciò consente di riformulare l'approccio grafico come nella figura a lato, che rappresenta l'errore ε in funzione del disallineamento θ , detta anche *curva di discriminazione* o *curva-s*, e che evidenzia l'intervallo $|\theta| < \delta$ entro il quale il sistema converge. Questa figura è simile a quella discussa al § 12.2.2.2 a proposito del PLL, ed infatti l'analisi delle prestazioni ha molto in comune. In particolare una diminuzione della banda del filtro di loop, se da un lato riduce le capacità di inseguire rapide variazioni di ritardo (come potrebbe essere per effetto doppler), d'altro canto attenua l'influenza del rumore sulla varianza della stima di θ .



Una alternativa possibile opera direttamente sul segnale modulato, e per questo indicata come *DLL incoerente*, non necessitando della sincronizzazione di portante. Al posto dell'integratore utilizza un filtro passabanda centrato sulla portante, seguito da un demodulatore di involuppo. Una ulteriore variante, indicata come *tau-dither loop*, cambiamento di segno per l'uscita dell'integratore.

¹⁰⁰In altri termini, le tre copie della PN (0, *early* e *late*) dovrebbero *slittare* a sinistra, e quindi il periodo della PN deve essere *ridotto*.

affronta e risolve il problema legato ad un possibile diverso guadagno tra i due rami del DLL.

16.12 Appendici

16.12.1 Ortogonalità tra simboli sinusoidali

Al § 16.5.1 si è introdotta la modulazione FSK ortogonale, e nelle note è iniziata la discussione relativa alla condizione di ortogonalità tra la forma d'onda sinusoidale di durata T_s ricevuta, e quella prodotta al ricevitore come ingresso ai correlatori di un banco. Prendiamo pertanto ora in considerazione segnali del tipo

$$s_k(t) = \cos [2\pi (f_0 + k \cdot \Delta) t + \phi_k] \quad \text{con } k \text{ intero}$$

separati da un intervallo di frequenza Δ , in cui è inclusa una differenza (o errore) di fase aleatorio ϕ_k tra le forme d'onda, in modo da esaminare le differenze tra il caso di modulazione coerente ed incoerente, ovvero con $\phi_k = 0 \forall k$, oppure ϕ_k v.a. incorrelate uniformi tra 0 e 2π .

Iniziamo dunque con lo sviluppare l'espressione dell'integrale di intercorrelazione tra due di questi segnali

$$\rho = \int_0^{T_s} s_n(t) s_m(t) dt = \int_0^{T_s} \cos [2\pi (f_0 + m\Delta) t] \cos [2\pi (f_0 + n\Delta) t + \phi] dt$$

che quando si annulla indica la condizione di ortogonalità. Facendo uso della relazione $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$ e riferendoci per semplicità al caso di due frequenze contigue (ponendo $m = 0$ ed $n = 1$) si ottiene

$$\rho(\Delta, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos [2\pi (2f_0 + \Delta) t + \phi] dt + \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos [2\pi \Delta t - \phi] dt \quad (16.44)$$

Verifichiamo che il primo integrale della somma assume un valore nullo indipendentemente da ϕ quando $2f_0 + \Delta = \frac{k}{T_s}$, poiché in tal caso in un intervallo T_s entrano un numero intero k di periodi, ed il coseno ha valor medio nullo. Concentriamoci allora sul valore di Δ che annulla anche il secondo integrale, che riscriviamo facendo uso della relazione $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos (2\pi \Delta t - \phi) dt = \\ &= \int_0^{T_s} [\cos (2\pi \Delta t) \cos \phi + \sin (2\pi \Delta t) \sin \phi] dt = \\ &= \frac{\sin (2\pi \Delta t)}{2\pi \Delta} \Big|_0^{T_s} \cdot \cos \phi - \frac{\cos (2\pi \Delta t)}{2\pi \Delta} \Big|_0^{T_s} \cdot \sin \phi = \\ &= T_s \left[\frac{\sin (2\pi \Delta T_s)}{2\pi \Delta T_s} \cdot \cos \phi + \frac{1 - \cos (2\pi \Delta T_s)}{2\pi \Delta T_s} \cdot \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (16.45)$$

Osserviamo ora che qualora $\phi = 0$ (coerenza di fase) il secondo termine della (16.45) si annulla per qualunque Δ . Se a questo punto esaminiamo solamente il primo termine, individuiamo le condizione di ortogonalità sul valore di Δ per il caso di

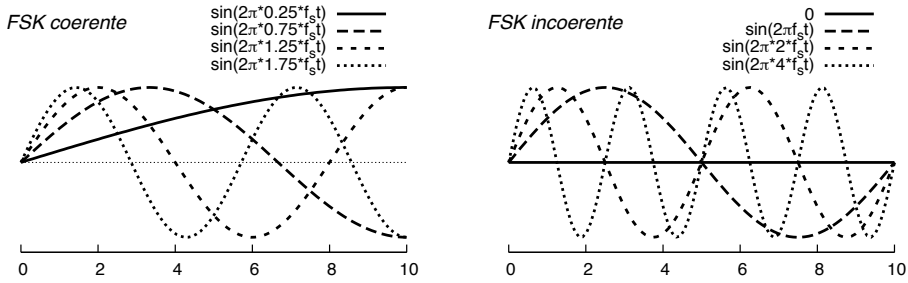


Figura 16.32: Forme d'onda ortogonali nei casi di modulazione *coerente* ed *incoerente*

Modulazione coerente Quando $\phi = 0$ il termine $\frac{\sin(2\pi\Delta T_s)}{2\pi\Delta T_s} = \text{sinc}(2\Delta T_s)$ della (16.45) si annulla per $\Delta = \frac{k}{2T_s}$, e quindi la *minima* spaziatura tra portanti risulta $\Delta = \frac{1}{2T_s} = \frac{f_s}{2}$; pertanto, le frequenze utilizzate dovranno essere del tipo $f_0 + k\frac{f_s}{2}$.

Per fare in modo che *anche* il primo termine della (16.44) si annulli deve sussistere la relazione già osservata $2f_0 + \Delta = \frac{k}{T_s} = kf_s$, sostituendo nella quale il vincolo $\Delta = \frac{f_s}{2}$ appena trovato fornisce

$$2f_0 + \Delta = 2f_0 + \frac{f_s}{2} = kf_s$$

a cui corrisponde la condizione

$$f_0 = f_s \frac{2k - 1}{4}$$

ossia f_0 deve essere scelta come uno tra i valori $\frac{1}{4}f_s, \frac{3}{4}f_s, \frac{5}{4}f_s, \frac{7}{4}f_s, \dots$, il che significa che la portante di riferimento f_0 da cui partire deve essere essa stessa ortogonale alle frequenze che codificano i simboli: infatti in tal modo ogni termine della serie dista dall'altro¹⁰¹ per una frequenza pari a $\frac{f_s}{2}$, coincidente con il valore Δ necessario a che le frequenze di segnalazione siano ortogonali.

La parte sinistra della figura 16.32 quindi rappresenta, disegnate in un intervallo pari a T_s , sia le portanti f_0 che possono essere usate, sia le prime frequenze $f_k = k \cdot \Delta$ che è possibile adottare per un modulazione FSK *coerente* basata sul valore minimo di f_0 pari a $\frac{1}{4}f_s$ ¹⁰².

Nel caso in cui f_0 non assuma uno dei valori individuati il primo termine di (16.44) non si annulla, ma se $f_0 \gg \frac{1}{T_s}$, risulta trascurabile rispetto al secondo. Pertanto, se $f_0 \gg f_s$ la scelta di f_0 non è più determinante.

Modulazione incoerente In questo caso si ha $\phi \neq 0$. In generale la (16.45) presenta entrambi i termini; mentre il primo (come già osservato) si annulla per $\Delta = \frac{k}{2T_s}$, il secondo invece è nullo solo se $\Delta = \frac{k}{T_s}$. Questa circostanza determina il risultato che

¹⁰¹Infatti $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \dots$

¹⁰²Possiamo notare come la spaziatura tra le frequenze di segnalazione di $\frac{f_s}{2}$ fa sì che due forme d'onda con una differenza di frequenza $n\Delta = n\frac{f_s}{2}$ accumulino in un intervallo T_s una differenza di fase di $n\pi$, ovvero un numero intero di semiperiodi.

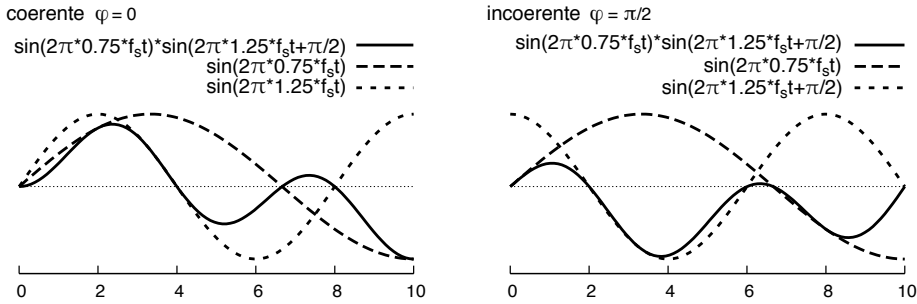


Figura 16.33: Prodotto di due frequenze ortogonali distanti $\frac{f_s}{2}$ in assenza di errore di fase (a sn) e con errore pari a $\phi = \frac{\pi}{2}$ (a ds)

quando $\phi \neq 0$ i segnali $s_k(t)$ sono ortogonali purché la spaziatura tra portati sia *doppia* della precedente, e pari cioè a $\Delta = f_s$.

Torniamo ad esaminare la (16.44): ora il suo primo termine si annulla se $2f_0 + \Delta = 2f_0 + f_s = kf_s$, che determina la condizione

$$f_0 = f_s \frac{k - 1}{2}$$

ossia $f_0 = 0, \frac{1}{2}f_s, f_s, \frac{3}{2}f_s, \dots$. Notiamo come la spaziatura $\frac{f_s}{2}$ tra i possibili valori per la portante di riferimento f_0 sia identica al caso precedente, mentre la spaziatura necessaria alle frequenze di segnalazione $f_k = k \cdot \Delta$ è raddoppiata. La circostanza che ora sia ammessa anche una “portante a frequenza nulla” consente quindi di tracciare la parte destra della figura 16.32, che mostra le prime frequenze di segnalazione che è possibile adottare per una modulazione FSK *incoerente* basata sul valore minimo di $f_0 = 0$.

Verifica grafica In figura 16.33 è mostrato il risultato del prodotto di due frequenze distanti $\frac{f_s}{2}$ e calcolate in assenza di errore di fase (a sinistra) e con un errore di fase pari a $\phi = \frac{\pi}{2}$. Si può notare come in questo secondo caso si perda l’ortogonalità tra i segnali, essendo il risultato prevalentemente negativo.

16.12.2 Prestazioni della modulazione OFDM

Il calcolo della P_e per bit accennato al § 16.8.5 si basa su quello relativo alle probabilità di errore P_{e_n} condizionato alle singole portanti. Dato che la portante *n-esima* trasporta M_n bit/simbolo, la probabilità che un bit generico provenga dalla portante *n-esima* risulta pari a $Pr(n) = \frac{M_n}{M}$ e quindi la probabilità che sia errato è pari a

$$P_e = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} Pr(n) P_{e/n} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} M_n P_{e_n} \tag{16.46}$$

16.12.2.1 Calcolo della P_e per portante

Per determinare il valore di P_{e_n} per la portante *n-esima* si applica il risultato trovato al § 16.3.1 per la modulazione QAM, che esprime P_{e_n} in funzione del numero di livelli $L_n =$

2^{M_n} e del rapporto $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_n$ per tale frequenza. Ma l'eq. (16.14) è ricavata considerando la densità di potenza del rumore in ingresso al ricevitore limitata da un filtro con banda pari a quella del segnale QAM, mentre ora tale filtro lascia passare l'intera banda $N\Delta$ occupata dal segnale OFDM, e quindi occorre valutare l'effetto prodotto da questo rumore sui valori \underline{a}_n ottenuti mediante FFT. Inoltre, vorremmo pervenire ad un risultato valido anche in presenza di rumore non bianco, e/o di una distribuzione di potenza sulle portanti non uniforme. Pertanto, al posto del rapporto E_b/N_0 che compare nella (16.14) utilizziamo ora il rapporto SNR_n tra la quota di potenza di segnale che raggiunge l' n -esimo decisore, e la varianza (dovuta al rumore) della v.a. \underline{a}_n su cui si basa tale decisione, ottenendo così¹⁰³

$$P_{e/n} = \frac{2}{\log_2 L_n} P_{\alpha_n} \quad \text{in cui} \quad P_{\alpha_n} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L_n}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} SNR_n \frac{1}{L_n - 1}} \right\} \quad (16.47)$$

ed in cui P_{α_n} esprime la probabilità di errore su di uno dei rami (in fase od in quadratura) della n -esima costellazione QAM con L_n punti, che rappresentano gruppi di bit secondo la codifica di Gray. Per il calcolo di

$$SNR_n = \frac{\mathcal{P}_{R_n}^c}{\mathcal{P}_{N_n}^c} = \frac{\mathcal{P}_{R_n}^s}{\mathcal{P}_{N_n}^s} = \frac{\frac{1}{2} \mathcal{P}_{R_n}}{\frac{1}{2} \mathcal{P}_{N_n}} = \frac{\mathcal{P}_{R_n}}{\mathcal{P}_{N_n}}$$

osserviamo che la potenza \mathcal{P}_{R_n} dell'involuppo complesso del segnale ricevuto sulla portante n -esima è pari a

$$\mathcal{P}_{R_n} = 2\mathcal{P}_{R_n} = 2\frac{T_0}{T} \alpha_n \mathcal{P}$$

in cui \mathcal{P} è la potenza totale ricevuta, e $\alpha_n = \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}}$ è la frazione di potenza assegnata alla n -esima portante. Resta quindi da determinare \mathcal{P}_{N_n} .

¹⁰³La (16.47) può essere derivata dalle (16.13) e (16.14) considerando $\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR_n}{\log_2 L_n}$, ovvero invertendo l'eq. (15.16) $SNR = \frac{E_b}{N_0} \frac{2 \log_2 L}{(1+\gamma)}$ con $\gamma = 0$ e notando che a differenza del caso di banda base, per segnali AM la banda (e la potenza di rumore) raddoppia. Ma se questa è una spiegazione troppo sintetica, ripercorriamo tutti i passaggi.

Partiamo dalla probabilità di errore condizionata (15.10) $P_\delta = \operatorname{erfc} \left\{ \frac{\Delta}{2\sqrt{2}\sigma_n(L-1)} \right\}$ del caso di multilivello di banda base, ed osserviamo che per un impulso rettangolare $g(t) = \operatorname{rect}_{T_0}(t)$ la (15.12) si modifica in $\mathcal{P}_R = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1}$ in quanto $\mathcal{P}_R = \int \mathcal{P}_R(f) df = \int \sigma_A^2 \frac{|G(f)|^2}{T_0} df$ dove $\sigma_A^2 = \frac{\Delta^2}{12} \frac{L+1}{L-1}$ come ottenuto al § 15.8.1, mentre $\int |G(f)|^2 df = \int T_0^2 \operatorname{sinc}^2(fT_0) df = T_0$ (vedi nota 44).

In tal modo, eseguendo i passaggi di cui alla nota 48 a pag. 456 otteniamo $P_\delta = \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{12\mathcal{P}_R(L-1)/(L+1)}{2\sqrt{2}\sigma_n(L-1)}} \right\} = \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{1}{L^2-1} SNR} \right\}$ che conduce alla (16.47) ricordando che per il QAM ogni ramo ha \sqrt{L} livelli, e che eseguendo il valore atteso rispetto alle probabilità dei simboli si ottiene $P_e(\text{bit}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) P_\delta$ (vedi eq. (15.11)).

16.12.2.2 Potenza di rumore per portante

Per quanto riguarda $\mathcal{P}_{\underline{N}_n}$, si tratta di applicare la (16.34) alla sequenza $\{(-1)^h \underline{n}(hT_c)\}$ dei campioni dell'involuppo complesso del rumore, e determinare il valore

$$\mathcal{P}_{\underline{N}_n} = E \left\{ (\underline{N}_n)^2 \right\} = \sigma_{\underline{N}_n}^2 \quad \text{in cui} \quad \underline{N}_n = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{N-1} (-1)^h \underline{n}(hT_c) e^{-j2\pi \frac{h}{N} n}$$

tenendo conto del fatto che i valori $\underline{n}(hT_c)$ sono a media nulla, che (con n fissato) la FFT ne effettua una combinazione lineare con coefficienti $e^{-j2\pi \frac{h}{N} n}$, e che essendo $\underline{n}(t)$ ergodico è possibile scambiare medie temporali e di insieme. Sviluppando

$$(\underline{N}_n)^2 = \underline{N}_n \underline{N}_n^* = \frac{1}{N^2} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^{h-k} \underline{n}(hT_c) \underline{n}^*(kT_c) e^{-j2\pi \frac{h-k}{N} n}$$

e tenendo conto che

$$E \left\{ (-1)^{h-k} \underline{n}(hT_c) \underline{n}^*(kT_c) \right\} = e^{j\pi(h-k)} \mathcal{R}_{\underline{N}}((h-k)T_c)$$

otteniamo¹⁰⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\underline{N}_n} &= \frac{1}{N^2} \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{R}_{\underline{N}}((h-k)T_c) e^{j\pi(h-k)} e^{-j2\pi \frac{h-k}{N} n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-|m|}{N} \mathcal{R}_{\underline{N}}(mT_c) e^{j2\pi \frac{mT_c}{2T_c}} e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} z(m) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \end{aligned} \quad (16.48)$$

in cui l'ultima riga semplifica l'espressione introducendo la sequenza $\{z(m)\}$ di lunghezza N , che si ottiene campionando

$$z(t) = \left(1 - \frac{|t|}{NT_c} \right) \mathcal{R}_{\underline{N}}(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}} \quad (16.49)$$

agli istanti $t = mT_c$ con $T_c = \frac{1}{N\Delta}$. Mostriamo ora come, per N sufficientemente elevato, la (16.48) possa essere calcolata in funzione dei campioni di $Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$, ed in particolare di come risulti

$$\mathcal{P}_{\underline{N}_n} \simeq \Delta \cdot Z(f)|_{f=n\Delta} \simeq 4\Delta \cdot \mathcal{P}_N(f_n)$$

¹⁰⁴La riduzione da due ad una sommatoria si ottiene scrivendo esplicitamente tutti i termini della doppia sommatoria, e notando che si ottiene per N volte lo stesso termine $\mathcal{R}_{\underline{N}}(0)$, $N-1$ volte i termini

$$\mathcal{R}_{\underline{N}}(T_c) e^{j\pi} e^{-j2\pi \frac{1}{N} n} \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_{\underline{N}}(-T_c) e^{-j\pi} e^{j2\pi \frac{1}{N} n}$$

$N-2$ volte quelli $\mathcal{R}_{\underline{N}}(2T_c) e^{j2\pi} e^{-j2\pi \frac{2}{N} n}$ e $\mathcal{R}_{\underline{N}}(-2T_c) e^{-j2\pi} e^{j2\pi \frac{2}{N} n}$, e così via.

Analizzando i termini che compaiono in (16.49), osserviamo che il prodotto $\mathcal{R}_N(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}}$ ha trasformata pari a $\mathcal{P}_N(f)$, traslata in frequenza di $-\frac{1}{2T_c} = -\frac{N\Delta}{2}$, ovvero

$$\mathcal{F} \left\{ \mathcal{R}_N(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}} \right\} = \mathcal{P}_N \left(f - \frac{N\Delta}{2} \right)$$

mentre il termine $\left(1 - \frac{|t|}{NT_c}\right) = \text{tri}_{2NT_c}(t) = \text{tri}_{\frac{2}{\Delta}}(t)$ possiede come noto trasformata $\mathcal{F} \left\{ \text{tri}_{\frac{2}{\Delta}}(t) \right\} = \frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2 \left(\frac{f}{\Delta} \right)$; pertanto per N elevato il prodotto $z(t) = \mathcal{R}_N(t) e^{j2\pi \frac{t}{2T_c}} \cdot \text{tri}_{\frac{2}{\Delta}}(t)$ ha trasformata

$$Z(f) = \mathcal{P}_N \left(f - \frac{N\Delta}{2} \right) * \frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2 \left(\frac{f}{\Delta} \right) \simeq \mathcal{P}_N \left(f - \frac{N\Delta}{2} \right)$$

avendo approssimato $\frac{1}{\Delta} \text{sinc}^2 \left(\frac{f}{\Delta} \right)$ come un impulso di area unitaria, per $N\Delta$ grande rispetto a Δ .

Dato che $\mathcal{P}_N(f)$ è limitato in banda tra $\pm \frac{N\Delta}{2}$, allora $Z(f)$ è limitato in una banda compresa tra $f = 0$ ed $f = N\Delta$, e $z(t)$ è perfettamente rappresentato dai suoi campioni $z(m) = z(mT_c)$ che compaiono nella (16.48); in particolare, per N sufficientemente elevato si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{N_n} &= \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} z(m) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n} \simeq \Delta \cdot Z(f)|_{f=n\Delta} = \\ &= \Delta \cdot \mathcal{P}_N \left(n\Delta - \frac{N\Delta}{2} \right) = \Delta \cdot \mathcal{P}_N \left(\Delta \left(n - \frac{N}{2} \right) \right) = \\ &= 4\Delta \cdot \mathcal{P}_N^+ \left(f_0 + \Delta \left(n - \frac{N}{2} \right) \right) = 4\Delta \cdot \mathcal{P}_N(f_n) = 2\Delta \cdot \mathcal{N}_0(f_n) \end{aligned}$$

(passaggi alla nota¹⁰⁵) in cui si è tenuto conto che $\mathcal{P}_N(f) = 4\mathcal{P}_N^+(f + f_0)$ e si è indicata

¹⁰⁵Se campioniamo $z(t)$ con periodo $T_c = \frac{1}{N\Delta}$, il segnale $Z^*(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z(f - m \cdot N\Delta)$ non presenta aliasing (vedi figura), ed il passaggio di

$z^*(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) \delta(t - mT_c)$

attraverso un filtro di ricostruzione

$H(f) = \frac{1}{N\Delta} \text{rect}_{N\Delta} \left(f - \frac{N\Delta}{2} \right)$ restituisce il segnale originario. Scriviamo pertanto

$$z(t) = z^*(t) * h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) \delta(t - mT_c) * \text{sinc}(N\Delta t) e^{j\pi N\Delta t}$$

ed effettuiamone la trasformata:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) \delta(t - mT_c) \right\} \cdot \frac{1}{N\Delta} \text{rect}_{N\Delta} \left(f - \frac{N\Delta}{2} \right) \\ &= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) e^{-j2\pi \frac{m}{N\Delta} f} \right] \cdot \frac{1}{N\Delta} \text{rect}_{N\Delta} \left(f - \frac{N\Delta}{2} \right) \end{aligned}$$

che, calcolata alle frequenze $f = n\Delta$ con $n = 0, 1, \dots, N-1$ fornisce

$$Z(f)|_{f=n\Delta} = \frac{1}{N\Delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} z(mT_c) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

Se ora non disponiamo di tutti i campioni $z(mT_c)$, ma solo dei $2N-1$ valori con $m = -(N-1), \dots, 0, 1, \dots, N-1$, la relazione precedente si applica ad un nuovo segnale $z'(t) = z(t) \cdot \text{rect}_{2NT_c}(t)$,

la densità di potenza in ingresso come $\mathcal{P}_N(f) = \frac{\mathcal{N}_0(f)}{2}$.

16.12.2.3 Prestazioni per portante

Siamo finalmente in grado di scrivere

$$\begin{aligned} \text{SNR}_n &= \frac{\mathcal{P}_{R_n}}{\mathcal{P}_{N_n}} = \frac{2\frac{T_0}{T}\alpha_n\mathcal{P}}{2\Delta\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T}\alpha_n\frac{T_0\mathcal{P}}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T}\alpha_n\frac{E_s}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \\ &= \frac{T_0}{T}\alpha_n\frac{E_bM}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T}\frac{E_{b_n}}{E_b}\frac{E_bM}{\mathcal{N}_0(f_n)} = \frac{T_0}{T}\frac{E_{b_n}M}{\mathcal{N}_0(f_n)} \end{aligned}$$

avendo posto $T_0\mathcal{P} = E_s = E_bM$ pari all'energia di un simbolo di durata $T_0 = \frac{1}{\Delta}$, ed avendo riscritto $\alpha_n = \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}}$ come $\alpha_n = \frac{E_{b_n}}{E_b}$ in modo da porre in evidenza la E_{b_n} della portante n -esima. La P_e per portante risulta quindi

$$P_{e/n} = \frac{2}{M_n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L_n}} \right) \text{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3}{2} \frac{T_0}{T} \frac{E_{b_n}}{\mathcal{N}_0(f_n)} \frac{M}{L_n - 1}} \right\} \quad (16.50)$$

16.12.2.4 Caso di rumore bianco

Se $\mathcal{P}_N(f)$ non dipende da f , possiamo scrivere

$$\mathcal{P}_N^+(f) = \frac{\mathcal{N}_0}{2} \text{rect}_{N\Delta}(f - f_0)$$

e semplificare la (16.50) sostituendo ad $\mathcal{N}_0(f_n)$ la costante \mathcal{N}_0 . In questo caso il risultato $\mathcal{P}_{N_n} = 2\Delta \cdot \mathcal{N}_0$ può essere ottenuto direttamente dalla (16.48): risulta infatti

$$\mathcal{R}_{N_n}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{P}_{N_n}(f) \} = \mathcal{F}^{-1} \{ 4\mathcal{P}_N^+(f + f_0) \} = 2\mathcal{N}_0N\Delta \text{sinc}(N\Delta t)$$

e dunque $\mathcal{R}_{N_n}(t) = 0$ con $t = mT_c = \frac{m}{N\Delta}$ per $m \neq 0$. Ciò in definitiva permette di scrivere

$$\mathcal{P}_{N_n} = \frac{1}{N} \mathcal{R}_{N_n}(0) = \frac{1}{N} 2\mathcal{N}_0N\Delta = 2\Delta \cdot \mathcal{N}_0$$

16.12.2.5 Confronto con la portante singola

Proviamo a verificare se la modulazione OFDM è vantaggiosa in termini di prestazioni rispetto ad una QAM monoportante che trasporti il medesimo flusso binario f_b , occupi la stessa banda, ed a parità di potenza impiegata.

Nel caso OFDM, considerando un tempo di guardia $T_g = T - T_0$ nullo, in presenza di rumore bianco, e scegliendo un intervallo di simbolo $T_0 = \frac{1}{\Delta}$ da cui derivare $M^{OFDM} = T_0 \cdot f_b$, si ottiene $\alpha_n = \frac{1}{N}$ e dunque valori $E_{b_n} = \alpha_n E_b = \frac{E_b}{N}$ uguali per le diverse portanti; pertanto la 16.50 diviene

fornendo

$$Z'(f) \Big|_{f=n\Delta} = \frac{1}{N\Delta} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} z(mT_c) e^{-j2\pi \frac{m}{N} n}$$

In virtù delle proprietà delle trasformate, risulta

$$Z'(f) = Z(f) * \mathcal{F} \{ \text{rect}_{2NT_c}(t) \} \simeq Z(f) * \delta(f) = Z(f)$$

in cui l'approssimazione è lecita per N elevato.

$$P_e^{OFDM} = P_{e/n} = \frac{2\tilde{N}}{M^{OFDM}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L_n}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b}{2 N_0} \frac{1}{\tilde{N}} \frac{M^{OFDM}}{L_n - 1}} \right\}$$

Nel caso QAM a portante singola, considerando un impulso a coseno rialzato e roll-off $\gamma = \frac{N}{\tilde{N}} - 1$ si determina una occupazione di banda pari a $B = f_s (1 + \gamma)$ che, se eguagliata a quella del caso OFDM, fornisce $f_s = \tilde{N} \Delta = \frac{\tilde{N}}{T_0}$ e quindi $M^{QAM} = \frac{f_b}{f_s} = \frac{M^{OFDM}}{\tilde{N}}$. Pertanto, visto il risultato del § 16.3.1 si ottiene

$$\begin{aligned} P_e^{QAM} &= \frac{2}{M^{QAM}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b}{2 N_0} \frac{M^{QAM}}{L - 1}} \right\} \\ &= \frac{2\tilde{N}}{M^{OFDM}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{L}}\right) \operatorname{erfc} \left\{ \sqrt{\frac{3 E_b}{2 N_0} \frac{1}{\tilde{N}} \frac{M^{OFDM}}{L - 1}} \right\} \end{aligned}$$

che risulta identico a P_e^{OFDM} qualora si noti che $L_n = 2^{M_n} = 2^{\frac{M^{OFDM}}{\tilde{N}}}$ e $L = 2^{M^{QAM}} = 2^{\frac{M^{OFDM}}{\tilde{N}}} = L_n$.

16.12.3 Allocazione ottima della potenza OFDM

Affrontiamo la derivazione della (16.38) fornita a pag. 524 come soluzione al problema di trovare la $\mathcal{P}_R(f)$ che rende massima la quantità

$$C = \int_{f \in I_f} \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{P}_R(f)}{\mathcal{P}_N(f)}\right) df \quad (16.51)$$

con $I_f = \{f : \mathcal{P}_R(f) > 0\}$, nel rispetto dei vincoli

$$\int_{f \in I_f} \mathcal{P}_R(f) df - \mathcal{P}_R = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}_R(f) \geq 0$$

che esprimono rispettivamente la limitazione sulla potenza totale \mathcal{P}_R a disposizione e la necessità che la densità di potenza $\mathcal{P}_R(f)$ del segnale OFDM non sia negativa. Un problema di massimo vincolato siffatto viene tipicamente affrontato con la tecnica dei *moltiplicatori di Lagrange* (vedi 9.6.1) tranne che ora la presenza del vincolo di tipo disuguaglianza $\mathcal{P}_R(f) \geq 0$ comporta alcune considerazioni aggiuntive, note come *condizioni di KARUSH-KUHN-TUCKER*¹⁰⁶, i cui aspetti però non approfondiamo.

Scriviamo dunque la funzione *lagrangiana* (9.43) come

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{P}_R(f), \lambda) &= \int \ln \left(1 + \frac{\mathcal{P}_R(f)}{\mathcal{P}_N(f)}\right) df + \lambda \left(\int \mathcal{P}_R(f) df - \mathcal{P}_R \right) \\ &= \int \left[\ln \left(1 + \frac{\mathcal{P}_R(f)}{\mathcal{P}_N(f)}\right) + \lambda \mathcal{P}_R(f) \right] df - \lambda \mathcal{P}_R \end{aligned}$$

in cui si sono usati i logaritmi naturali anziché in base 2 dato che ciò comporta solamente una variazione di ampiezza e non inficia il procedimento di massimizzazione. Valutiamo

¹⁰⁶Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Condizioni_di_Karush-Kuhn-Tucker

quindi la derivata parziale

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{P}_R(f)} = \int \left[\frac{1}{1 + \frac{\mathcal{P}_R(f)}{\mathcal{P}_N(f)}} \frac{1}{\mathcal{P}_N(f)} + \lambda \right] df = \int \left[\frac{1}{\mathcal{P}_N(f) + \mathcal{P}_R(f)} + \lambda \right] df \quad (16.52)$$

in cui come al § 9.6.2 ci si è avvalsi della proprietà di *derivata sotto il segno di integrale*. Il massimo della capacità C (eq. (16.51)) si ottiene eguagliando (16.52) a zero, ovvero azzerando il termine tra parentesi quadre; per questa via otteniamo

$$\mathcal{P}_R(f) = -\frac{1}{\lambda} - \mathcal{P}_N(f)$$

ma, per rispettare i vincoli, scegliamo un valore $\mu = -\frac{1}{\lambda} > 0$ tale che scrivendo

$$\mathcal{P}_R(f) = \max \{0, \mu - \mathcal{P}_N(f)\} \quad (16.53)$$

si abbia sempre $\mathcal{P}_R(f) \geq 0$ e risulti $\int \mathcal{P}_R(f) df = \mathcal{P}_R$. A questo punto è immediato riconoscere la (16.53) come una notazione alternativa delle (16.38) di pag. 524.

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>