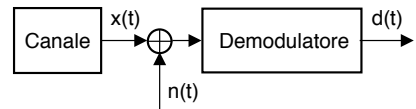


Prestazioni delle trasmissioni modulate

CHIUDIAMO con questo capitolo la parte relativa alla modulazione di segnali analogici, occupandoci di stabilire l'effetto che il rumore $n(t)$ presente all'uscita del canale produce sul risultato del processo di demodulazione $d(t)$.

Dopo aver applicato i risultati del § 11.3 alla caratterizzazione del rumore dopo demodulazione, viene definito un *indice di qualità* del collegamento rispetto al quale confrontare le prestazioni (in termini di *SNR*) per le modulazioni AM e FM, scoprendo come nel secondo caso la qualità possa essere migliorata a spese dell'occupazione di banda. Infine si affronta l'analisi della detezione di sinusoidi nel rumore, specializzando i risultati sulla decisione statistica (§ 6.6.1) al caso dei processi circolari.



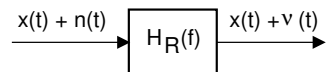
14.1 Il rumore additivo nei segnali modulati

Consideriamo un segnale modulato $x(t)$ ed affetto da un rumore additivo gaussiano bianco a media nulla $n(t)$ (§ 8.4.2) con densità di potenza

$$\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

la cui occupazione spettrale è considerata costante a tutte le frequenze di interesse.

Filtro di ricezione Prima ancora di essere demodulato il segnale ricevuto viene fatto passare attraverso un *filtro di ricezione* passa-banda $H_R(f)$ centrato sulle frequenze del segnale, in modo da limitare la banda del rumore ricevuto e conseguentemente ridurre la potenza del rumore in ingresso al demodulatore. La risposta in frequenza $H_R(f)$ del filtro ha *modulo costante* nella banda del segnale, e tende a zero al di fuori di essa, in modo che il segnale utile $x(t)$ transita inalterato, mentre il rumore $n(t)$ diviene *limitato in banda*, producendo l'uscita $v(t)$.



14.1.1 Rapporto segnale-rumore

La qualità di ricezione (in funzione della frequenza) dipende dalla densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ del segnale modulato e da quella $\mathcal{P}_v(f)$ del rumore filtrato, in base al rapporto

$$SNR_{RF}(f) = \frac{\mathcal{P}_x(f)}{\mathcal{P}_v(f)}$$

in cui $\mathcal{P}_x(f)$ dipende dal tipo di modulazione (cap. 12), mentre per quanto riguarda il rumore, dopo il filtraggio $\mathcal{P}_v(f)$ risulta pari a

$$\mathcal{P}_v(f) = \mathcal{P}_n(f) |H_R(f)|^2 = \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 \quad (14.1)$$

D'altra parte, ha senso valutare l'*SNR complessivo*, ovvero il rapporto tra la potenza di segnale e quella di rumore *totali*: la prima risulta allora pari a

$$\mathcal{P}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_x(f) df$$

mentre per quella di rumore dalla (14.1) si ottiene

$$\mathcal{P}_v = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df$$

valutando cioè la potenza di rumore che attraversa il filtro di ricezione $H_R(f)$.

14.1.2 Banda di rumore

Definiamo questo concetto con l'aiuto della fig. 14.1, dove in alto è rappresentata la densità spettrale del segnale modulato, che occupa una banda¹ B_{RF} . Nel caso fosse possibile adottare come filtro di ricezione un passa banda *ideale* (§ 13.1.2.1) si otterrebbe $\mathcal{P}_v = N_0 B_{RF}$; invece $H_R(f)$ presenta una regione di transizione (vedi fig. 14.1-b) che ne *accresce* la banda ad un valore $B_v > B_{RF}$. La potenza totale del rumore uscente da $H_R(f)$ risulta pertanto pari a

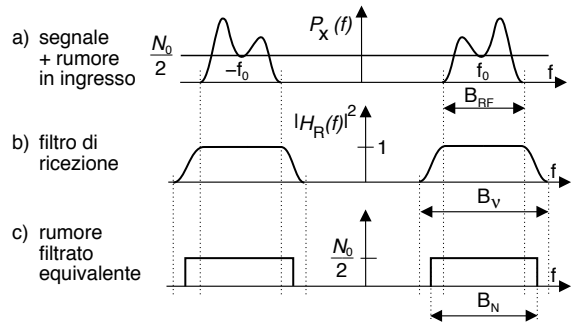


Figura 14.1: Densità spettrale al ricevitore, filtro di ricezione e rumore bianco passa banda equivalente

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_v &= \frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |H_R(f)|^2 df = \\ &= N_0 \int_0^{\infty} |H_R(f)|^2 df = N_0 B_N |H_R(f_0)|^2 \end{aligned}$$

¹Il pedice $_{RF}$ sta per *radio frequency* ed indica l'occupazione di banda a frequenze positive di un segnale modulato.

Il termine $B_{RF} \leq B_N \leq B_v$ rappresenta la cosiddetta *banda di rumore* definita come

$$B_N = \frac{\int_0^\infty |H_R(f)|^2 df}{|H_R(f_0)|^2}$$

ossia come la banda di un filtro ideale *equivalente* che lascia passare la stessa potenza di rumore, come rappresentato in fig. 14.1-c).

Dato che l'effettiva banda B_v del filtro di ricezione dipende da complessità e costo del filtro, e dunque può essere pensata come *negoziabile* in sede progettuale, a volte si procede assumendo $B_N = B_{RF}$ ovvero come nel caso ideale, con l'accortezza che in tal caso i valori di SNR calcolati al § 14.2 saranno pari al *massimo* possibile, a cui *defalcare* successivamente le penalizzazioni legate alla effettiva implementazione.

14.1.3 Demodulazione del processo di rumore

Il rumore $v(t)$ in uscita dal filtro di ricezione $H_R(f)$ è un processo ergodico bianco a media nulla di tipo *passa-banda*, e può quindi essere descritto nei termini delle sue componenti analogiche di bassa frequenza:

$$v(t) = v_c(t) \cos \omega_0 t - v_s(t) \sin \omega_0 t \tag{14.2}$$

Allo scopo di valutare la densità di potenza $\mathcal{P}_{v_c, v_s}(f)$ delle c.a. di b.f. di $v(t)$, facciamo riferimento alla figura 14.2 che a sinistra mostra la densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2}$ del rumore $n(t)$ in ingresso ad un filtro di ricezione $H_R(f)$ ideale e con risposta in frequenza unitaria $|H_R(f_0)|^2 = 1$; pertanto risulta

$$\mathcal{P}_v(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}_{B_N}(f - f_0) + \frac{N_0}{2} \text{rect}_{B_N}(f + f_0)$$

e quindi dato che $\mathcal{P}_v^+(f) = \mathcal{P}_v^-(-f)$ la (11.36) di pag. 358 fornisce

$$\mathcal{P}_{v_c}(f) = \mathcal{P}_{v_s}(f) = \mathcal{P}_v^+(f + f_0) + \mathcal{P}_v^-(f - f_0) = N_0 \text{rect}_{B_N}(f)$$

Come discusso al § 11.4.4.2, $v_c(t)$ e $v_s(t)$ sono due processi congiuntamente gaussiani, ergodici, a media nulla ed incorrelati e pertanto statisticamente indipendenti in quanto gaussiani. Abbiamo inoltre verificato come presentino anche uguale varianza (e

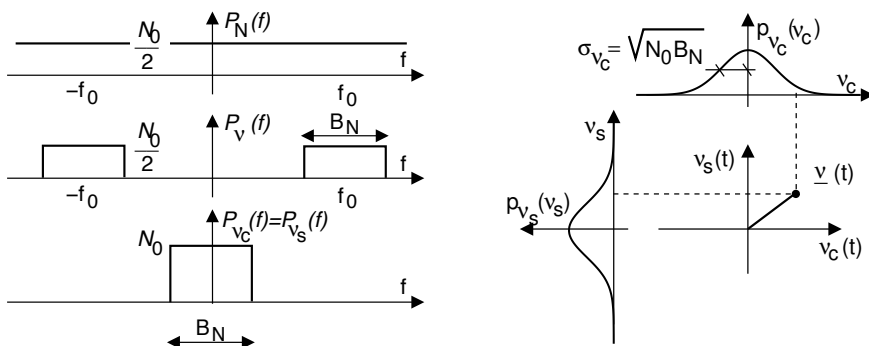


Figura 14.2: Densità spettrale e d.d.p. delle c.a. di b.f. del rumore demodulato

potenza), a sua volta uguale alla potenza del rumore filtrato \mathcal{P}_v , ovvero

$$\sigma_{v_c}^2 = \sigma_{v_s}^2 = \mathcal{P}_v = N_0 B_N$$

Il lato destro di fig. 14.2 rappresenta come nelle condizioni descritte la posizione di $\underline{v}(t)$ nel piano dell'involuppo complesso sia una v.a. bidimensionale a componenti gaussiane indipendenti e con identica d.d.p.; osserviamo inoltre che nel caso in cui la banda di $v(t)$ sia *stretta rispetto a f_0* , l'involuppo complesso $\underline{v}(t) = v_c(t) + jv_s(t)$ evolve *lentamente* rispetto alla velocità di rotazione di $\underline{v}(t) e^{j\omega_0 t}$.

In definitiva quindi, operando una demodulazione coerente in fase ed in quadratura (§ 12.2.3.1) del segnale ricevuto, nelle componenti analogiche risultanti saranno presenti i termini additivi $v_c(t)$ e $v_s(t)$, entrambi di potenza $\mathcal{P}_v = N_0 B_N$.

14.1.4 SNR di sistema

La quantità

$$SNR_0 = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0 \tag{14.3}$$

individua il parametro *di sistema* (o di *riferimento*) rispetto al quale confrontare l'*SNR* ottenuto per i tipi di modulazione discussi al cap. 12. La (14.3) è definita a partire dai valori delle *condizioni operative*, ovvero la potenza ricevuta \mathcal{P}_x , il livello di rumore $N_0/2$, e la massima frequenza W del segnale modulante; viceversa non dipende dai parametri *di trasmissione*, come l'indice di modulazione. In pratica SNR_0 corrisponde all'*SNR in assenza di modulazione*, ovvero ciò che si otterrebbe ricevendo direttamente il segnale di banda base con potenza \mathcal{P}_x in presenza di rumore additivo $\mathcal{P}_N(f) = N_0/2$ attraverso un filtro passa basso con banda $2W$.

Notiamo infine (e questo è valido anche per i casi che seguono) che SNR_0 può riferirsi indifferentemente sia alle potenze di segnale che a quelle disponibili (vedi § 18.1.1.3), in quanto

$$SNR_0 = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} \frac{4R_g}{4R_g} = \frac{W_{d_x}}{W_{d_N}}$$

14.2 Prestazioni delle trasmissioni AM

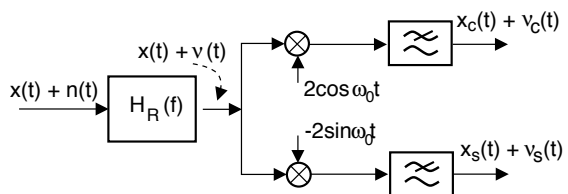
Esprimiamo innanzitutto il segnale modulato nei termini delle sue componenti analogiche

$$x_{AM}(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$$

a cui sommare il rumore *filtrato* $v(t)$ (eq. (14.2)).

All'uscita da un demodulatore coerente in fase e quadratura (§ 12.2.3.1) si osserva quindi un segnale $d(t)$ espresso dalle relative c.a di b.f.

$$\begin{cases} d_c(t) = x_c(t) + v_c(t) \\ d_s(t) = x_s(t) + v_s(t) \end{cases}$$



	$x_c(t)$	\mathcal{P}_x	\mathcal{P}_{x_c}	B_N	\mathcal{P}_{ν_c}	SNR
BLD-PS	$m(t)$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\mathcal{P}_m = 2\mathcal{P}_x$	$2W$	$2WN_0$	$\frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0$
BLU-PS	$\frac{1}{\sqrt{2}}m(t)$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_x$	W	WN_0	SNR_0
BLD-PI	$\sqrt{\eta}(a_p + m(t))$	$\frac{1}{2}\mathcal{P}_m$	$\eta\mathcal{P}_m = 2\eta\mathcal{P}_x$	$2W$	$2WN_0$	$\eta \cdot SNR_0$

Tabella 14.1: Potenza di segnale e di rumore dopo demodulazione AM

mentre tra la potenza del segnale ricevuto $x(t)$ e quella delle sue c.a. di b.f. sussiste² la relazione

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_c} + \frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_s} \quad (14.4)$$

14.2.1 Potenza di segnale e di rumore dopo demodulazione ed SNR

Nel caso di modulazione AM il segnale modulante viene ricavato a partire dalla sola componente in fase $d_c(t) = x_c(t) + \nu_c(t)$, i cui termini identifichiamo come componenti di segnale e di rumore, ottenendo così l'*SNR dopo demodulazione*

$$SNR_d = \frac{\mathcal{P}_{x_c}}{\mathcal{P}_{\nu_c}} \quad (14.5)$$

Il valore della (14.5) per il caso di modulazione BLD-PS, BLU-PS e BLD-PI (cap. 12) è calcolato ai §§ seguenti a partire dall'espressione

$$x_{BLD}(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t = (a_p + m(t)) \cos \omega_0 t$$

a parità di SNR_0 , ossia considerando fissi W (di $m(t)$), N_0 (del rumore) e la \mathcal{P}_x ricevuta, ed i risultati riportati in tab.³ 14.1 assieme alle grandezze che concorrono al calcolo.

La banda di rumore (§ 14.1.2) indicata in tabella è *la minima* possibile, pari a quella del segnale modulato B_{RF} , direttamente legata (nella modulazione AM) a quella ($\pm W$) del segnale modulante. Pertanto i risultati che otteniamo sono *i migliori* possibili, dato che se $B_N > B_{RF}$, l' SNR risulterà peggiore.

14.2.1.1 Modulazione BLD-PS

La prima riga di tab. 14.1 riassume come per $x_{AM}(t) = m(t) \cos \omega_0 t$ si ottenga $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$ ovvero $\mathcal{P}_m = 2\mathcal{P}_x$, e dato che $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_m$, a numeratore della (14.5) possiamo scrivere $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_m = 2\mathcal{P}_x$. Per quanto riguarda il denominatore, nel caso BLD la banda di $x(t)$ è pari a $2W$ ovvero al doppio di quella di $m(t)$, e quindi con una densità

²Infatti i segnali $x_c(t) \cos \omega_0 t$ e $x_s(t) \sin \omega_0 t$ risultano *ortogonali*, e le potenze si sommano. Volendo sviluppare i calcoli, possiamo valutare \mathcal{P}_x come

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= E \{(x_{AM}(t))^2\} = E \{(x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t)^2\} = \\ &= E \{(x_c(t) \cos \omega_0 t)^2\} + E \{(x_s(t) \sin \omega_0 t)^2\} - 2E \{x_c(t) x_s(t) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t\} \end{aligned}$$

Possiamo ora aggiungere ad entrambe le portanti una fase aleatoria uniforme in modo da renderle anch'esse processi, indipendenti da $x_c(t)$ ed $x_s(t)$. Al § 7.5.3 si è mostrato che il prodotto di processi indipendenti ed a media nulla ha potenza pari al prodotto delle potenze, e dunque i primi due termini sono rispettivamente pari a $\frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_c}$ e $\frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_s}$. Per quanto riguarda il terzo termine, esso rappresenta il valore atteso del prodotto di processi indipendenti ed a media nulla, e dunque è nullo. Infine, sviluppando i calcoli a partire dalle medie temporali anziché di insieme si perviene al medesimo risultato.

³La tabella estende quella al § 12.1.4, rispetto alla quale si considera il termine k_a ora inglobato in $m(t)$.

$\mathcal{P}_{v_c}(f) = N_0$ (vedi fig. 14.2) la potenza di rumore vale $\mathcal{P}_{v_c} = 2WN_0$, e dunque

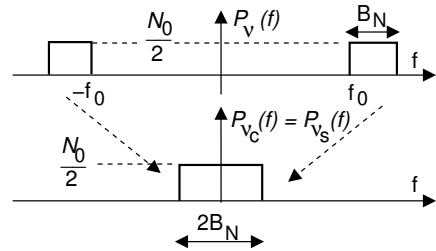
$$SNR_{BLD} = \frac{\mathcal{P}_{x_c}}{\mathcal{P}_{v_c}} = \frac{2\mathcal{P}_x}{2WN_0} = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0$$

ovvero le prestazioni dopo demodulazione sono esattamente pari all' SNR_0 di riferimento definito al § 14.1.4: dunque la modulazione BLD-PS *non altera* il rapporto SNR_0 di banda base, ovvero è come se il processo di modulazione fosse *trasparente*.

14.2.1.2 Modulazione BLU-PS

In questo caso si ha $x_{AM}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}m(t)\cos\omega_0t - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{m}(t)\cos\omega_0t$ (vedi § 12.1.4 e 12.4.5) da cui si può ottenere⁴ $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$ come per il caso BLD-PS, e dato che ora risulta $\mathcal{P}_{x_c} = E\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}m(t)\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$, al numeratore di (14.5) possiamo scrivere $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_x$, la metà del caso precedente.

Per quanto riguarda invece la componente di rumore, alla figura a lato si mostra come anche la densità di potenza $\mathcal{P}_v(f)$ del rumore che attraversa $H_R(f)$ occupa una banda a sua volta dimezzata, e quindi dopo demodulazione la densità di potenza $\mathcal{P}_{v_c}(f)$ occupa una banda $\pm B_N$ come nel caso AM-BLD, ma possiede un valore $N_0/2$ uguale a quello della $\mathcal{P}_v(f)$ in ingresso, e non *doppio* come al § 14.1.3.



Pertanto la potenza \mathcal{P}_{v_c} del rumore demodulato sul ramo in fase (con un filtro $H_R(f)$ ideale ed a banda minima $B_N = W$) è pari a $2W \cdot N_0/2 = WN_0$, permettendo di scrivere

$$SNR_{BLU} = \frac{\mathcal{P}_{x_c}}{\mathcal{P}_{v_c}} = \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = SNR_0$$

e cioè si ottengono prestazioni *identiche* a quelle del caso AM-BLD, ma utilizzando solo *metà* della banda altrimenti necessaria.

14.2.1.3 Modulazione BLD-PI

In questo caso il segnale ricevuto ha espressione

$$x_{PI}(t) = \sqrt{\eta}(a_p + m(t))\cos\omega_0t$$

dove $\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{a_p^2 + \mathcal{P}_m}$ è pari all'*efficienza* della BLD-PI introdotta al § 12.1.1.4, in modo da poter scrivere che la potenza del segnale ricevuto vale⁵ $\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_m$, uguale ai due casi

⁴Riprendendo l'approccio adottato alla nota 2, consideriamo le portanti in fase e quadratura come realizzazioni di un processo armonico con potenza $1/2$, moltiplicate per un processo statisticamente indipendente $m(t)/\sqrt{2}$ con potenza $\mathcal{P}_m/2$. La potenza di ciascuna c.a. di b.f. è il prodotto di queste due, e dunque partendo dalla (14.4)

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_c} + \frac{1}{2}\mathcal{P}_{x_s} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathcal{P}_{x_c} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_m = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_m$$

⁵Infatti, considerando nuovamente la portante in fase come un processo armonico indipendente da $m(t)$ possiamo scrivere $\mathcal{P}_x = \eta(a_p^2 + \mathcal{P}_m) \cdot 1/2 = 1/2 \cdot \mathcal{P}_m$ dato che $E\{(a_p + m(t))^2\} = a_p^2 + \mathcal{P}_m$, in quanto

precedenti.

Per valutare l' SNR_d , a numeratore della (14.5) non consideriamo l'intera potenza \mathcal{P}_{x_c} di $x_c(t) = \sqrt{\eta}(a_p + m(t))$, ma solo quella della sua componente *utile* $u(t) = \sqrt{\eta}m(t)$, che ha potenza $\mathcal{P}_u = \eta\mathcal{P}_m = 2\eta\mathcal{P}_x$, mentre la potenza ηa_p^2 si riferisce invece alla portante non modulata, e non trasporta informazione. Dato che per quanto riguarda il rumore demodolato siamo nella stessa condizione del caso AM-BLD ovvero $\mathcal{P}_{v_c} = 2WN_0$, possiamo scrivere

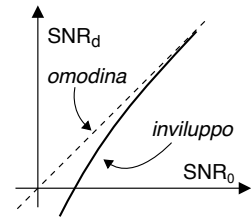
$$SNR_{PI} = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{v_c}} = \frac{2\eta\mathcal{P}_x}{2WN_0} = \eta \frac{\mathcal{P}_x}{WN_0} = \eta \cdot SNR_0$$

e dunque constatiamo che la presenza della portante comporta una riduzione di prestazioni in misura esattamente pari all'efficienza $\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{a_p^2 + \mathcal{P}_m}$.

L'analisi esposta si riferisce però ad una demodulazione IQ coerente, mentre per il caso BLD-PI si usa il demodulatore *di involuppo* (§ 12.2.5), che fornisce come risultato il modulo dell'involuppo complesso ovvero

$$d(t) = |\underline{x}(t) + \underline{v}(t)| = \sqrt{[\sqrt{\eta}(a_p + m(t)) + v_c(t)]^2 + v_s^2(t)}$$

Finché $|v_s(t)|$ è piccolo e trascurabile rispetto ad a_p , ci si ritrova approssimativamente nel caso precedente; al contrario per bassi valori di SNR_0 la potenza utile \mathcal{P}_u diviene una frazione di \mathcal{P}_x ancora più piccola di quanto non sia $\mathcal{P}_u = \eta\mathcal{P}_m = 2\eta\mathcal{P}_x$, dando luogo ad un SNR peggiore del caso di demodulazione in fase e quadratura, come illustrato in figura.



14.3 Prestazioni della modulazione di frequenza

Occupiamoci ora della valutazione dell' SNR dopo demodulazione per il caso di una trasmissione FM (§ 12.3), analizzando come esso dipenda dalle condizioni di ricezione (potenza ricevuta \mathcal{P}_x , densità di potenza del rumore $N_0/2$ e banda del ricevitore B_N) e dai parametri di trasmissione (indice di modulazione β e banda del segnale modulante W). Anticipiamo che la natura *non lineare* della modulazione FM porterà a sviluppi del tutto diversi dal caso dell'AM, infatti troveremo che se la potenza del rumore in ingresso al ricevitore non è eccessiva

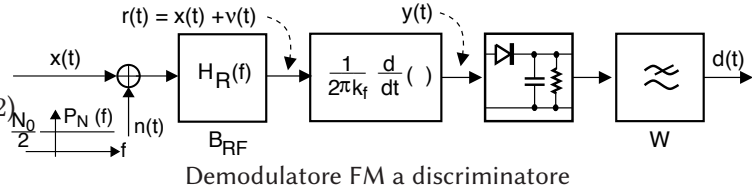
- quando la potenza del segnale ricevuto \mathcal{P}_x *aumenta*, quella del segnale demodolato resta *costante*, mentre invece *diminuisce* quella del rumore dopo demodulazione;
- l' SNR dopo demodulazione *migliora* all'aumentare della banda occupata.

Per arrivare a questi risultati non banali, valutiamo innanzitutto ciò che accade nella ricezione di una portante non modulata, e quindi analizziamo come lo scenario si modifica in presenza di segnale. Infine, illustriamo i motivi che determinano il rapido degrado di prestazioni nel caso di rumore elevato.

$$E\{a_p \cdot m(t)\} = 0 \text{ qualora } m(t) \text{ sia a media nulla.}$$

14.3.1 Rumore dopo demodulazione FM

L'analisi viene svolta considerando un demodulatore a discriminatore (§ 12.3.2.2) alla cui uscita $r(t)$ del filtro di ricezio-



ne è presente una portante *non modulata* $x(t)$ di ampiezza⁶ $A = \sqrt{2\mathcal{P}_x}$, oltre che un rumore gaussiano bianco limitato in banda $v(t)$, ovvero

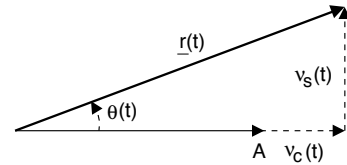
$$r(t) = A \cos \omega_0 t + v_c(t) \cos \omega_0 t - v_s(t) \sin \omega_0 t$$

La banda del filtro $H_R(f)$ (e dunque di $v(t)$) deve essere sufficiente a far passare le frequenze che *sarebbero* presenti se la portante fosse modulata, e che nel caso FM può essere stimata applicando la *regola di Carson* (eq. 12.19), ossia $B_{RF} = B_C \approx 2W(\beta + 1)$.

In presenza di una portante non modulata, le componenti analogiche di bassa frequenza dell'involuppo complesso $\underline{r}(t)$ del segnale ricevuto

$$\underline{r}(t) = r_c(t) + jr_s(t) \quad \text{sono espresse come} \quad \begin{cases} r_c(t) = A + v_c(t) \\ r_s(t) = v_s(t) \end{cases} \quad (14.6)$$

di cui a fianco è rappresentata la costruzione vettoriale: $r_c(t)$ è la somma tra l'ampiezza A della portante ed una v.a. $v_c(t)$ gaussiana a media nulla e deviazione standard $\sigma = \sqrt{N_0 B_N} \geq \sqrt{N_0 B_{RF}}$, mentre $r_s(t)$ consiste in un'altra v.a. $v_s(t)$ della stessa natura di $v_c(t)$ ma ad essa incorrelata⁷.



Ricordando ora che nel caso FM il *segnale informativo* è legato alla *derivata* della fase $\theta(t)$ di $\underline{r}(t)$, esprimiamo $r(t)$ mettendo $\theta(t)$ in evidenza

$$r(t) = \Re \{ \underline{r}(t) e^{j\omega_0 t} \} = \Re \left\{ |\underline{r}(t)| e^{j\theta(t)} e^{j\omega_0 t} \right\} = |\underline{r}(t)| \cos(\omega_0 t + \theta(t))$$

in cui possiamo considerare il termine $|\underline{r}(t)|$ *rimosso* dal limitatore (vedi § 12.3.2.2) che usualmente è anteposto al discriminatore. Il segnale $y(t)$ in uscita dal derivatore è quindi descritto (a parte il segno) come

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} r(t) \Rightarrow \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \cos(\omega_0 t + \theta(t)) = \\ &= \left(\frac{f_0}{k_f} + \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) \right) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \end{aligned}$$

e viene a sua volta elaborato da parte del demodulatore di involuppo come fosse un segnale BLD-PI (§ 12.1.1.2), fornendo in definitiva un segnale *demodulato* dovuto al solo rumore

⁶Con questa posizione, la potenza della portante risulta $\frac{(\sqrt{2\mathcal{P}_x})^2}{2} = \frac{2\mathcal{P}_x}{2} = \mathcal{P}_x$.

⁷Si veda il § 14.4.1 per una analisi più approfondita degli aspetti statistici della questione, che portano a definire $\rho = |\underline{r}(t)|$ una v.a. di RICE.

$$d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) = v_d(t) \quad (14.7)$$

14.3.2 Caso di basso rumore

Con riferimento all'ultima figura, osserviamo che qualora $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2} \gg \sigma_{v_c}^2 = \sigma_{v_s}^2 = N_0 B_N$ i valori di $v_c(t)$ e $v_s(t)$ risultano *piccoli* rispetto ad A , e l'involuppo complesso ricevuto $\underline{r}(t)$ rimane *prossimo* a quello della portante non modulata, dato che in questo caso $\underline{v}(t)$ ha modulo *abbastanza* più piccolo di A . L'angolo $\theta(t)$ che compare nella (14.7) può dunque essere approssimato come

$$\theta(t) = \arctan \frac{v_s(t)}{A + v_c(t)} \simeq \arctan \frac{v_s(t)}{A} \simeq \frac{v_s(t)}{A}$$

la cui densità spettrale di potenza vale

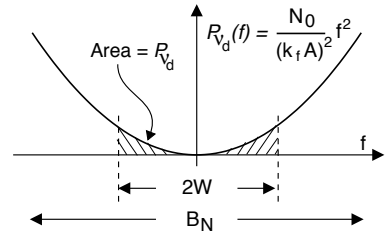
$$\mathcal{P}_\theta(f) = \frac{1}{A^2} \mathcal{P}_{v_s}(f) = \frac{N_0}{A^2} \quad (14.8)$$

in quanto $\mathcal{P}_{v_s}(f) = N_0$ come discusso al § 14.1.3. Ricordiamo ora (vedi § 3.6) che l'operazione di derivata svolta dal discriminatore equivale a moltiplicare lo spettro di ampiezza del segnale in ingresso per $j2\pi f$, ovvero moltiplicare la sua densità di potenza per $(2\pi f)^2$: applichiamo questo risultato per ottenere la densità di potenza di $v_d(t)$ (14.7) a partire dalla (14.8), in modo che la densità di potenza del rumore *demodolato* $v_d(t)$ risulti

$$\mathcal{P}_{v_d}(f) = \frac{1}{(2\pi k_f)^2} (2\pi f)^2 \mathcal{P}_\theta(f) = \left(\frac{f}{k_f}\right)^2 \frac{N_0}{A^2} = \frac{N_0}{(k_f A)^2} f^2$$

e quindi la relativa potenza totale $\mathcal{P}_{v_d} = \sigma_{v_d}^2$ si calcola come

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{v_d} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{v_d}(f) df = 2 \int_0^W \frac{N_0}{(k_f A)^2} f^2 df = \\ &= 2 \frac{N_0}{(k_f A)^2} \cdot \frac{f^3}{3} \Big|_0^W = \frac{2}{3} \frac{N_0}{(k_f A)^2} W^3 \end{aligned} \quad (14.9)$$

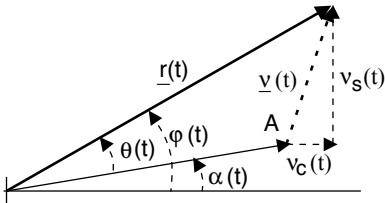


in cui W è la banda del segnale *modulante* (se ci fosse), ed il rumore è limitato in tale banda in virtù del filtro passa basso posto a valle del discriminatore⁸.

Notiamo subito la veridicità della prima affermazione fatta ad inizio sezione: la potenza *complessiva* del rumore dopo demodulazione FM *diminuisce* all'aumentare della potenza del segnale ricevuto $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$. Una seconda osservazione molto importante è che, per effetto della derivata, la densità di potenza del rumore demodolato ha un andamento *parabolico*.

Segnale presente Continuando nell'ipotesi di basso rumore ovvero $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2} \gg \sigma_{v_c}^2 = \sigma_{v_s}^2 = N_0 B_N$, possiamo osservare che (vedi fig. a lato) la presenza di una fase

⁸Si noti che le potenze $\sigma_{v_c}^2$ e $\sigma_{v_s}^2$ delle c.a. di b.f. del rumore in ingresso al discriminatore sono invece relative alla banda B_N , \geq di quella B_{RF} del segnale *modulato*.



modulante $\alpha(t)$ nel segnale

$$x_{FM}(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha(t))$$

comporta che la fase $\varphi(t)$ dell'involuppo complesso del segnale ricevuto $r(t)$ è costituita dalla somma tra $\alpha(t)$ e l'angolo $\theta(t)$ dovuto al rumore sovrapposto alla portante di ampiezza A , cioè $\varphi(t) = \alpha(t) + \theta(t)$. Pertanto l'uscita (14.7) del discriminatore diviene

$$d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \alpha(t) + \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \theta(t) = s_d(t) + v_d(t)$$

ed il rapporto tra le potenze dei due termini definisce l'SNR dopo demodulazione come $SNR_d = \frac{\mathcal{P}_{s_d}}{\mathcal{P}_{v_d}}$, dove quindi \mathcal{P}_{s_d} è la potenza di segnale utile demodulato $s_d(t) = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \alpha(t)$, e \mathcal{P}_{v_d} è la potenza del rumore demodulato calcolata alla (??).

Ricordando (§ 11.2.2) che $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$, per la potenza di $s_d(t)$ si ottiene⁹ $\mathcal{P}_{s_d} = \mathcal{P}_m = \int_{-W}^W \mathcal{P}_m(f) df$, e quindi

$$SNR_d = \frac{\mathcal{P}_{s_d}}{\mathcal{P}_{v_d}} = \frac{\mathcal{P}_m}{\frac{2}{3} \frac{N_0}{(k_f A)^2} W^3} = 3 \frac{\mathcal{P}_m k_f^2}{W^2 N_0 W} \frac{A^2}{2} = 3 \frac{\sigma_{f_d}^2}{W^2} \frac{\mathcal{P}_x}{N_0 W} = 3\beta^2 SNR_0$$

avendo sostituito $\mathcal{P}_m k_f^2$ con $\sigma_{f_d}^2$ (vedi sotto), $\frac{A^2}{2}$ con la potenza della portante ricevuta \mathcal{P}_x , $\frac{\sigma_{f_d}^2}{W}$ con l'indice di modulazione β (§ 12.3.3.4), e $\frac{\mathcal{P}_x}{N_0 W}$ con l'SNR di sistema SNR_0 (§ 14.1.4). Il risultato ottenuto conferma la seconda affermazione di inizio sezione: si ha un *miglioramento* rispetto all' SNR_0 (e dunque rispetto all'AM) *tanto maggiore* quanto maggiore è la *banda occupata* dal segnale modulato $B_{RF} \simeq 2W(\beta + 1)$ (eq. (12.19) a pag. 385), ovvero quanto più è grande l'indice di modulazione β .

Discussione dei passaggi Per mostrare che $\mathcal{P}_m k_f^2 = \sigma_{f_d}^2$, indichiamo con $f_d(t) = f_i(t) - f_0$ la *deviazione* della frequenza istantanea $f_i(t)$ (§ 12.3) rispetto a quella della portante f_0 . Ricordiamo quindi che $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t)$ in cui $\psi(t)$ è la fase istantanea $\psi(t) = 2\pi f_0 t + \alpha(t)$, e dato che per l'FM $\alpha(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau$ si ottiene

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right) - f_0 = f_0 + k_f m(t) - f_0 = k_f m(t)$$

Pertanto si ha $\sigma_{f_d}^2 = k_f^2 \sigma_m^2 = k_f^2 \mathcal{P}_m$ se $m(t)$ è a media nulla: praticamente, σ_{f_d} rappresenta la *deviazione standard della frequenza istantanea*, e per questo è una grandezza proporzionale alla larghezza di banda del segnale modulato¹⁰. D'altra parte, questo risultato è un aspetto della conversione AM-FM che avviene per alto indice di modulazione, come

⁹Dato che gli operatori di derivata ed integrale si annullano, ovvero $\mathcal{P}_{s_d} = Pot \left\{ \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} \alpha(t) \right\} = Pot \left\{ \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d}{dt} 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right\} = Pot \{m(t)\} = \mathcal{P}_m$. In definitiva, abbiamo semplicemente demodulato!

¹⁰Infatti, il rapporto $\frac{\sigma_{f_d}}{W}$ definito al § 12.3.3.4 come indice di modulazione β_p , rappresenta appunto una misura del rapporto tra l'occupazione di banda *efficace* del segnale modulato, e la massima frequenza W presente nel segnale modulante.

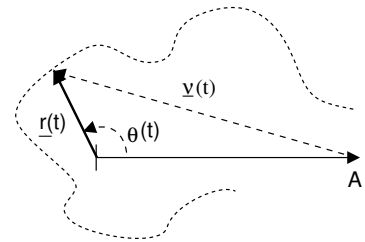
descritto al § 12.3.3.3.

Discussione del risultato Notiamo innanzitutto che se $\beta < \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$ il valore di $SNR = 3\beta^2 SNR_0$ non aumenta affatto, anzi le prestazioni peggiorano. Ma con bassi indici di modulazione abbiamo già visto (§ 12.3.3.1) che l'FM ha un comportamento che può avvicinarsi a quello lineare dell'AM, e dunque ci possiamo *non-sorprendere*. D'altra parte, SNR può migliorare (e di molto) con $\beta > \frac{1}{\sqrt{3}}$: se ad esempio $\beta = 5$ si ottiene $3\beta^2 = 75$ volte meglio, ovvero 17,75 dB di miglioramento! In compenso, la regola di Carson ci dice che la banda occupata aumenta di circa $2(\beta + 1) = 12$ volte quella di banda base... dunque il miglioramento di SNR^{11} avviene a *spese dell'occupazione di banda*, e pertanto costituisce una manifestazione del *compromesso banda-potenza*, vedi pagg. 457 e 561.

Verrebbe ora quasi il desiderio di aumentare indefinitamente β (nei limiti della banda disponibile) per migliorare a piacere l' SNR . Peccato non sia possibile, dato che ad un certo punto l'analisi effettuata *perde validità*: infatti, aumentando β anche la banda di rumore del ricevitore deve crescere, essendo aumentata la banda del segnale modulato. Pertanto le condizioni $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2} \gg \sigma_{v_c}^2 = \sigma_{v_s}^2 = N_0 B_N$ non sono più verificate, con le conseguenze illustrate di seguito.

14.3.3 Caso di elevato rumore

Qualora il valore efficace del rumore in ingresso al discriminatore sia confrontabile con quello del segnale utile ricevuto si verifica un *effetto soglia*, ed all'aumentare del rumore l' SNR degrada molto rapidamente. Per indagarne le cause facciamo riferimento allo schema a lato, che mostra l'involuppo complesso della portante non modulata A , del rumore in ingresso $\underline{v}(t)$, e del segnale ricevuto $\underline{r}(t)$, notando che se i valori efficaci dei primi due sono comparabili, può verificarsi il caso che $\underline{r}(t)$ ruoti attorno all'origine. Quando ciò si verifica, a valle del derivatore che è presente nel discriminatore si determina un *click*, ovvero un segnale impulsivo di area pari a 2π , come illustrato alla figura 14.3-a. Questo fatto è facilmente verificabile, ascoltando una radio FM broadcast, che in condizioni di cattiva ricezione manifesta la comparsa di un rumore, appunto, impulsivo.



All'aumentare della potenza di rumore, aumenta la frequenza con la quale $\underline{r}(t)$ "aggira" l'origine, e pertanto aumenta la frequenza dei *click*, che tendono a produrre un crepitio indistinto. Si è trovato che questo effetto si manifesta a partire da un SNR_0 di sistema inferiore¹² a 10-25 dB, e per valori SNR_0 minori di tale valore l'effetto aumenta molto rapidamente, cosicché si parla di *effetto soglia*. Le curve di 14.3-b riportano un

¹¹Miglioramento che può essere sfruttato quando ad esempio il collegamento è di tipo *punto-punto*, come nel caso di un ponte radio con antenne direttive od una comunicazione satellitare, in modo da contenere la potenza irradiata entro il *cono di emissione* e non invadere lo spettro radio riservato ad altre trasmissioni.

¹²L'effetto soglia interviene *prima* per i valori di β più elevati, vedi fig. 14.3-b.

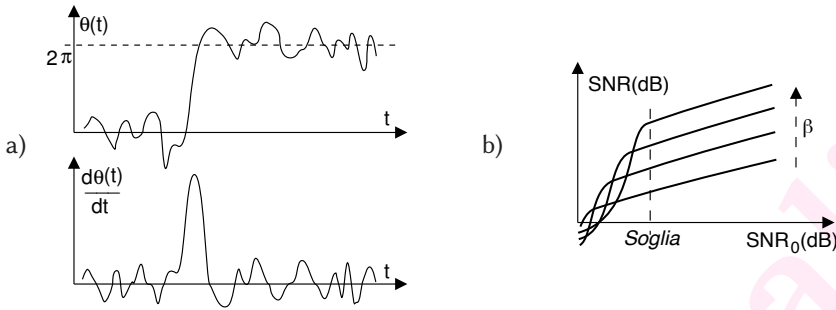


Figura 14.3: a) - Rumore impulsivo dopo demodulazione FM; b) - effetto soglia

tipico andamento dell' SNR dopo demodulazione, con l'indice β che svolge il ruolo di parametro, e possiamo osservare come con un SNR_0 inferiore alla soglia le prestazioni degradino rapidamente. Si è trovato che demodulando con un PLL, anziché con un discriminatore, il valore di soglia si riduce di circa 3 dB.

Nella pratica comune il segnale di rumore può essere costituito da una *interferenza* dovuta ad una emittente adiacente (ossia con una portante prossima a quella della emittente sintonizzata) che *sovramodula*, ovvero adotta un indice di modulazione troppo elevato, ed invade la banda delle emittenti contigue.

Esercizio Sia dato un trasmettitore FM con potenza trasmessa 1 Watt e segnale modulante $m(t)$ con banda $\pm W = \pm 10$ MHz. Un collegamento con attenuazione disponibile $A_d = 100$ dB lo interfaccia ad un ricevitore con temperatura di sistema $T_{ei} = 2900$ °K. Desiderando un $SNR = 40$ dB, calcolare:

- 1) Il fattore di rumore del ricevitore in dB;
- 2) Il minimo valore dell'indice di modulazione e la banda occupata a radiofrequenza B_{RF} ;
- 3) Se il valore di β trovato in 2) non sia troppo piccolo, e quale sia il suo massimo valore;
- 4) Il nuovo valore β' , volendo dotare il collegamento di un margine pari a 25 dB.

Soluzione 1) Questa domanda va affrontata dopo lo studio del § 18.2, dove è mostrato che $T_{ei} = T_0(F - 1) + T_g = T_0F$ se $T_g = T_0$; assumiamo quest'ipotesi per vera e dunque $F = \frac{T_{ei}}{T_0} = 10$; pertanto $F_{dB} = 10$ dB. Per proseguire l'esercizio con le nozioni fin qui acquisite, esplicitiamo che $\mathcal{P}_n(f) = \frac{N_0}{2} = \frac{1}{2}kT_{ei} = \frac{1}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 2900 \approx 2 \cdot 10^{-20}$ Watt/Hz.

2) Qui è utilizzata la relazione $W_R = W_T G_d$ dal § 19.1, in modo da scrivere $SNR = 3\beta^2 SNR_0 = 3\beta^2 \frac{W_R}{N_0 W} = 3\beta^2 \frac{W_T G_d}{N_0 W}$; il valore numerico di SNR risulta $10^{\frac{SNR_{dB}}{10}} = 10^4$, mentre quello di A_d è $10^{\frac{A_d(dB)}{10}} = 10^{10}$ e quindi $G_d = 1/A_d = 10^{-10}$. Sostituendo i valori, ed invertendo la relazione, si ottiene $\beta_{min} = \sqrt{\frac{SNR \cdot N_0 W}{3 \cdot W_T G_d}} = \sqrt{\frac{10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-20} \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{-10}}} = 3.65$. Applicando la regola di Carson per la banda: $B_{RF} \approx 2W \cdot (\beta + 1) = 2 \cdot 10^7 \cdot 4.65 = 9.3 \cdot 10^7 = 93$ MHz.

3) La validità dei risultati 2) dipende dal verificarsi delle condizioni di basso rumore, ovvero deve risultare $W_R \gg \sigma_{v_c}^2 = \sigma_{v_s}^2 = N_0 B_N = N_0 B_{RF} = 4 \cdot 10^{-20} \cdot 9.3 \cdot 10^7 =$

$3.72 \cdot 10^{-12}$ Watt, ma poiché $W_R = \frac{W_T}{A_d} = \frac{1}{10^{10}} = 10^{-10}$, si ha $\frac{W_R}{\sigma_{v_c}^2} = \frac{10^{-10}}{3.72 \cdot 10^{-12}} = 26$, che soddisfa abbastanza bene l'esigenza di *basso rumore*. Per trovare β_{Max} partiamo dal vincolo che debba risultare $W_R \geq 10 \cdot \sigma_{v_c}^2 = 10 \cdot N_0 \cdot B_{RF} = 10 \cdot N_0 \cdot 2W \cdot (\beta_{Max} + 1)$, da cui otteniamo $\beta_{Max} = \frac{W_R}{10 \cdot N_0 \cdot 2W} - 1 = \frac{10^{-10}}{8 \cdot 10^{-12}} - 1 = 12.5 - 1 = 11.5$, al quale corrisponde una banda $B_{RF} = 2W \cdot (\beta_{Max} + 1) = 2 \cdot 10^7 \cdot 12.5 = 250$ MHz, ed un guadagno di $SNR = 10 \lg_{10} 3\beta_{Max}^2 \approx 26$ dB, mentre con β_{min} nominale si sarebbe ottenuto $10 \lg_{10} (3 \cdot 3.65^2) = 16$ dB.

- 4) Il concetto di margine è introdotto al § 19.1; un margine di 25 dB equivale a far fronte ad una attenuazione supplementare $A'_d = 10^{2.5} = 316$ volte. Proviamo ad ottenere lo stesso SNR con un nuovo valore β' : $SNR = 10^4 = 3\beta'^2 \frac{W_T G_d G'_d}{N_0 W} = 3\beta'^2 \frac{W_T G_d}{N_0 W} \frac{\beta'^2}{\beta^2} G'_d$; dunque deve risultare $\frac{\beta'^2}{\beta^2} G'_d = 1$ e quindi $\beta'^2 = \beta^2 \sqrt{\frac{1}{G'_d}} = 3.65 \sqrt{316} = 3.65 \cdot 17.7 = 64.88$ non ce la facciamo. Infatti, al più (con $\beta = \beta_{Max} = 11.5$) si ha un margine di 10 dB.

14.3.4 Enfasi e de-enfasi

Abbiamo osservato che in presenza di rumore bianco in ingresso, il rumore dopo demodulazione ha un andamento parabolico. Questo comporta che, se il messaggio modulante $m(t)$ avesse una densità spettrale $\mathcal{P}_m(f)$ a sua volta bianca, l' $SNR(f)$ alle frequenze più elevate sarebbe molto peggiore del suo valore per frequenze inferiori. Nella pratica, si possono verificare (ad esempio) i seguenti problemi:

- Nelle trasmissioni FDM-FM (vedi § 11.1.1.2), in cui più canali vengono modulati AM-BLU, multiplati in frequenza, e ri-modulati congiuntamente in FM a basso indice, i canali agli estremi della banda FDM sono più rumorosi;
- nell'*FM broadcast* (vedi § 25.2), il segnale modulante è molto più ricco di energia alle basse frequenze, dunque il problema del rumore elevato in alta frequenza è aggravato dal “basso segnale”.

Il rimedio a tutto ciò consiste nel modificare $m(t)$ mediante un circuito detto *di enfasi*, in quanto il suo ruolo è quello di *enfaticizzare* le frequenze più elevate. In tal modo anche $m(t)$ presenta uno spettro *parabolico* e l' SNR sarà lo stesso a tutte le frequenze! L'alterazione introdotta su $m(t)$ viene quindi rimossa mediante una rete di *de-enfasi* posta in ricezione (praticamente un integratore, ovvero un passa-basso) tale da ripristinare l'originale sagoma spettrale del segnale, rendendo la densità di potenza del rumore costante in frequenza.

Con un po' di riflessione, ci si accorge che l'uso di una coppia enfasi-deenfasi equivale ad effettuare una trasmissione a modulazione di fase (vedi pag. 378). In realtà, la rete di enfasi non è un derivatore perfetto (altrimenti annullerebbe le componenti del segnale a frequenza prossima allo zero), ed esalta le frequenze solo se queste sono maggiori di un valore minimo. Pertanto, si realizza un metodo di modulazione “misto”, FM in bassa frequenza e PM a frequenze (di messaggio) più elevate.

14.4 Detezione di sinusoidi nel rumore

Concludiamo questo capitolo con un argomento diverso dai precedenti: anziché calcolare l' SNR dopo demodulazione, affrontiamo il problema di decidere se nelle vicinanze di una determinata frequenza f_0 sia presente o meno un segnale *a banda stretta*, ad esempio per effettuare una operazione di sintonizzazione automatica. A questo scopo torniamo ad occuparci della demodulazione *incoerente in fase e quadratura* introdotta al § 12.2.4, ora applicata al problema di rilevare la presenza (o meno) di una sinusoidi $s(t)$ immersa nel rumore entro una banda B_N , affrontato mediante il formalismo della *verifica di ipotesi* (§ 6.6.1) basata sul confronto tra il valore di una variabile di osservazione ρ , che rappresenta il modulo dell'involuppo complesso ricevuto, ed una soglia di decisione λ , da posizionare a seconda del criterio adottato. Lo scopo è quello di arrivare ad una espressione per la d.d.p. di ρ a partire dalle uscite del demodulatore in fase e quadratura, secondo lo schema di fig. 14.4. Al § 16.6 verrà adottato uno schema simile, applicato al caso della trasmissione numerica.

14.4.1 Descrizione statistica del modulo dell'involuppo complesso

Negli sviluppi che seguono scegliamo di indicare le uscite in fase e quadratura del demodulatore IQ rispettivamente come $x(t)$ e $y(t)$. Se in ingresso è presente il solo rumore $n(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ corrispondono alle c.a. di b.f. $v_c(t)$ e $v_s(t)$ della sua versione filtrata¹³; se invece in ingresso è presente anche $s(t) = A \cos \omega_0 t$, nell'uscita $x(t)$ del ramo in fase troviamo anche la *componente in fase* di $s(t)$, pari ad A , che diventa dunque il valor medio della v.a. estratta da $x(t)$. La fig. 14.5-a rappresenta la d.d.p. delle v.a. x ed y estratte dai processi $x(t)$ e $y(t)$, mostrando anche le *curve di livello* (vedi § 6.5) della gaussiana bidimensionale risultante.

Consideriamo ora che la sinusoidi $s(t)$, quando presente, può in realtà avere una fase φ qualsiasi, e dunque come discusso al § 13.1.2.3 il piano (x, y) ruota dello stesso angolo φ , causando la traslazione della d.d.p. bidimensionale della stessa quantità, come illustrato in fig. 14.5-b). Dunque la differenza tra quando $s(t)$ è presente o meno consiste nello *scostamento dall'origine* del valor atteso della gaussiana, in qualsiasi direzione, e per questo in ingresso al comparatore di fig. 14.4 viene posta la grandezza $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, che è a sua volta una v.a., ed il cui valore viene rapportato alla soglia λ .

Allo scopo di valutare la d.d.p. della v.a. ρ ovvero del modulo dell'involuppo

¹³Ovvero (§ 14.1.3) $x(t)$ e $y(t)$ sono processi congiuntamente gaussiani ed incorrelati con media nulla e varianza $\sigma^2 = N_0 B_N$.

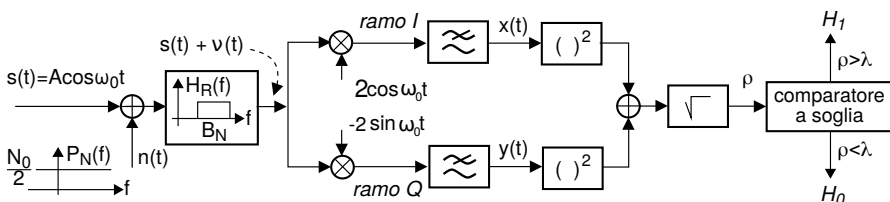


Figura 14.4: Detezione incoerente di sinusoidi immersa nel rumore

complesso demodulato $z = x + jy$ e dunque poter individuare λ secondo il criterio di massima verosimiglianza (§ 6.6.2.1), applichiamo i risultati ottenuti al § 6.4.2 sulle trasformazioni di v.a., in modo da passare dalla rappresentazione cartesiana $z = x + jy$ a quella polare $z = \rho e^{j\varphi}$, come rappresentato in fig. 14.5-c). Definiamo dunque la trasformazione in oggetto, assieme alle rispettive funzioni inverse, come

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (14.10)$$

e mostriamo che, nei due casi di segnale assente o presente, la v.a. ρ assume rispettivamente la d.d.p. di Rayleigh oppure quella di Rice.

Variabile aleatoria di Rayleigh In assenza di segnale, x ed y sono due v.a. gaussiane indipendenti, a media nulla e uguale varianza σ^2 , la cui d.d.p. congiunta si ottiene¹⁴ come prodotto delle d.d.p. marginali, e vale

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (14.11)$$

La $p_{P,\Phi}(\rho, \varphi)$ viene quindi calcolata come prescritto dalla (6.25) di pag. 166, valutando¹⁵ le espressioni per $p_{X,Y}(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$ e $|J(x, y/\rho, \varphi)|$, e ottenendo così

$$p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 < \rho < \infty \\ -\pi < \varphi < \pi \end{cases}$$

Le d.d.p. marginali $p_P(\rho)$ e $p_\Phi(\varphi)$ si ottengono quindi saturando¹⁶ la d.d.p. congiunta rispetto all'altra variabile, ricavando

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{con} \quad \rho \geq 0; \quad p_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{con} \quad -\pi < \varphi \leq \pi \quad (14.12)$$

L'espressione di $p_P(\rho)$ in (14.12) prende nome di d.d.p. di RAYLEIGH, graficata in fig. 14.6, mentre il valor medio

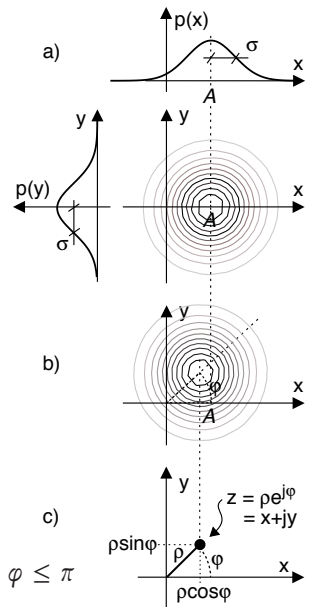


Figura 14.5: v.a. gaussiana bi-dimensionale in coordinate polari

¹⁴Vedi anche il § 6.5.1. Basta moltiplicare: $p_X(x) p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$

¹⁵Il calcolo dei due termini si esegue come

$$p_{X,Y}(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi)) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$|J(x, y/\rho, \varphi)| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \right| = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho$$

¹⁶Svolgiamo il calcolo solo per la prima relazione:

$$p_P(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) d\varphi = \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

e la varianza della v.a. ρ valgono rispettivamente

$$m_P = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad \sigma_P^2 = \sigma^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \tag{14.13}$$

E' inoltre possibile mostrare¹⁷ che per la v.a. di RAYLEIGH vale la proprietà

$$Pr \{ \rho > \lambda \} = \int_{\lambda}^{\infty} p_P(\rho) d\rho = \exp \left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2} \right) \tag{14.14}$$

Il valore (14.14) può rappresentare la probabilità di *manicare un bersaglio* per una distanza superiore a λ , considerando gli errori di puntamento orizzontale e verticale entrambi gaussiani, indipendenti, a media nulla ed uguale varianza.

Variabile aleatoria di Rice Consideriamo ora il caso in cui il tono $s(t)$ sia presente, e senza perdita di generalità assumiamo che abbia fase $\varphi = 0$ in modo che la trasformazione (14.10) possa ancora essere applicata considerando, al posto di x , una v.a. x' , sempre gaussiana con varianza σ^2 , ma ora con media pari ad A , ovvero la componente in fase di $s(t)$. In questo caso il prodotto tra le d.d.p. marginali si scrive come¹⁸

$$p_{X',Y}(x', y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{(x' - A)^2 + y^2}{2\sigma^2} \right) \tag{14.15}$$

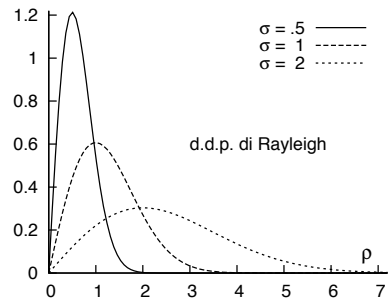


Figura 14.6: Densità di probabilità di Rayleigh

e l'operazione di cambio di variabile porta¹⁹ alla d.d.p. $p_P(\rho)$ detta di RICE, che ha espressione

¹⁷Dato che $\frac{d}{d\rho} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2} \right) = -\frac{\rho}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2} \right)$, si ottiene

$$\int_{\lambda}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = - \int_{\lambda}^{\infty} -\frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} d\rho = - \left[e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \right]_{\lambda}^{\infty} = e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}$$

¹⁸Infatti in questo caso risulta

$$p_{X'}(x) p_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{(x' - A)^2}{2\sigma^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right)$$

¹⁹Sostituendo nell'esponente della (14.15) $x' = \rho \cos \varphi$ e $y = \rho \sin \varphi$, si ottiene

$$(x' - A)^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + A^2 - 2\rho A \cos \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2 + A^2 - 2\rho A \cos \varphi$$

Osservando ora che il giacobiano della trasformazione ha un valore pari a ρ anche in questo caso, otteniamo

$$\begin{aligned} p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) &= p_{X',Y}(x'(\rho, \varphi), y = y(\rho, \varphi)) |J(x', y/\rho, \varphi)| \\ &= \frac{\rho}{2\pi\sigma^2} \exp \left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2} \right) \exp \left(\frac{\rho A \cos \varphi}{\sigma^2} \right) \end{aligned}$$

A questo punto la saturazione della d.d.p. congiunta, operata eseguendo $p_P(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{P,\Phi}(\rho, \varphi) d\varphi$, determina il risultato (14.16).

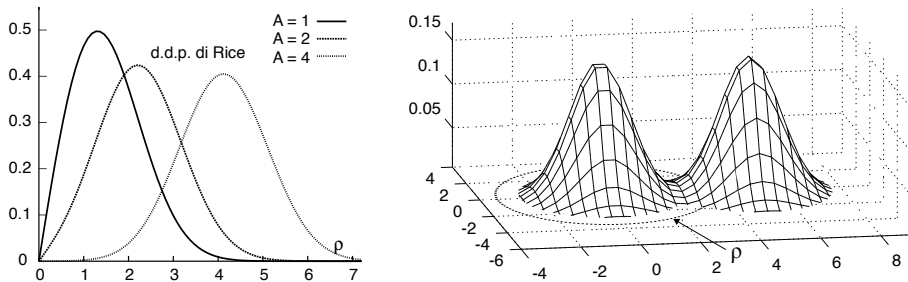


Figura 14.7: Densità di probabilità di RICE con $\sigma = 1$ (a sin) e coppia di gaussiane bidimensionali a varianza unitaria, la prima a media nulla, la seconda centrata in (5,0) (a ds)

$$p_P(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) \text{ per } \rho \geq 0 \quad (14.16)$$

dove $I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi$ è la funzione *modificata* di Bessel del primo tipo ed ordine zero²⁰, la cui espressione non ne permette il calcolo in forma chiusa, ma che può essere approssimata come $I_0(z) \sim e^{\frac{z^2}{4}}$ per $z \ll 1$, e come $I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}$ per $z \gg 1$.

Nella parte sinistra di fig. 14.7 è mostrato l'andamento di $p_P(\rho)$ con $\sigma = 1$ e tre diversi valori di A , in modo da poterlo confrontare con quello della seconda curva per la d.d.p. di Rayleigh alla fig. 14.6, ottenuta per lo stesso valore di σ . Notiamo infine che per $A = 0$ si torna al caso di Rayleigh, mentre per valori crescenti di A l'andamento della d.d.p. di Rice approssima sempre più quello di una gaussiana. Nella parte a destra di fig. 14.7 sono invece raffigurate le gaussiane bidimensionali che danno luogo alle distribuzioni di Rayleigh e di Rice.

14.4.2 Detezione incoerente di sinusoidi nel rumore

Come fatto osservare nella discussione di fig. 14.5, se il segnale $s(t)$ si presenta con una fase $\varphi \neq 0$ ovvero $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, il piano dell'involuppo complesso ruota dello stesso angolo, ed è per questo motivo che abbiamo scelto il *modulo* ρ dell'involuppo complesso come grandezza su cui operare la decisione, di cui abbiamo trovato la d.d.p. per i casi di segnale assente e presente.

Compromesso tra banda di ricerca e probabilità di detezione Prima di procedere osserviamo che qualora la frequenza di $s(t)$ fosse pari a $f = f_0 + \Delta f$, l'involuppo complesso $\underline{z} = x + jy$ *ruoterebbe* con velocità angolare $2\pi\Delta f$, ma il suo modulo ρ resterebbe costante e pari ad A , dando luogo anche in questo caso alla d.d.p. di Rice. Ciò consente l'adozione dello schema di fig. 14.4 per la ricerca di una sinusoidi che cade entro *tutta* la B_N del filtro di ingresso; d'altra parte, all'aumentare di B_N aumenta anche la potenza σ^2 del rumore, causando come vedremo tra breve un peggioramento delle prestazioni del decisore.

²⁰Anche nella figura a pag. 383 si parla di funzioni di Bessel $J_n(x)$, ma queste *modificate* sono in relazione a quelle, come $I_n(x) = j^{-n} J_n(jx)$ - vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Armoniche_cilindriche.

Definizione del problema Analizziamo i risultati fin qui ottenuti nell’ottica della decisione di ipotesi statistica (§ 6.6.1), allo scopo di definire il criterio con cui scegliere la soglia di decisione λ da utilizzare nello schema di fig. 14.4.

Il caso di segnale assente (in cui la v.a. di osservazione ρ ha d.d.p. di Rayleigh) viene quindi indicato come *ipotesi* H_0 , mentre quello in cui $s(t)$ è presente *ipotesi* H_1 (e ρ ha d.d.p. di Rice). In entrambi i casi la dinamica dei valori di ρ è direttamente legata (attraverso le (14.12) e (14.16)) alla potenza di rumore in ingresso $\sigma^2 = N_0 B_N$, pari a quella delle c.a. di b.f. $v_c(t)$ e $v_s(t)$, mentre per quanto riguarda il valor medio di ρ , nell’ipotesi H_0 si ha $m_\rho = \sigma\sqrt{\pi/2}$ (eq. (14.12)), e per H_1 risulta $m_\rho \rightarrow A$ quando $A \gg \sigma$.

Decisione di massima verosimiglianza In figura 14.8 oltre alle d.d.p. condizionate alle ipotesi $p(\rho/H_0)$ e $p(\rho/H_1)$ e calcolate per $\sigma = 1$ ed $A = 4$, viene mostrato anche il valore λ_{ML} ²¹ per cui esse si intersecano ovvero $p(\rho/H_0)|_{\rho=\lambda_{ML}} = p(\rho/H_1)|_{\rho=\lambda_{ML}}$, e la regola di decisione $\frac{p(\rho/H_1)}{p(\rho/H_0)} \frac{H_1}{H_0} \geq 1$ che ne consegue corrisponde al criterio di massima verosimiglianza (§ 6.6.2.1), attuato nella forma $\frac{\rho}{\lambda_{ML}} \frac{H_1}{H_0} \geq 1$ ovvero $\rho \geq \lambda_{ML}$.

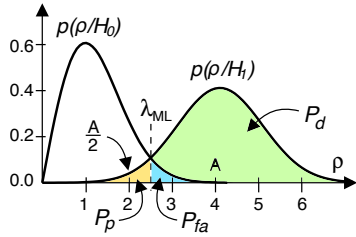


Figura 14.8: Posizione della soglia per il decisore di massima verosimiglianza

Probabilità di errore A seguito della decisione si possono verificare i due tipi di evento di errore

- *falso allarme* con probabilità $Pr(e/H_0) = \int_{\lambda}^{\infty} p(\rho/H_0) d\rho = P_{fa}$
- *perdita* con probabilità $Pr(e/H_1) = \int_0^{\lambda} p(\rho/H_1) d\rho = P_p$

rispettivamente pari alle aree colorate in celeste e giallo di fig. 14.8. Osserviamo quindi che la scelta $\lambda = \lambda_{ML}$ risulta *ottima* qualora non sussistano costi per i due tipi errori P_{fa} e P_p (vedi sotto), e le probabilità *a priori* di H_0 ed H_1 siano uguali. Infatti in tal caso la probabilità di errore complessiva

$$P_e = Pr(H_0) Pr(e/H_0) + Pr(H_1) Pr(e/H_1) = \frac{1}{2}P_{fa} + \frac{1}{2}P_p \quad (14.17)$$

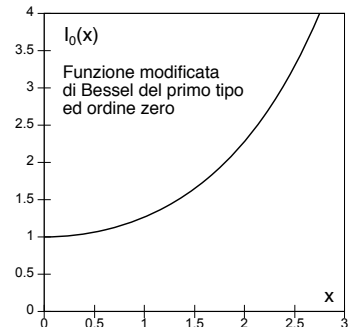
risulta *minima*, dato che spostando λ a destra o sinistra rispetto a λ_{ML} , una delle due aree aumenta più di quanto non diminuisca l’altra.

Calcolo della soglia Tutto bello, ma volendo ottenere il valore di λ_{ML} , come si fa? La condizione che per $\rho = \lambda_{ML}$ risulti $p(\rho/H_0) = p(\rho/H_1)$ comporta l’uguaglianza tra le d.d.p. di Rayleigh (14.12) e di Rice (14.16), ovvero

$$\frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right)$$

da cui con alcuni passaggi si ottiene

$$\exp\left(\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) = I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right)$$



²¹Il valore di λ_{ML} va calcolato per via numerica una volta noti σ ed A .

Una volta noti i valori di A e σ il primo membro è un numero, e dunque per via numerica si trova il valore di $\lambda_{ML} = \rho$ che rende il secondo membro pari al primo.

Decisione Bayesiana Qualora si conoscano i valori di $Pr(H_0)$ e $Pr(H_1)$ e questi siano diversi da $1/2$, ponendo $\lambda = \lambda_{ML}$ la (14.17) non è più minimizzata. In tal caso la soglia ottima viene invece stabilita secondo il criterio di *massima probabilità a posteriori* o MAP, vedi § 17.1.2, ovvero scegliendo l'ipotesi H_i la cui probabilità a posteriori $p(H_i/\rho)$ è massima. Applicando il teorema di Bayes (§ 6.1.4) si ottiene $p(H_i/\rho) = \frac{p(\rho/H_i)Pr(H_i)}{p(\rho)}$ e dunque la regola di decisione diviene

$$\frac{p(H_1/\rho)}{p(H_0/\rho)} = \frac{p(\rho/H_1)Pr(H_1)}{p(\rho/H_0)Pr(H_0)} \frac{H_1}{H_0} \geq 1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{p(\rho/H_1)}{p(\rho/H_0)} \frac{H_1}{H_0} \geq \frac{Pr(H_0)}{Pr(H_1)} \quad (14.18)$$

che nel caso di ipotesi equiprobabili $Pr(H_0) = Pr(H_1)$ degenera nel criterio di ML.

Costo delle decisioni Allarghiamo ora il campo di applicazione della decisione statistica a situazioni in cui può essere associato un differente *costo* ai due tipi di errore, così come si può associare un *guadagno* all'evento di decisione corretta (o *detezione*) la cui probabilità $P_d = \int_{\lambda}^{\infty} p(\rho/H_1) d\rho$ è misurata dall'area *verde* in fig. 14.8. Ad esempio, nell'ambito del *televideo* si tenta di massimizzare la probabilità di detezione a spese di quella di falso allarme²², mentre in *campo medico* si tende a preferire un falso allarme, piuttosto che trascurare l'importanza di un sintomo o referto. In questi casi nella 14.18 compare un altro termine²³ che tiene conto dei costi associati alla decisione, in modo da preferire uno dei due tipi di errore rispetto all'altro.

Criterio di Neyman-Pearson In alcuni casi la probabilità a priori $Pr(H_1)$ che il segnale sia presente non è nota in quanto l'evento è di natura *sporadica*, e noi lì, in attesa che si verifichi. Un possibile approccio è allora quello di fissare la P_{fa} massima tollerata, e quindi tentare di massimizzare la prob. di detezione P_d , come avviene adottando il criterio di *Neyman-Pearson*²⁴, sulla cui descrizione non ci addentriamo.

Decisore per SNR elevato Torniamo ad investigare sulla applicazione del criterio di massima verosimiglianza, la cui soglia di decisione λ_{ML} può essere fissata una volta nota l'ampiezza A della sinusoidi e la deviazione standard σ del rumore; a volte però tali grandezze non sono note, se non *a grandi linee!*

In particolare, qualora sia noto solamente che $A/\sigma \gg 1$ e dunque in presenza di una ampiezza $A \gtrsim 10\sigma$ ben maggiore della dinamica del rumore²⁵, notiamo che all'aumentare di $\frac{A}{\sigma}$ le curve di fig. 14.8 si allontanano ma non cambiano larghezza, ed il valore di λ_{ML} si avvicina (da destra) ad $\frac{A}{2}$. Ponendo quindi $\lambda = \frac{A}{2}$ e sostituendo le espressioni di Rayleigh (14.12) e di Rice (14.16) per le d.d.p. condizionate in quella

²²A meno che decidere per H_1 non possa provocare *danni collaterali* documentabili dai media.

²³Vedi ad es. http://webuser.unicas.it/tortorella/TTII/PDF2003/decisione_bayes.pdf

²⁴Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Neyman-Pearson_lemma

²⁵Un modo di ricondursi a questo caso è quello di diminuire la banda del filtro di ingresso, riducendo così $\sigma^2 = N_0 B_N$. In questo modo però, come osservato a pag. 14.4.2, si riduce l'intervallo di frequenza Δf che può essere analizzato.

(14.17) della P_e , otteniamo

$$P_e = \frac{1}{2} \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) d\rho + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{A}{2}} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) d\rho \quad (14.19)$$

Per ciò che riguarda il primo termine, applicando il risultato (14.14) si trova il valore

$$\int_{\frac{A}{2}}^{\infty} \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) d\rho = \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right)$$

Per il secondo termine, osserviamo che il suo valore è ben più piccolo del primo (si veda la figura 14.8 tracciata per $A = 4$, o le considerazioni riportate al § 14.5.1), e quindi può essere trascurato, fornendo in definitiva

$$P_e \simeq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right) \quad (14.20)$$

per $\frac{A}{\sigma} \gg 1$. Ricordando ora che $\frac{A^2}{2}$ rappresenta la potenza della sinusoidale, e che σ^2 è la potenza del rumore, il risultato trovato ha una immediata interpretazione in termini di $SNR = \frac{A^2/2}{\sigma^2}$:

$$P_e \simeq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{SNR}{4}\right) \quad (14.21)$$

14.5 Appendice

14.5.1 Approssimazione della d.d.p. di Rice per SNR elevato

Come già osservato a pag. 425, la funzione modificata di Bessel può essere approssimata come $I_0(\rho A/\sigma^2) \sim \exp(\frac{\rho A}{\sigma^2})/\sqrt{2\pi \frac{\rho A}{\sigma^2}}$ per $\frac{\rho A}{\sigma^2} \gg 1$, e quindi in tal caso la funzione *integranda* che compare al secondo termine di (14.19) diviene

$$\begin{aligned} p_{RICE}(\rho) &\simeq \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2 + A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\rho A}{\sigma^2}\right) = \frac{\rho}{\sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{\rho A}{\sigma^2}} \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi \rho A}} = \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi \sigma^2 A}} \exp\left(-\frac{(\rho - A)^2}{2\sigma^2}\right) < \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\rho - A)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (14.22)$$

in cui l'ultimo passaggio tiene conto che nelle ipotesi poste risulta anche $\frac{A}{\sigma} \gg 1$, permettendo di scrivere $\rho \simeq A + \varepsilon$ con $\varepsilon \ll A$, e dunque $\sqrt{\frac{\rho}{2\pi \sigma^2 A}} \simeq \sqrt{\frac{A + \varepsilon}{2\pi \sigma^2 A}} < \sqrt{\frac{A}{2\pi \sigma^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}$.

Dato che la (14.22) è a tutti gli effetti la d.d.p. di una gaussiana con media A e varianza σ^2 , l'integrale a secondo membro di (14.19) risulta inferiore a

$$\int_{-\infty}^{\frac{A}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(\rho - A)^2}{2\sigma^2}\right) d\rho = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left\{\frac{A/2}{\sqrt{2}\sigma}\right\} \quad (14.23)$$

Considerando di nuovo il verificarsi di $A/\sigma \gg 1$, anche per l'argomento dell'*erfc* risulta $z = \frac{A/2}{\sqrt{2}\sigma} \gg 1$, ed in tal caso vale l'approssimazione²⁶ $\operatorname{erfc}(z) \simeq \frac{1}{z\sqrt{\pi}} e^{-z^2}$. Sostituendo questa in (14.23) e quindi nella (14.19), il secondo membro di (14.19) si approssima

²⁶Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_degli_errori

come

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sigma}{A/2} \cdot \exp\left(-\frac{A^2}{4 \cdot 2 \cdot \sigma^2}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}A} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right)$$

che, essendo per ipotesi $\frac{A}{\sigma} \gg 1$, risulta trascurabile rispetto al primo termine $\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^2}\right)$ della (14.19).

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>