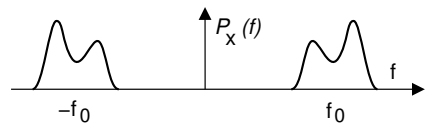


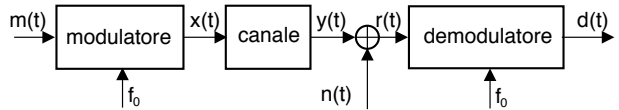
Segnali modulati

INDICATI anche come segnali *passa banda* o in *banda traslata*, dato che occupano una banda circoscritta ad una regione di frequenze contigua ad un valore f_0 , detta *frequenza portante*.



I segnali passa banda sono quasi sempre il risultato di una operazione di *modulazione* (§ 3.5.2) che trasforma un segnale $m(t)$ *modulante* (o di *banda base*) in un secondo segnale $x(t)$ *modulato*, allo scopo di renderlo idoneo alla trasmissione mediante il canale a disposizione, in base alle considerazioni discusse nel seguito.

Il processo inverso viene indicato come *demodulazione*, che se eseguita direttamente su $x(t)$ permette di riottenere $m(t)$; al



contrario, in ingresso al lato ricevente è presente il segnale $r(t) = y(t) + n(t)$, ovvero la somma tra ciò che esce dal canale (che può introdurre una *distorsione*) ed un disturbo additivo o rumore (*noise*), vedi cap. 8; pertanto il segnale *demodulato* $d(t)$ può essere espresso come $d(t) = m(t) + \varepsilon(t)$ in cui il termine $\varepsilon(t) = \text{Dem}\{n(t)\} + \text{Dem}\{y(t) - x(t)\}$ tiene conto sia del risultato della demodulazione del rumore in ingresso, sia dagli effetti prodotti dalla demodulazione sulle alterazioni introdotte dal canale sul segnale modulato.

Il processo di modulazione è quasi sempre associato ad una trasmissione radio, ma può rendersi necessario e/o utile anche per trasmissioni via cavo. In generale, individuiamo almeno tre situazioni in cui è necessario l'impiego di segnali modulati:

- il canale non permette la trasmissione di frequenze contigue all'origine, presenti invece nel segnale;
- il canale presenta un comportamento ideale (modulo costante e fase lineare, vedi cap 8) solo in determinati intervalli di frequenza;
- il canale presenta disturbi additivi (ovvero altre trasmissioni) solo in determinate regioni di frequenza.

11.1 Contesti applicativi e prime definizioni

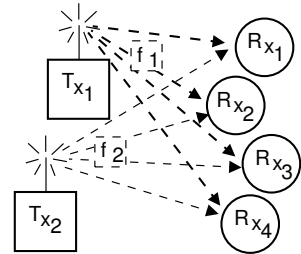
Prima di addentrarci nei dettagli analitici del § 11.2, descriviamo le principali modalità di trasmissione dei segnali modulati, assieme alle relative motivazioni.

11.1.1 Multiplazione a divisione di frequenza

Consiste in una tecnica di trasmissione in cui più comunicazioni avvengono in contemporanea, condividendo lo stesso mezzo fisico, ma impegnando ognuna una diversa banda di frequenze, per il semplice motivo che se utilizzassero tutte la stessa banda, costituirebbero termini di *interferenza* reciproca¹. Molto spesso tutti i segnali multiplati sono di natura simile, ed ognuno è il risultato di una modulazione operata con una diversa frequenza portante. Portiamo ad esempio tre casi tipici.

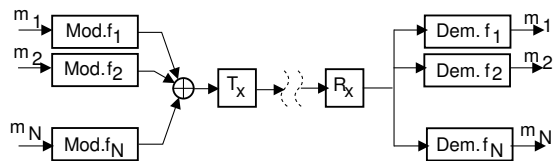
11.1.1.1 Collegamenti punto-multipunto

Si tratta della modalità adottata ad esempio nel caso di trasmissioni televisive o radiofoniche (dette trasmissioni *broadcast*), in cui ogni emittente (in figura indicata come T_x) trasmette a tutti i ricevitori (R_x) sintonizzati sulla propria portante (i cosiddetti *canali* della TV), mentre altre emittenti utilizzano contemporaneamente lo stesso mezzo trasmissivo, occupando canali centrati ad altre frequenze. Nel caso di trasmissione TV analogica (§ 25.1) e di radio FM (§ 25.2) vi è una corrispondenza 1:1 tra frequenza portante ed emittente, mentre ad es. nella TV digitale sulla stessa portante vengono trasmesse (o meglio *multiplate*) più emittenti (§ 10.3.2.1).



11.1.1.2 Collegamenti punto-punto

È una forma di multiplazione FDM (che sta per *frequency division multiplex*) per mezzo della quale un collegamento tra due località distanti viene *condiviso* per il trasporto di più comunicazioni. Un insieme di N segnali m_i , $i = 1, 2, \dots, N$, transita quindi su di uno stesso mezzo trasmissivo, occupando ognuno una differente banda centrata su di una diversa portante f_i , $i = 1, 2, \dots, N$, e può essere individualmente demodulato e separato in ricezione. La trasmissione può avvenire sia mediante un collegamento in cavo, che mediante una trasmissione radio; in questa seconda evenienza, il collegamento è spesso indicato come *ponte radio*.

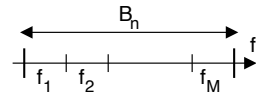
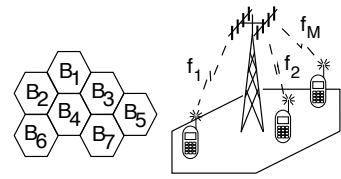


11.1.1.3 Accesso multiplo

È la tipica strategia di *accesso* alla rete (pag. 824) per le *comunicazioni mobili*, ovvero per la telefonia cellulare e le reti WIFI. Nel primo caso il territorio è suddiviso in *celle*, per ognuna delle quali viene utilizzata una diversa banda (B_n) di frequenze

¹Ma non sempre questo impedisce la comunicazione, vedi § 16.9.

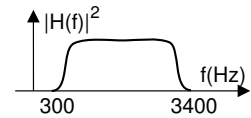
radio, dedicata alla comunicazione tra i terminali ed una unica antenna fissa. All'interno della cella la banda a disposizione è ulteriormente suddivisa tra più canali, ognuno associato ad una diversa portante (f_i), usati a turno dai terminali che desiderano comunicare².



Sotto certi aspetti questo caso è in qualche modo antitetico rispetto al § 11.1.1.1, e potrebbe essere indicato come collegamento *multipunto-punto*. In effetti la situazione è un po' più complessa, e gli aspetti qualificanti da un punto di vista sistemistico sono la sincronizzazione tra radiomobili e stazione base, e i protocolli di rete necessari per consentire le fasi di richiesta di accesso, la negoziazione dei parametri di trasmissione, la localizzazione dei radiomobili, e la corretta gestione del cambio di cella, detto *handover*.

11.1.2 Canale telefonico

Le caratteristiche del collegamento offerto dalla comune linea telefonica (§ 24.9.1) rivestono molteplici aspetti. Uno di questi, forse il principale³, è la limitazione della banda del canale, che rende la trasmissione garantita solo in un intervallo di frequenze comprese tra i 300 ed i 3400 Hz, mentre la banda *nominalmente* occupata è posta pari a 4000 Hz⁴: discutiamo brevemente le origini storiche di tali limitazioni.



L'assenza della regione $-300 \div 300$ Hz è legata alla presenza, all'interno del telefono, di un componente (detto *ibrido*⁵) che di fatto impedisce la trasmissione di frequenze molto basse, assieme alla scelta operata nel *vecchio* metodo di multiploazione FDM punto-punto⁶, per il quale i singoli canali sono modulati AM-BLU (vedi § 12.1.2), che pure impone di rimuovere le componenti frequenziali più basse.

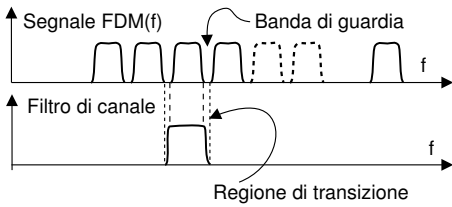
²Un minimo di approfondimento (per il GSM) può essere trovato al § 26.1...

³Un altro fattore rilevante è la *limitazione della potenza* che è possibile immettere su di un singolo collegamento telefonico e che, associato al precedente, caratterizza il canale telefonico come limitato sia in banda che in potenza, e dunque con capacità (§ 17.3) $C = W \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{N_0 W} \right)$ dipendente solo dal livello di rumore. La limitazione in potenza è motivata storicamente da problemi di *diafonia* (pag. 644) dovuti a fenomeni di induzione elettromagnetica, mentre attualmente è determinata dalla limitata dinamica del segnale che viene campionato e trasmesso in forma numerica (§ 4.3.2).

⁴Questo valore massimo nominale determina che la frequenza di campionamento del PCM telefonico è pari a $2 \cdot 4000 = 8000$ campioni al secondo. Utilizzando 8 bit/campione, si ottiene la velocità binaria $f_b = 64000$ campioni/secondo. Velocità inferiori si possono conseguire adottando metodi di codifica di sorgente per il segnale vocale, vedi § 10.1.

⁵L'ibrido telefonico è un trasformatore con quattro porte, che realizza la separazione tra le due vie di comunicazione che viaggiano sullo stesso cavo (vedi § 24.9.1). Nel caso di una linea ISDN, invece, il telefono stesso effettua la conversione numerica, ed i campioni di voce viaggiano nei due sensi (tra utente e centrale) secondo uno schema a divisione di tempo (vedi § 24.9.2).

⁶Nel secolo scorso venne definita una vera e propria *gerarchia* di multiploazione, i cui livelli detti di *gruppo*, *super gruppo*, *gruppo master* e *gruppo jumbo* accolgono rispettivamente 12, 60, 600 e 3600 canali voce, per essere trasmessi su doppino, cavo coassiale, o ponte radio. Un approfondimento presso <https://www.vialattea.net/content/883/> e <https://en.wikipedia.org/wiki/L-carrier>.



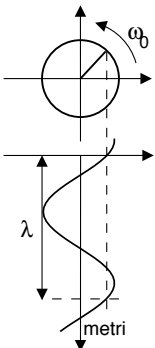
La stessa FDM è anche causa della limitazione per le frequenze da 3400 Hz in poi, dato che è necessario separare i segnali multiplati mediante filtri passa-banda *di canale* che, per essere economicamente realizzabili, devono presentare una regione di transizione di estensione apprezzabile. Tra canali contigui è quindi necessario prevedere un intervallo di frequenze detto *banda di guardia* (pari a 900 Hz), che impone la limitazione a 3400 Hz per la massima frequenza di segnale, in modo da ottenere $300 + (4000 - 3400) = 900$ Hz. In assenza di tale intervallo, all'uscita di un filtro di canale si troverebbe anche parte del segnale presente su di un canale contiguo, producendo interferenza tra comunicazioni diverse.

La limitazione in banda di un canale telefonico tra 300 e 3400 Hz è dunque il motivo per cui la connessione telefonica tra un computer ad un fornitore di connettività Internet *richiedeva* (in tempi pre-ADSL) l'uso di un dispositivo *modem*, che effettua una forma di modulazione sul segnale da trasmettere sul cavo, che arrivava in tale forma fino al provider. Al contrario, nel caso dell'accesso ADSL (vedi § 24.9.4) la connettività numerica inizia direttamente nella centrale del chiamante; d'altra parte, il segnale prodotto dal modem ADSL occupa ora una banda *disgiunta* da quella del canale telefonico, usando tutta la capacità del doppino (§ 19.2.3.1) che è ad uso esclusivo dell'utente.

11.1.3 Antenne e lunghezza d'onda

La trasmissione di un segnale via onda radio necessita di un'antenna di dimensione comparabile alla lunghezza d'onda. Quest'ultima quantità (indicata con λ) è pari allo spazio percorso dall'onda in un tempo pari ad un periodo: dato che *spazio = velocità · tempo*, e considerando che le onde elettromagnetiche si propagano alla velocità della luce ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), si ha

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f}$$

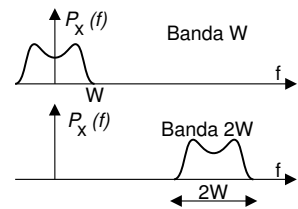


Nel caso di segnali modulati il valore di f è quello della portante f_0 , in quanto il segnale modulato occupa una banda ristretta attorno ad essa; in figura è rappresentato un vettore rotante a velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ la cui proiezione sulle ascisse produce il valore (del campo elettromagnetico) che *viaggia* a velocità c , e che durante un periodo $T = 1/f_0$ percorre λ metri. Trasmissioni con portanti più elevate necessitano di antenne di dimensioni ridotte; d'altra parte se per assurdo trasmettessimo con portante di 300 Hz, occorrerebbe una antenna di dimensioni $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{300} = 10^6$ m = 1000 Km!⁷

⁷ Antenne più corte di λ hanno una efficienza ridotta, ma sono ancora buone. Altrimenti la radio AM (540 - 1600 KHz) avrebbe bisogno di $\frac{3 \cdot 10^8}{1000 \cdot 10^3} = 300$ metri! Al § 20.5.3 è riportata una tabella dei valori di λ per i diversi servizi di TLC.

11.1.4 Banda di segnale

La banda occupata da un segnale è la regione di frequenze al di fuori della quale non vi sono componenti energetiche; la sua misura in Hz è indicata come *larghezza di banda*. Per segnali reali l'occupazione di banda è espressa in termini del solo contenuto a frequenze positive; dato che in tal caso lo spettro di potenza è una funzione pari di f , la banda totale è doppia. Tale definizione è pertanto non ambigua, ed in accordo alla comune accezione di frequenza (positiva); in tal senso la banda di segnale viene a volte indicata come *banda a frequenze positive*.



11.2 Rappresentazione dei segnali modulati

Terminata la parte introduttiva, affrontiamo gli sviluppi analitici basati sulla possibilità di esprimere un segnale modulato $x(t)$ nella forma

$$x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (11.1)$$

in cui, se f_0 è scelta entro la banda occupata dal segnale, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono segnali *limitati in banda* con banda contigua all'origine, e le alterazioni prodotte sul segnale modulato da parte del messaggio modulante $m(t)$ possono essere descritte mediante operazioni condotte su $x_c(t)$ ed $x_s(t)$. Ciò significa che $x(t)$ potrà essere sintetizzato, ed il messaggio recuperato, agendo su segnali con banda molto ridotta rispetto alla massima frequenza di $x(t)$. Iniziamo a mostrare come $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ siano in realtà la parte reale ed immaginaria di un terzo segnale di banda base, chiamato...

11.2.1 Inviluppo complesso

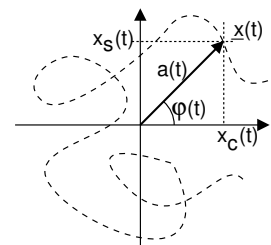
E' definito come un segnale *complesso* legato a $x_c(t)$ e $x_s(t)$ dalla relazione

$$\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t) \quad (11.2)$$

ed è una estensione tempo-variante del concetto di *fasore* (vedi § 2.1.3), che a sua volta consente di rappresentare un segnale del tipo $x(t) = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ⁸ per mezzo del numero complesso $\underline{x} = ae^{j\varphi}$, mediante la relazione $x(t) = \Re \{ \underline{x} e^{j\omega_0 t} \}$. In modo simile, l'*inviluppo complesso* $\underline{x}(t)$ può essere pensato come un fasore per il quale il modulo a e la fase φ sono funzioni del tempo, ovvero

$$\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} \quad (11.3)$$

come rappresentato nella figura a fianco assieme ad una sua possibile traiettoria temporale. Ad $\underline{x}(t)$ possiamo quindi associare un segnale *reale*



$$x(t) = \Re \{ \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \} = \Re \{ a(t) e^{j(\omega_0 t + \varphi(t))} \} = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (11.4)$$

in cui il termine $e^{j\omega_0 t}$ corrisponde ad imprimere ad $\underline{x}(t)$ una rotazione in senso *antiorario*

⁸Per brevità, qui e nel seguito adottiamo a volte la notazione $2\pi f_0 = \omega_0$.

a velocità angolare ω_0 . D'altra parte, sviluppando la rappresentazione polare (11.3) come

$$\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} = a(t) \cos \varphi(t) + ja(t) \sin \varphi(t)$$

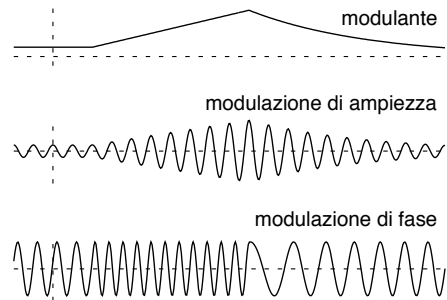
osserviamo che $x_c(t) = \Re \{ \underline{x}(t) \} = a(t) \cos \varphi(t)$ e $x_s(t) = \Im \{ \underline{x}(t) \} = a(t) \sin \varphi(t)$, permettendoci di dimostrare che la (11.4) è equivalente alla (11.1), in quanto⁹

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re \{ \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \} = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) = \\ &= a(t) [\cos \omega_0 t \cos \varphi(t) - \sin \omega_0 t \sin \varphi(t)] \\ &= x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (11.5)$$

11.2.2 Modulazione di ampiezza, di fase e di frequenza

L'involuppo complesso è un potente strumento che permette di descrivere il processo di modulazione in modo semplice ed omogeneo. Ad esempio, la moltiplicazione del segnale $a(t)$ di banda base per un coseno a frequenza (*portante*) f_0 (vedi § 3.5.2) $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t)$ corrisponde a scrivere l'eq. (11.3) come $\underline{x}(t) = a(t)$, ovvero corrisponde ad un involuppo complesso $\underline{x}(t) = a(t)$ a fase nulla, e prende il nome di *modulazione di ampiezza*¹⁰ dato che è appunto l'ampiezza della portante a variare in accordo al segnale $a(t)$. Se al contrario consideriamo un involuppo complesso con modulo costante $\underline{x}(t) = a e^{j\varphi(t)}$ l'andamento della fase $\varphi(t)$ imprime alla portante un diverso tipo di modulazione, detta ora *modulazione di fase*¹¹ o *angolare*, in quanto il segnale modulante ($\varphi(t)$ in questo caso) altera l'argomento del coseno, ottenendo dalla (11.4) il segnale modulato $x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$.

Prima di proseguire riflettiamo sull'esempio mostrato in figura, in cui si considera un segnale modulante $m(t)$ prima costante, poi a rampa lineare, e quindi decrescente. Ponendo $\underline{x}(t) = m(t)$ si ottiene una portante modulata in ampiezza, mentre con $\underline{x}(t) = e^{jm(t)}$ la portante modulata angularmente $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + m(t))$ presenta una ampiezza costante, ed una frequenza che (nell'intervallo in cui $m(t)$ aumenta linearmente) cambia in un valore più elevato, per poi diminuire. In pratica, se $m(t) = \alpha t$, allora l'argomento del coseno diviene $2\pi f_0 t + \alpha t = 2\pi (f_0 + \frac{\alpha}{2\pi}) t$ e dunque la frequenza portante *aumenta* di $\frac{\alpha}{2\pi}$.



Per meglio descrivere il caso di modulazione angolare, indichiamo l'argomento del coseno come *fase istantanea*

$$\psi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi(t)$$

⁹Si faccia uso della relazione $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

¹⁰Indicata anche come AM (*amplitude modulation*).

¹¹Indicata anche come PM (*phase modulation*).

e la sua derivata normalizzata come *frequenza istantanea*

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \psi(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \varphi(t) \quad (11.6)$$

In questi termini, la modulazione angolare viene distinta in *modulazione di fase* propriamente detta quando $m(t)$ si limita ad alterare la fase della portante in modo diretto, ovvero

$$\varphi(t) = k_\varphi m(t)$$

mentre viene detta *modulazione di frequenza* quando la fase dipende dall'integrale di $m(t)$, ovvero

$$\varphi(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \quad (11.7)$$

dato che in questo caso è la frequenza *istantanea* (11.6) a dipendere direttamente dal segnale modulante: $f_i(t) = f_0 + k_f m(t)$.

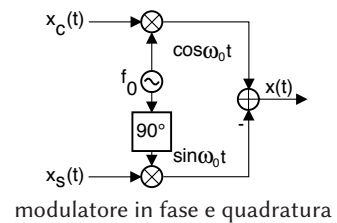
11.2.3 Componenti analogiche di bassa frequenza

Sono anch'esse definite a partire da $a(t)$ e $\varphi(t)$ come

$$x_c(t) = a(t) \cos \varphi(t) \quad \text{e} \quad x_s(t) = a(t) \sin \varphi(t) \quad (11.8)$$

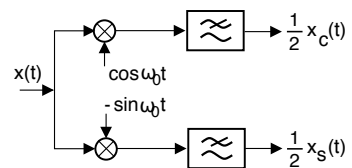
e mentre l'eq. (11.2) le identifica con la parte reale ed immaginaria dell'involuppo complesso $\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$, l'eq. (11.5) permette loro di descrivere completamente un segnale modulato nella forma $x(t) = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t$: quest'ultima espressione motiva la scelta dei pedici c ed s , così come l'appellativo di componente *in fase* (per $x_c(t)$) ed *in quadratura* (per $x_s(t)$) del segnale modulato.

Osserveremo tra breve come, scegliendo per f_0 una frequenza al centro della banda $2W$ del segnale modulato, le componenti analogiche di bassa frequenza $x_c(t)$ e $x_s(t)$ (d'ora in poi *c.a. di b.f.*) risultino essere *limitate in banda*, con banda $2W$ centrata attorno all'origine. D'altra parte, è molto semplice verificare come l'inverso sia vero: il segnale modulato espresso dalla (11.1) può essere infatti ottenuto a partire da $x_c(t)$ e $x_s(t)$ limitate in banda mediante il semplice schema di elaborazione mostrato in figura, detto *modulatore in fase e quadratura*, che rappresenta una via per *sintetizzare* un segnale modulato (in ampiezza, od angolarmente, od entrambe le cose), a partire dalle sue c.a. di b.f., che a loro volta sono ottenibili a partire da $a(t)$ e $\varphi(t)$ in base alle (11.8).



11.2.4 Demodulazione in fase e quadratura

Come il segnale modulato $x(t)$ può essere *sintetizzato* a partire da $x_c(t)$ e $x_s(t)$, così le c.a. di b.f. possono essere recuperate da $x(t)$ adottando lo schema simbolico in figura, in cui il segnale modulato è moltiplicato per due portanti (dette *in fase* ed *in quadratura*), di cui la prima con la medesima frequenza e fase di quella utilizzata dal modu-

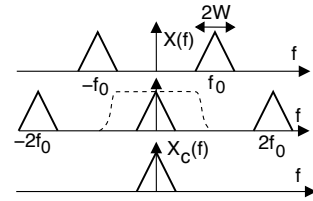


latore¹², ovvero pari a $\cos(2\pi f_0 t)$ e per questo detta *coerente*, *sincrona* od *omodina*, mentre la seconda (in quadratura) ha un *anticipo* di fase pari a $\pi/2$, ovvero è pari a $\cos(2\pi f_0 t + \pi/2) = -\sin(2\pi f_0 t)$. Su entrambi i rami è quindi posto un filtro passa basso¹³.

Il funzionamento del demodulatore è basato sul fatto che, considerando $x(t)$ espresso nei termini delle sue c.a. di b.f., per il ramo in fase si ottiene¹⁴:

$$\begin{aligned} x(t) \cos \omega_0 t &= [x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t] \cos \omega_0 t = \\ &= x_c(t) \cos^2 \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} x_c(t) + \frac{1}{2} x_c(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} x_s(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

I termini in cui compaiono $\cos 2\omega_0 t$ e $\sin 2\omega_0 t$ sono relativi a componenti di segnale centrate attorno a $2f_0$, che il filtro passa basso (la cui $H(f)$ è tratteggiata in figura) provvede ad eliminare: la banda del filtro deve quindi essere maggiore di W ma inferiore a $2f_0 - W$. Pertanto, non è necessario un filtro rettangolare, e se $f_0 \gg W$ non sussistono particolari problemi realizzativi. Procedendo in maniera simile¹⁵, per il ramo in quadratura si ottiene:



$$\begin{aligned} -x(t) \sin \omega_0 t &= -[x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t] \sin \omega_0 t = \\ &= x_s(t) \sin^2 \omega_0 t - x_c(t) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t = \\ &= \frac{1}{2} x_s(t) - \frac{1}{2} x_s(t) \cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2} x_c(t) \sin 2\omega_0 t \end{aligned}$$

ed come prima il filtro passa-basso rimuove le componenti a frequenza doppia.

Se i filtri non sono ideali, ma hanno ad esempio una fase lineare (pag. 125), saranno equivalenti ad un ritardo; se presentano distorsioni più severe (modulo non costante o fase non lineare), allora introducono distorsioni aggiuntive; per ridurre al minimo gli effetti di queste ultime, si tenta almeno di realizzare i due filtri quanto più identici tra loro, vedi § 13.1.1.1.

Ricostruzione del segnale modulante Una volta che $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono note, queste permettono di risalire alla modulazione di ampiezza e di fase come

$$\begin{cases} a(t) = |\underline{x}(t)| = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \varphi(t) = \arg \{ \underline{x}(t) \} = \arctan 2(x_s, x_c) \end{cases} \quad (11.9)$$

in cui si adotta la funzione $\arctan 2(x_s, x_c)$, che al contrario di $\arctan \frac{x_s}{x_c}$ tiene conto del segno¹⁶ di x_c ed x_s , e restituisce un angolo compreso nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ anziché

¹²Le modalità di sincronizzazione della portante utilizzata al ricevitore rispetto a quella usata in trasmissione sono esposte al § 12.2.1.

¹³Il simbolo \approx rappresenta un filtro passa-basso, poiché viene *cancellata* l'ondina superiore. Nello stesso stile, possono essere indicati un passa-alto \approx ed un passa-banda \approx .

¹⁴Si fa uso delle relazioni $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ e $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$

¹⁵Utilizzando stavolta le relazioni $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ e $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, ed eseguendo il prodotto $-\sin \omega_0 t [x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t]$.

¹⁶Vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2>.

$(-\pi/2, \pi/2)$.

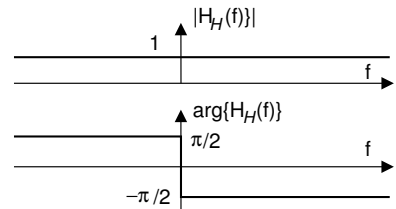
Oltre allo schema circuitale ora discusso esiste anche un approccio analitico che calcola le c.a. di b.f. a partire da $x(t)$ e dalla sua *trasformata di Hilbert* $\hat{x}(t)$. Definendo quindi il *segnale analitico* $x^+(t)$ (§ 11.2.6) associando ad $x(t)$, è infine possibile esprimere la densità di potenza del segnale modulato $\mathcal{P}_x(f)$ nei termini di quella del suo involuppo complesso $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$ (§ 11.2.7). Prendiamo questa strada.

11.2.5 Trasformata di Hilbert

Al contrario di Fourier e di Laplace, quella di *Hilbert* è una trasformata che restituisce nuovamente una funzione del tempo, indicata come

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

ed equivalente al filtraggio di $x(t)$ mediante un *filtro di Hilbert* (§ 11.4.1) la cui risposta in frequenza $H_{\mathcal{H}}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f)$ è graficata in figura, e che causa in $X(f)$ una alterazione della fase pari a $\mp \frac{\pi}{2}$ a seconda se $f \geq 0$.



Anticipiamo subito (vedi § 11.4.2) che la trasformata di Hilbert di un segnale modulato di cui è noto l'involuppo complesso $\underline{x}(t)$ risulta pari a

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \Im\{\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}\} = a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) = \\ &= x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t \end{aligned} \tag{11.10}$$

in cui si tiene conto che $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ e si applicano le (11.8).

Demodulazione delle c.a. di b.f. Affiancando alla (11.10) la relazione (11.1) si imposta il sistema di due equazioni nelle incognite $x_c(t)$ e $x_s(t)$

$$\begin{cases} x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t \\ \hat{x}(t) = x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \tag{11.11}$$

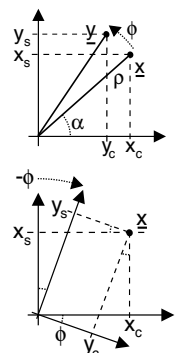
che rappresenta una *rotazione* in senso *orario* del piano dell'involuppo complesso¹⁷ e

¹⁷Mostriamo che una matrice di coefficienti della forma $\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$ individua una rotazione.

Esprimiamo infatti un numero complesso $\underline{x} = x_c + jx_s$ in forma polare $\underline{x} = \rho e^{j\alpha}$, sussistendo l'uguaglianza $x_c = \rho \cos \alpha$ e $x_s = \rho \sin \alpha$; con riferimento alla figura, immaginiamo ora che \underline{x} ruoti in senso *antiorario* di un angolo (*positivo*) ϕ , ottenendo il nuovo numero complesso $\underline{y} = \underline{x} e^{j\phi} = \rho e^{j\alpha+\phi} = y_c + jy_s$, in cui

$$\begin{cases} y_c = \rho \cos(\alpha + \phi) = \rho(\cos \alpha \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi) = x_c \cos \phi - x_s \sin \phi \\ y_s = \rho \sin(\alpha + \phi) = \rho(\sin \alpha \cos \phi + \cos \alpha \sin \phi) = x_c \sin \phi + x_s \cos \phi \end{cases}$$

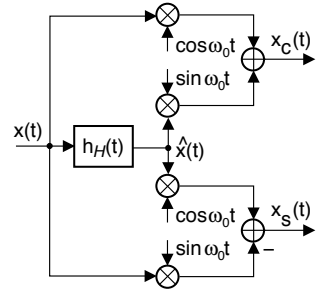
ovvero la matrice dei coefficienti corrisponde a quella preannunciata. Alternativamente, le nuove coordinate y_c, y_s corrispondono a quelle di un vettore fisso, ma riferito ad un sistema di assi ortogonali che ruotano in senso *orario* dello stesso angolo ϕ .



che può essere risolto¹⁸, istante per istante¹⁹, permettendo in definitiva di esprimere le componenti analogiche di bassa frequenza in termini di $x(t)$ e di $\widehat{x}(t)$ come

$$\begin{cases} x_c(t) = x(t) \cos \omega_0 t + \widehat{x}(t) \sin \omega_0 t \\ x_s(t) = -x(t) \sin \omega_0 t + \widehat{x}(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (11.12)$$

Alle (11.12) corrisponde lo schema simbolico mostrato a lato, che illustra come le componenti analogiche di bassa frequenza possano essere ottenute direttamente da $x(t)$ grazie all'uso di un *filtro di Hilbert* $h_H(t)$ (§ 11.4.1) per ottenere $\widehat{x}(t)$, e combinando i due segnali per mezzo di oscillatori in quadratura. Una volta determinate $x_c(t)$ e $x_s(t)$ si può procedere come a pag. 344 per ricavare il segnale modulante espresso da $a(t)$ e $\varphi(t)$.



Ora che abbiamo esaminato due diversi metodi per ottenere le c.a. di b.f., affrontiamo il problema di individuare una relazione tra la densità di potenza dell'involuppo complesso $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$ e quella $\mathcal{P}_x(f)$ del segnale modulato. A tale scopo, occorre prima definire il...

11.2.6 Segnale analitico

Riprendendo l'analogia introdotta al § 11.2.1 tra involuppo complesso $\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$ e fasore $\underline{x} = ae^{j\varphi}$ osserviamo che per entrambi si può risalire al segnale a cui si riferiscono (una portante, modulata o meno) oltre che mediante la relazione $x(t) = \Re \{ \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \}$, anche come

$$x(t) = \frac{1}{2} \left(\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} + \underline{x}^*(t) e^{-j\omega_0 t} \right) \quad (11.13)$$

in cui vi sono due fasori *coniugati* che ruotano l'uno in senso opposto all'altro (vedi eq. (2.5) a pag. 38), in modo che la loro somma *vettoriale* sia pari²⁰ a $\Re \{ \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \}$. Proseguendo con l'analogia, come la scomposizione di un coseno

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} \underline{x} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} \underline{x}^* e^{-j\omega_0 t}$$

secondo la formula di Eulero²¹ dà luogo a due impulsi in frequenza ovvero

¹⁸Verifichiamo che il prodotto tra le matrici dei coefficienti di (11.10) e (11.11) fornisca la matrice identità

$$\begin{pmatrix} \cos & -\sin \\ \sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 + \sin^2 & \cos \sin - \cos \sin \\ -\cos \sin + \cos \sin & \sin^2 + \cos^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹⁹Dato che i coefficienti $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ del sistema (11.11) sono funzione del tempo, le equazioni relative rappresentano una *rotazione oraria* di $\underline{x}(t)$ che "ruota" con velocità angolare ω_0 , ossia con un angolo $\omega_0 t$ che *aumenta linearmente* nel tempo. Pertanto le coppie di segnali $(x_c(t), x_s(t))$ e $(x(t), \widehat{x}(t))$ rappresentano entrambe l'evoluzione dell'involuppo complesso $\underline{x}(t) = a(t) e^{j\varphi(t)}$: mentre i segnali di banda base $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono \Re e \Im di $\underline{x}(t)$, i segnali in banda traslata $x(t)$ e $\widehat{x}(t)$ sono \Re e \Im di $\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t}$, ovvero di $\underline{x}(t)$ *rotante*, vedi le eq. (11.4) e (11.10).

²⁰Ricordiamo che la somma di due numeri complessi coniugati è pari al doppio della loro parte reale.

²¹Poniamo qui $\underline{x} = ae^{j\varphi}$

$$X(f) = \frac{1}{2} \underline{x} \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \underline{x}^* \delta(f + f_0)$$

permettendo di interpretare $\frac{1}{2} \underline{x} e^{j\omega_0 t}$ e $\frac{1}{2} \underline{x}^* e^{-j\omega_0 t}$ nei termini delle componenti a frequenza rispettivamente *positiva* e *negativa* del coseno, così il segnale modulato $x(t) = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$ può considerarsi scomposto nei termini

$$x^+(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \quad \text{e} \quad x^-(t) = \frac{1}{2} \underline{x}^*(t) e^{-j\omega_0 t} \quad (11.14)$$

dove $x^+(t)$ e $x^-(t)$ individuano rispettivamente le componenti a frequenza *positiva* e *negativa* di $x(t)$, l'una coniugata dell'altra ovvero $x^-(t) = (x^+(t))^*$, in modo da poter scrivere

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t) \quad (11.15)$$

Il segnale *complesso* $x^+(t)$ viene indicato come *segnale analitico*²² ed in base alla prima delle (11.14) è privo di componenti a frequenza negativa a patto che $\underline{x}(t)$ sia di banda base e con frequenza massima $|W| < f_0$, vedi la figura a lato. In questa ipotesi la sua trasformata vale quindi

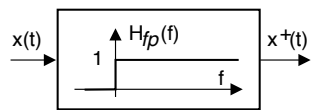
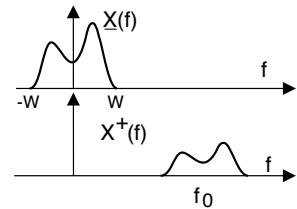
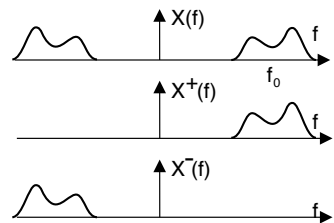
$$X^+(f) = \mathcal{F}\{x^+(t)\} = \frac{1}{2} X(f - f_0)$$

pari a zero al di fuori della semiretta $f > 0$.

Incidentalmente, $x^+(t)$ può anche essere pensato come il risultato dell'attraversamento da parte di $x(t)$ di un filtro *ideale* $H_{fp}(f)$ ²³ con risposta in frequenza a gradino unitario

$$X^+(f) = X(f) H_{fp}(f) \quad (11.16)$$

Relazione tra segnale analitico, modulato, e sua trasformata di Hilbert Similmente a $x(t)$ e $\widehat{x}(t)$, anche il segnale analitico $x^+(t)$ è di tipo *passa banda* (benché privo di componenti a frequenza negativa), e si può mostrare²⁴ che la sua espressione



²²Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Segnale_analitico

²³Il pedice fp sta per *frequenze positive*.

²⁴L'eguaglianza (11.17) si può dimostrare sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza. Partendo dalla prima delle (11.14) si ottiene infatti

$$\begin{aligned} x^+(t) &= \frac{1}{2} \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2} (x_c(t) + jx_s(t)) (\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) = \\ &= \frac{1}{2} [(x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t)] + j(x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} (x(t) + j\widehat{x}(t)) \end{aligned}$$

Nel dominio della frequenza si applica invece la definizione di filtro di Hilbert (in cui lo sfasamento di $\pm \frac{\pi}{2}$ equivale al prodotto di $X(f)$ per $e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j$) alla trasformata di (11.17), ottenendo

$$X^+(f) = \frac{1}{2} (X(f) + j\widehat{X}(f)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \{X(f) + j[-jX(f)]\} = X(f) & \text{con } f > 0 \\ \frac{1}{2} \{X(f) + j[jX(f)]\} = 0 & \text{con } f < 0 \end{cases}$$

nei termini di $x(t)$ e $\widehat{x}(t)$ risulta pari a

$$x^+(t) = \frac{1}{2} (x(t) + j\widehat{x}(t)) \tag{11.17}$$

di cui alla nota²⁵ si mostra l'equivalenza con (11.16). Infine, con simili passaggi, si ottiene anche

$$x^-(t) = \frac{1}{2} (x(t) - j\widehat{x}(t)) \tag{11.18}$$

11.2.7 Densità spettrale di segnali passa-banda

Siamo ora in grado di stabilire il legame tra lo spettro dell'involuppo complesso e quello del segnale modulato. Dalle (11.14) e (11.15) ri-otteniamo la (11.13) ovvero

$$x(t) = x^+(t) + x^-(t) = \frac{1}{2} (\underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} + \underline{x}^*(t) e^{-j\omega_0 t})$$

la cui trasformata di Fourier, tenendo conto della proprietà di traslazione in frequenza, e che $\mathcal{F}\{\underline{x}^*(t)\} = \underline{X}^*(-f)$ (pag. 68), fornisce

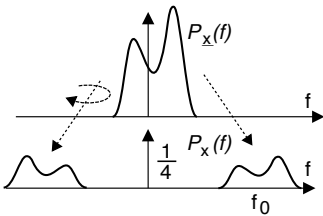
$$X(f) = \frac{1}{2} (\underline{X}(f - f_0) + \underline{X}^*(-f - f_0)) \tag{11.19}$$

a cui corrisponde una densità di energia²⁶

$$\mathcal{E}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{E}_x(f - f_0) + \mathcal{E}_x(-f - f_0))$$

ovvero una densità di potenza²⁷

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{1}{4} (\mathcal{P}_x(f - f_0) + \mathcal{P}_x(-f - f_0)) \tag{11.20}$$



il cui significato è esemplificato alla figura precedente, che raffigura la $\mathcal{P}_x(f)$ traslare di $\pm f_0$, con una copia *ruotata* per le frequenze negative.

Restringendo ora l'attenzione sul legame tra lo spettro del segnale analitico $x^+(t)$ e quello di $\underline{x}(t)$, osserviamo che invertendo la prima delle (11.14) in $\underline{x}(t) = 2x^+(t) e^{-j\omega_0 t}$ ed eseguendone la trasformata di Fourier si ottiene

$$\underline{X}(f) = 2X^+(f + f_0) \tag{11.21}$$

Osserviamo dunque che in linea di principio $\underline{X}(f)$ *non gode* di simmetria rispetto ad $f = 0$, come peraltro prevedibile visto che $\underline{x}(t)$ è in generale complesso. Per

dato che a frequenze negative il prodotto $j \cdot j = -1$ costituisce uno sfasamento di π radianti per tutte le frequenze, provocando l'elisione tra $X(f)$ e $-X(f)$ per tutti i valori $f < 0$.

²⁵Infatti $H_{fp}(f)$ può essere scritta come $H_{fp}(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(f) = \frac{1}{2} (1 + jH_{\mathcal{H}}(f))$ (vedi eq. (11.25)), e dunque $H_{fp}(f) X(f) = \frac{1}{2} (X(f) + j\hat{X}(f))$, da cui la (11.17).

²⁶Scriviamo infatti $\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2 = X(f) X^*(f)$ da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x(f) &= 1/4 (\underline{X}(f - f_0) + \underline{X}^*(-f - f_0)) (\underline{X}^*(f - f_0) + \underline{X}(-f - f_0)) = \\ &= 1/4 (\underline{X}(f - f_0) \underline{X}^*(f - f_0) + \underline{X}^*(-f - f_0) \underline{X}(-f - f_0)) = 1/4 (\mathcal{E}_x(f - f_0) + \mathcal{E}_x(-f - f_0)) \end{aligned}$$

in quanto i prodotti $\underline{X}(f - f_0) \cdot \underline{X}(-f - f_0)$ e $\underline{X}^*(-f - f_0) \cdot \underline{X}^*(f - f_0)$ sono nulli, dato che in entrambi i casi i fattori risiedono in regioni di frequenza disgiunte,

²⁷La (11.20) può essere motivata seguendo le stesse linee guida indicate alla nota 17 a pag. 197.

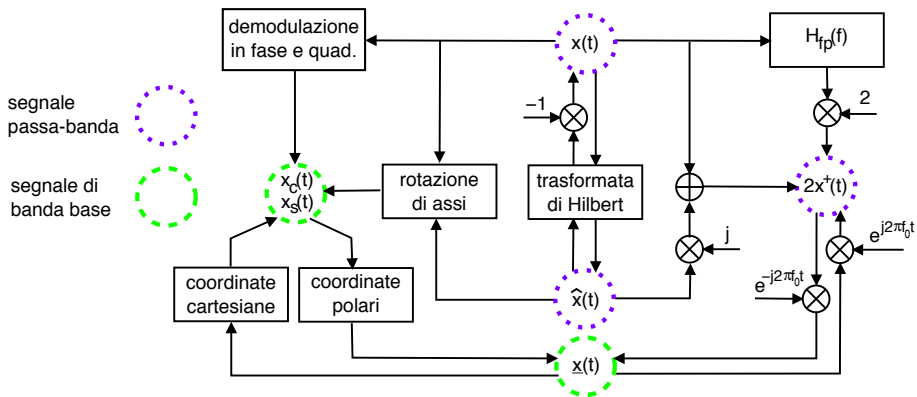


Figura 11.1: Relazioni tra segnale modulato, inviluppo complesso, componenti analogiche e segnale analitico

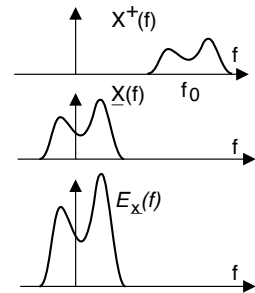
completare il giro, dalla relazione $\mathcal{E}_{\underline{x}}(f) = |\underline{X}(f)|^2$ otteniamo

$$\mathcal{E}_{\underline{x}}(f) = 4 |X^+(f + f_0)|^2 = 4\mathcal{E}_{x^+}(f + f_0)$$

ed un risultato del tutto simile sussiste anche per segnali di potenza, ovvero

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^+}(f + f_0) \quad (11.22)$$

Pertanto, la densità di potenza di $\underline{x}(t)$ si ottiene da quella a frequenze positive di $x(t)$, traslata nell'origine e moltiplicata per 4.



11.2.8 Schema delle trasformazioni

La figura 11.1 riassume le relazioni esistenti tra le grandezze $x(t)$, $\hat{x}(t)$, e $x^+(t)$, di tipo passa banda, ed $\underline{x}(t)$, $x_c(t)$ e $x_s(t)$, di banda base.

Esempio

- Sia dato il segnale $x(t)$ la cui trasformata $X(f)$ è riportata nella parte superiore di fig. 11.2-a). Derivare l'espressione delle sue componenti analogiche di bassa frequenza, espresse nel dominio della frequenza e del tempo.

Notiamo che $|X^+(f)| = \frac{k}{2} \text{rect}_{2B}(f - f_0)$, e dunque

$$|\underline{X}(f)| = 2 |X^+(f + f_0)| = k \text{rect}_{2B}(f)$$

Per la fase si opera una traslazione analogica, ma senza moltiplicare per il fattore 2 che, in quanto fattore, incide solo sul modulo.

Osserviamo ora che $\underline{X}(f)$ ha modulo pari e fase dispari, e dunque la sua antitrasformata è un segnale reale: $\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t) = x_c(t)$, ovvero la componente in quadratura $x_s(t)$ è nulla. Pertanto, risulta²⁸ $\begin{cases} X_c(f) = k \text{rect}_{2B}(f) e^{-j2\pi \frac{A}{2\pi B} f} \\ X_s(f) = 0 \end{cases}$, ed effettuando

²⁸Approfittiamo dell'occasione per notare che, pur potendo scrivere $\underline{X}(f) = X_c(f) + jX_s(f)$, non

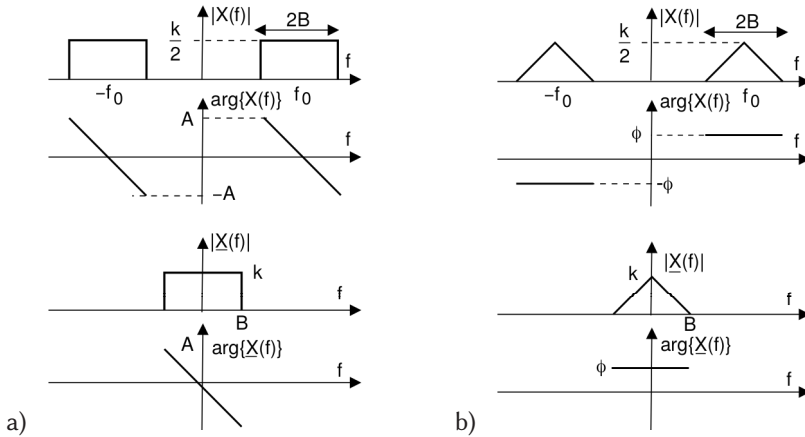


Figura 11.2: Densità spettrali utilizzate negli esempi

l'antitrasformata di $X_c(f)$ si ottiene

$$x_c(t) = 2kB \operatorname{sinc} \left[2B \left(t - \frac{A}{2\pi B} \right) \right]$$

in cui la traslazione nel tempo è dovuta alla fase lineare presente in $\underline{X}(f)$.

- Lo stesso problema precedente, ma applicato al segnale b), la cui trasformata $X(f)$ è mostrata nella parte superiore di Fig. 11.2-b).

Eseguendo di nuovo le operazioni di traslazione si ottiene l'involuppo complesso riportato in basso. Questa volta la fase di $\underline{X}(f)$ non è dispari, e dunque non si verificano le condizioni di simmetria coniugata, quindi $\underline{x}(t)$ è complesso. Si ha: $\underline{x}(t) = kB \left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt} \right)^2 e^{j\phi}$ e dunque

$$\begin{cases} x_c(t) = kB \left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt} \right)^2 \cos \phi \\ x_s(t) = kB \left(\frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt} \right)^2 \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_c(f) = k \left(1 - \frac{|f|}{B} \right) \cos \phi \\ X_s(f) = k \left(1 - \frac{|f|}{B} \right) \sin \phi \end{cases}$$

con $|f| < B$.

11.3 Densità spettrale delle c. analogiche di processi

Quello che ancora manca prima di passare al capitolo successivo è valutare $\mathcal{P}_{x_c}(f)$ e $\mathcal{P}_{x_s}(f)$ nei termini della densità di potenza del processo modulato $\mathcal{P}_x(f)$, estendendo inoltre la trattazione al caso dei processi ergodici. Occorre quindi procedere seguendo le indicazioni del teorema di Wiener, e trasformare le relative funzioni di autocorrelazione $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$ e $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$; una buona dose di calcoli in merito sono svolti al § 11.4.4, arrivando al risultato

$$\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau \tag{11.23}$$

è assolutamente lecito dire che $\Re \{ \underline{X}(f) \} = X_c(f)$ e $\Im \{ \underline{X}(f) \} = X_s(f)$; infatti sia $X_c(f)$ che $X_s(f)$ possono a loro volta essere complessi (mentre $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono necessariamente reali).

Applicando ora alla (11.23) la formula di Eulero per seno e coseno si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) &= \mathcal{R}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau}}{2} + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0\tau} - e^{-j\omega_0\tau}}{2j} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{R}_x(\tau) - j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{j\omega_0\tau} + \frac{1}{2} \left[\mathcal{R}_x(\tau) + j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{-j\omega_0\tau} = \\ &= \mathcal{R}_x^-(\tau) e^{j\omega_0\tau} + \mathcal{R}_x^+(\tau) e^{-j\omega_0\tau} \end{aligned}$$

in cui all'ultimo passaggio si è applicata anche a $\mathcal{R}_x(\tau)$ la definizione di segnale analitico eq. (11.17) e (11.18). Non resta quindi che eseguire la trasformata di Fourier, per ottenere

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^-(f - f_0) + \mathcal{P}_x^+(f + f_0) \quad (11.24)$$

da cui ricaviamo (vedi fig. 11.3) che lo spettro di potenza delle componenti analogiche di un processo si ottiene trasladando nell'origine e sovrapponendo le componenti a frequenze positive e negative dello spettro di densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ del segnale modulato. Come possiamo osservare $\mathcal{P}_{x_c}(f)$ e $\mathcal{P}_{x_s}(f)$ sono entrambe *pari*, in accordo al fatto che $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ sono *reali*.

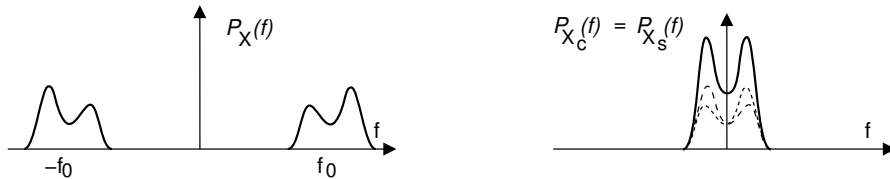


Figura 11.3: Segnale modulato e densità di potenza delle componenti analogiche di b.f.

Rumore bianco passa banda Il risultato mostrato merita un ultimo approfondimento per esaminare il caso in cui il processo $x(t)$ sia di tipo gaussiano, a media nulla, bianco e limitato in banda, ovvero con densità di potenza

$$\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2} [\text{rect}_{2W}(f - f_0) + \text{rect}_{2W}(f + f_0)]$$

In tal caso (sempre al § 11.4.4) si trova²⁹ che $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$ e quindi $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ sono incorrelate e, in quanto gaussiane, statisticamente indipendenti. L'applicazione della (11.24) porta dunque a

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^+(f + f_0) + \mathcal{P}_x^-(f - f_0) = N_0 \text{rect}_{2W}(f)$$

e quindi la potenza (e varianza) di entrambe le c.a. di b.f. è pari a quella del segnale modulato, ovvero

$$\mathcal{P}_{x_c} = \int \mathcal{P}_{x_c}(f) df = \mathcal{P}_{x_s} = 2N_0W = \mathcal{P}_x$$

come rappresentato in fig. 11.4, mentre l'indipendenza statistica tra le c.a. di b.f. comporta che l'involuppo complesso $\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$ ha potenza (e densità di potenza) doppie, ovvero

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 2N_0 \text{rect}_{2W}(f); \quad \mathcal{P}_{\underline{x}} = 2\mathcal{P}_{x_c} = 2\mathcal{P}_{x_s} = 4N_0W$$

²⁹In realtà si ottiene $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$ ogni volta che $\mathcal{P}_x(f)$ ha simmetria *pari* rispetto ad f_0 .

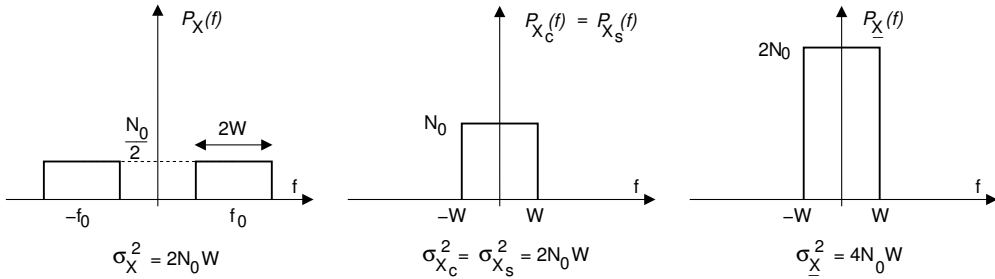


Figura 11.4: Densità di potenza dell’involuppo complesso per un rumore passa-banda

11.4 Appendici

11.4.1 Filtro di Hilbert

Il *filtro di Hilbert* è caratterizzato da una risposta in frequenza descritta analiticamente come

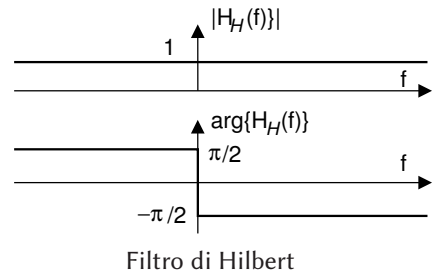
$$H_{\mathcal{H}}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \tag{11.25}$$

ed il cui andamento di modulo e fase può essere rappresentato come nella figura a lato. Ricordando infatti che $\pm j = e^{\pm j \frac{\pi}{2}}$ e che

$$\text{sgn}(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ -1 & f < 0 \end{cases},$$

otteniamo un andamento *costante* del modulo $|H_{\mathcal{H}}(f)| = 1$, ed un gradino discendente per la fase, ossia

$$\angle H_{\mathcal{H}}(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & f > 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$



Il passaggio di un segnale $x(t)$ attraverso il filtro di Hilbert produce un secondo segnale $\widehat{x}(t)$ detto *trasformata di Hilbert* del primo, indicata come $\widehat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$, ed il cui andamento in frequenza ha espressione

$$\widehat{X}(f) = \mathcal{F}\{\widehat{x}(t)\} = H_{\mathcal{H}}(f) X(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) \cdot X(f)$$

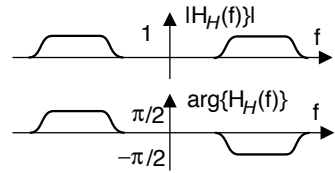
ossia differisce da $X(f)$ per uno sfasamento di $\mp \frac{\pi}{2}$ per frequenze rispettivamente positive o negative. Per la trasformata di Hilbert sussistono le proprietà riportate in nota³⁰.

³⁰Per un approfondimento, vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_transform, di cui accenniamo brevemente solamente alcuni risultati:

- $\mathcal{H}\{x(t) = x_0\} = 0$: una costante ha trasformata di Hilbert nulla, e la trasformata di Hilbert è definita a meno di una costante. Il valore medio di $x(t)$ non si ripercuote su $\widehat{x}(t)$;
- $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = \widehat{\widehat{x}}(t) = -x(t)$: infatti una rotazione di fase pari a π radianti per tutte le frequenze è equivalente ad una inversione di segno;
- $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \widehat{x}(t) dt = 0$: ortogonalità tra un segnale e la sua trasformata di Hilbert;
- $\mathcal{H}\{x(t) * h(t)\} = \widehat{x}(t) * h(t) = x(t) * \widehat{h}(t)$: la trasformata di Hilbert di una convoluzione (cioè dell’uscita di un filtro) è la convoluzione tra un operando trasformato e l’altro no.

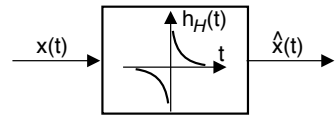
Realizzazione del filtro di Hilbert Sintetizzare un filtro che consegua esattamente la risposta in frequenza descritta dalla (11.25) è un compito pressoché impossibile, a causa della brusca transizione della fase in corrispondenza di $f = 0$.

In realtà, il filtro di Hilbert si usa principalmente per segnali modulati, che non presentano componenti spettrali a frequenze prossime allo zero. Pertanto, lo stesso scopo può essere svolto da un diverso filtro $H_{\mathcal{H}}(f)$, con andamento più dolce della fase, e che presenti gli stessi valori nominali del filtro di Hilbert solamente per le frequenze comprese nella banda di segnale.



Risposta impulsiva del filtro di Hilbert Vogliamo dimostrare ora che l'antitrasformata della (11.25) risulta pari a

$$h_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H_{\mathcal{H}}(f)\} = \frac{1}{\pi t} \quad (11.26)$$



in modo da poter esprimere la trasformata di Hilbert nella forma di un integrale di convoluzione $\hat{x}(t) = \mathcal{H} \{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = x(t) * \frac{1}{\pi t}$. Riutilizzando infatti un risultato trovato al § 3.8.6 siamo già arrivati a mostrare che

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{j}{2\pi f} \right\} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad (11.27)$$

e dato che $H_{\mathcal{H}}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f)$, sembra che ci dovrebbe essere un modo semplice di arrivare a *sistemare le cose*. La (11.27), una volta eliminato il termine $1/2$, permette di scrivere $\mathcal{F} \{ \text{sgn}(t) \} = -\frac{j}{\pi f}$ e dunque

$$\mathcal{F} \{ -j \cdot \text{sgn}(t) \} = -\frac{1}{\pi f} \quad (11.28)$$

Applicando ora alla (11.28) la proprietà di dualità (vedi pag. 65, dove si asserisce che se $G(f) = \mathcal{F} \{g(t)\}$, allora $\mathcal{F} \{G(t)\} = g(-f)$) otteniamo $\mathcal{F} \{ -\frac{1}{\pi t} \} = -j \cdot \text{sgn}(-f) = j \cdot \text{sgn}(f)$, e dunque arriviamo al risultato anticipato

$$\mathcal{F}^{-1} \{H_{\mathcal{H}}(f)\} = \mathcal{F}^{-1} \{ -j \cdot \text{sgn}(f) \} = \frac{1}{\pi t}$$

11.4.2 Trasformata di Hilbert di un segnale modulato

Si intende dimostrare che se $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ sono limitate in banda $\pm W$ con $W < f_0$, allora risulta

$$\begin{cases} \mathcal{H} \{x_c(t) \cos \omega_0 t\} = x_c(t) \sin \omega_0 t \\ \mathcal{H} \{x_s(t) \sin \omega_0 t\} = -x_s(t) \cos \omega_0 t \end{cases} \quad (11.29)$$

e dunque dalla (11.1) si ottiene

$$\hat{x}(t) = \mathcal{H} \{x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t\} = x_c(t) \sin \omega_0 t + x_s(t) \cos \omega_0 t$$

e quindi $\hat{x}(t) = \mathfrak{I} \{ \underline{x}(t) e^{j\omega_0 t} \}$ come espresso dall'eq. (11.10). Limitiamoci a dimostrare la prima delle (11.29), ovvero che

$$\mathcal{H} \{x_c(t) \cos 2\pi f_0 t\} = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (11.30)$$

Iniziamo con il considerare che \mathcal{F} -trasformando l'argomento di (11.30) possiamo evidenziarne le componenti a frequenza positiva e negativa $X_c(f - f_0)$ e $X_c(f + f_0)$

$$x_c(t) \cos 2\pi f_0 t = \frac{x_c(t)}{2} \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [X_c(f - f_0) + X_c(f + f_0)] \quad (11.31)$$

che, se $x_c(t)$ ha una banda minore di f_0 , possono essere facilmente \mathcal{H} -trasformate semplicemente aggiungendo lo sfasamento introdotto a frequenze positive e negative dal filtro di Hilbert

$$\frac{1}{2} [X_c(f - f_0) + X_c(f + f_0)] \xrightarrow{\mathcal{H}} \frac{1}{2} [X_c(f - f_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + X_c(f + f_0) e^{j\frac{\pi}{2}}]$$

e quindi \mathcal{F} -antitrasformando questa espressione si ottiene la \mathcal{H} -trasformata del segnale (11.30)

$$\frac{1}{2} [X_c(f - f_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} + X_c(f + f_0) e^{j\frac{\pi}{2}}] \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{x_c(t)}{2} \left(e^{j2\pi f_0 t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{2}} \right)$$

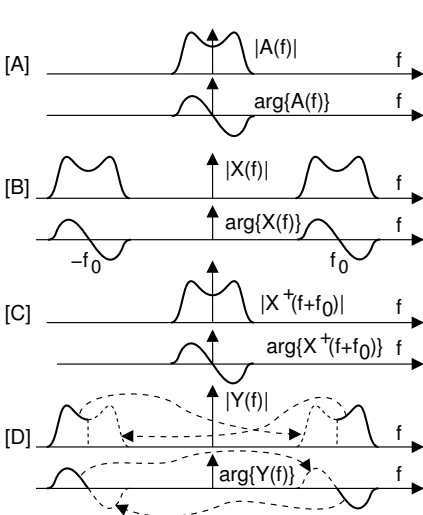
risultato che, anche se non ancora nella forma anticipata, poteva comunque essere ottenuto anche direttamente a partire dal secondo membro di (11.31), invocando subito la limitazione ad una semibanda di $x_c(t) e^{\pm j2\pi f_0 t}$. Per ottenere la (11.30) è ora sufficiente moltiplicare e dividere per $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, ossia

$$\begin{aligned} \frac{x_c(t)}{2} \left(e^{j2\pi f_0 t} e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\frac{\pi}{2}}} &= \frac{x_c(t)}{2j} \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{j\pi} \right) = \\ &= \frac{x_c(t)}{2j} \left(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t} \right) = x_c(t) \sin 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

in quanto $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, e $e^{j\pi} = -1$.

11.4.3 Trasmissione a banda laterale unica

Con riferimento alla figura che segue, consideriamo un segnale $a(t)$ reale e limitato in banda, con $A(f) = A^*(-f)$ (grafico [A]). In virtù delle proprietà di simmetria coniugata per segnali reali la conoscenza del solo contenuto a frequenze positive



$f > 0$, ovvero di $A^+(f) = A(f) \text{rect}_W \left(f - \frac{W}{2} \right)$, è sufficiente a definire $a(t)$ in modo completo. Se consideriamo ora il segnale modulato $x(t) = a(t) \cos \omega_0 t$, anch'esso reale, otteniamo che $X(f)$ [B], oltre ad essere a simmetria coniugata rispetto all'origine, ha simmetria coniugata anche rispetto ad f_0 : $X^+(f_0 + \alpha) = \{X^+(f_0 - \alpha)\}^*$.

Questo risultato mostra come sia *teoricamente* possibile (con una fotocopiatrice ed un paio di forbici!) produrre un segnale $Y(f)$ eliminando da $X(f)$ tutta la banda $|f| < f_0$ [D], e quindi da quel che resta, ri-ottenere il segnale $X(f)$ a partire da un $Y(f)$. La ricostruzione di

$X(f)$ avviene infatti (freccie tratteggiate) spostando le copie duplicate di $Y^+(f)$ e $Y^-(f)$ come indicato dalle frecce.

Una volta verificata la *correttezza ipotetica* di questo procedimento che ci consente di ricevere per intero $X(f)$ *trasmettendone solo metà* (cioè $Y(f)$), osserviamo che anche $Y(f)$ è a simmetria coniugata rispetto a zero (ossia $Y(f) = Y^*(-f)$), e quindi la sua antitrasformata $y(t)$ è *reale*, e dunque può essere realmente trasmesso.

A parte il “dettaglio” di come ricostruire “veramente” $X(f)$ a partire da $Y(f)$, ci chiediamo: esiste una formula per ottenere $y(t)$ in modo *diretto* a partire da $a(t)$? La risposta è positiva, e si trova al § 12.1.2.

11.4.4 Processo passa banda

Svolgiamo ora l’approfondimento dei passaggi che portano ai risultati discussi al § 11.3, ovvero l’espressione della densità di potenza $\mathcal{P}_{x_c}(f)$ e $\mathcal{P}_{x_s}(f)$ in funzione di $\mathcal{P}_x(f)$ eq. (11.24), svolgendo i calcoli in modo da tenere in conto anche il caso dei processi aleatori: pertanto, occorrerà prima ottenere un risultato relativo alle rispettive funzioni di autocorrelazione $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$ e $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$, e quindi effettuare la trasformata di Fourier come prescritto dal teorema di Wiener.

Osserviamo innanzitutto che quando un processo aleatorio presenta una $\mathcal{P}_x(f)$ limitata in banda attorno ad f_0 , la relativa funzione di autocorrelazione $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\}$ può essere espressa nei termini delle componenti analogiche di bassa frequenza della funzione di autocorrelazione stessa:

$$\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_s(\tau) \sin \omega_0 \tau$$

D’altra parte, una qualunque realizzazione di un processo $x(t)$ limitato in banda attorno ad f_0 ammette la rappresentazione $x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t - x_s(t) \sin \omega_0 t$, ma data la natura aleatoria di $x(t)$, gli stessi $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ sono realizzazioni di processi, in generale statisticamente *dipendenti*, in quanto la loro combinazione deve produrre un $x(t)$ che appartiene al processo originario. Si pensi ad esempio al segnale $x(t) = x_c(t) \cos \omega_0 t$, in cui $x_c(t)$ è un processo stazionario ed ergodico: come già osservato al § 7.5.3, $x(t)$ è solamente *ciclostazionario*³¹.

Come prima cosa, proviamo a calcolare la funzione di autocorrelazione dell’inviluppo complesso di una generica realizzazione, che per l’ergodicità corrisponde al relativo momento misto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau) &= E \{ \underline{x}^*(\tau) \underline{x}(t+\tau) \} = \\ &= E \{ [x_c(\tau) - jx_s(\tau)] [x_c(t+\tau) + jx_s(t+\tau)] \} = \\ &= E \{ x_c(\tau) x_c(t+\tau) + x_s(\tau) x_s(t+\tau) + \\ &\quad + j [x_c(\tau) x_s(t+\tau) - x_s(\tau) x_c(t+\tau)] \} = \\ &= \mathcal{R}_{x_c}(\tau) + \mathcal{R}_{x_s}(\tau) + j [\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) - \mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)] \end{aligned} \quad (11.32)$$

Queste quattro quantità sono calcolate al § 11.4.5, e nel caso in cui $x_c(t)$ e $x_s(t)$ siano

³¹Come illustrato al § 6.3.7, il processo risultante diviene ergodico qualora al coseno sia aggiunta una fase aleatoria uniformemente distribuita.

stazionari ed ergodici, il risultato finale fornisce le espressioni

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau \\ \mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = -\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau) = \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau \end{cases} \quad (11.33)$$

in cui $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) = \mathcal{H}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$ è la trasformata di Hilbert di $\mathcal{R}_x(\tau)$. Osserviamo quindi come, sostituendo (11.33) in (11.32), risulti

$$\mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau) = 2 [\mathcal{R}_{x_c}(\tau) + j\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)] \quad (11.34)$$

e pertanto otteniamo

$$\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{\underline{x}}(\tau)\} = 2 [\mathcal{P}_{x_c}(f) + j\mathcal{P}_{x_c x_s}(f)] \quad (11.35)$$

in cui $\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f)$ sono reali pari in quanto $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ sono reali. Prima di giungere alle conclusioni espresse al § 11.4.4.1 ed anticipate al § 11.3, prendiamoci il lusso di sviluppare una serie di considerazioni basate sui risultati fin qui ottenuti:

1. la (11.35) sembra indicare che $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$ possa assumere valori complessi, perdendo il senso fisico di potenza, ma non è così. Osserviamo infatti che $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$ è un segnale reale dispari³²: pertanto $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)\}$ è completamente immaginario, e dunque $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$ è reale;
2. se risulta $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$ per ogni τ , allora la potenza mutua $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f)$ si annulla, e la (11.35) fornisce $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 2\mathcal{P}_{x_c}(f)$ reale pari; la presenza di $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f) \neq 0$ può invece rendere $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$ asimmetrico, permettendo di ottenere ancora $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_x^+(f + f_0)$ come espresso dalla (11.22);
3. invertendo i due punti precedenti osserviamo che, se $\mathcal{P}_x(f)$ ha simmetria pari rispetto ad f_0 , allora $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f)$ è pari, e quindi deve risultare $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = 0$, ovvero le c.a. di b.f. $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ risultano mutuamente incorrelate; **se inoltre queste sono congiuntamente gaussiane, allora risultano anche statisticamente indipendenti**;
4. se $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono a media nulla, la potenza \mathcal{P}_{x_c} (uguale a \mathcal{P}_{x_s} in virtù della prima delle (11.33)) si calcola come $\mathcal{R}_{x_c}(0) = \mathcal{R}_{x_s}(0)$. Dato che $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = -\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)$ è dispari (punto 1), deve risultare che $\mathcal{R}_{x_c x_s}(0) = 0$; in questo caso la (11.34) fornisce $\mathcal{R}_{\underline{x}}(0) = 2\mathcal{R}_{x_c}(0) = 2\mathcal{R}_{x_s}(0)$, e dunque si ottiene

$$\mathcal{P}_{\underline{x}} = \sigma_{\underline{x}}^2 = \mathcal{R}_{\underline{x}}(0) = 2\mathcal{R}_{x_c}(0) = 2\mathcal{R}_{x_s}(0) = 2\sigma_{x_c}^2 = 2\sigma_{x_s}^2 = 2\mathcal{P}_{x_c} = 2\mathcal{P}_{x_s}$$

In definitiva, le componenti analogiche di bassa frequenza hanno entrambe potenza pari a metà di quella dell'involuppo complesso;

5. l'eq. (11.22) asserisce che $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^+}(f + f_0)$, ed in modo simile si può trovare che $\mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 4\mathcal{P}_{x^-}(f - f_0)$, e quindi $\mathcal{P}_{x^+} = \mathcal{P}_{x^-} = \frac{1}{4}\mathcal{P}_{\underline{x}}$. Dato poi che $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x^+} + \mathcal{P}_{x^-}$ in quanto $x^+(t)$ e $x^-(t)$ sono ortogonali perché definiti su bande

³²Infatti (eq. (11.33)) $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) = \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau$, in cui $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{P}_x(f)\}$ è pari e $\sin \omega_0 \tau$ è dispari, mentre $\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau)$ è dispari (non è stato dimostrato, ma vale per le trasformate di Hilbert di segnali pari) e $\cos \omega_0 \tau$ è pari. Inoltre, essendo $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ reali, $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$ è reale.

disgiunte, in base al punto 4 si ottiene

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_{x^+} + \mathcal{P}_{x^-} = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_{\underline{x}} + \mathcal{P}_{\underline{x}}] = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{\underline{x}} = \mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_{x_s}$$

e dunque $x_c(t)$ e $x_s(t)$ hanno (ciascuno) potenza pari a quella di $x(t)$, ovvero $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_{x_s} = \mathcal{P}_x$;

6. se consideriamo $\widehat{x}(t)$ l'uscita del filtro di Hilbert per il quale risulta $|H_H(f)|^2 = 1$, si ottiene che $\mathcal{P}_{\widehat{x}}(f) = |H_H(f)|^2 \mathcal{P}_x(f) = \mathcal{P}_x(f)$, e dunque antitrasformando $\mathcal{R}_{\widehat{x}}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)$;

7. è possibile mostrare che, esprimendo l'autocorrelazione di $x(t)$ in termini delle sue c.a. di b.f. $\mathcal{R}_x(\tau) = \mathcal{R}_c(\tau) \cos \omega_0 \tau - \mathcal{R}_s(\tau) \sin \omega_0 \tau$, risulta

$$\begin{cases} \mathcal{R}_c(\tau) = \mathcal{R}_{x_c}(\tau) \\ \mathcal{R}_s(\tau) = -\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) \end{cases}$$

8. la prima delle (11.33) ci dice che $\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f)$ in quanto $\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau)$, e che risulta $\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau) \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \sin \omega_0 \tau$; applicando ora la formula di Eulero per seno e coseno si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \\ &= \mathcal{R}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0 \tau} + e^{-j\omega_0 \tau}}{2} + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \frac{e^{j\omega_0 \tau} - e^{-j\omega_0 \tau}}{2j} \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{R}_x(\tau) - j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{j\omega_0 \tau} + \frac{1}{2} \left[\mathcal{R}_x(\tau) + j\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \right] e^{-j\omega_0 \tau} \\ &= \mathcal{R}_x^-(\tau) e^{j\omega_0 \tau} + \mathcal{R}_x^+(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \end{aligned}$$

infatti i termini tra parentesi quadre corrispondono alla definizione di componenti a frequenze positive e negative ottenute tramite trasformata di Hilbert, per come espressa dalla (11.17).

11.4.4.1 Conclusioni

Al punto 8) del precedente elenco abbiamo mostrato che

$$\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau) = \mathcal{R}_x^-(\tau) e^{j\omega_0 \tau} + \mathcal{R}_x^+(\tau) e^{-j\omega_0 \tau}$$

e quindi

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^-(f - f_0) + \mathcal{P}_x^+(f + f_0)$$

dunque lo spettro di densità di potenza delle componenti analogiche di un processo si ottiene traslando nell'origine e sovrapponendo (vedi fig. 11.5) le componenti a frequenze positive e negative dello spettro di densità di potenza $\mathcal{P}_x(f)$ del segnale modulato. Dunque $\mathcal{P}_{x_c}(f)$ e $\mathcal{P}_{x_s}(f)$ sono entrambe pari, come deve essere per $x_c(t)$ ed $x_s(t)$ reali.

11.4.4.2 Processo gaussiano bianco limitato in banda

Se $x(t)$ è un processo gaussiano stazionario ergodico, bianco ed a media nulla, con densità spettrale $\mathcal{P}_x(f) = \frac{N_0}{2}$ limitata in banda $\pm W$ attorno ad f_0 , allora (vedi fig. 11.6)

- le relative c.a. di b.f. $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono processi congiuntamente gaussiani, stazionari, ergodici, statisticamente indipendenti ed a media nulla, con potenza $\mathcal{P}_{x_c} = \mathcal{P}_{x_s} = \mathcal{P}_x = 2N_0W$, pari alle varianze $\sigma_x^2 = \sigma_{x_c}^2 = \sigma_{x_s}^2$. Le rispettive densità

di potenza valgono

$$\mathcal{P}_{x_c}(f) = \mathcal{P}_{x_s}(f) = \mathcal{P}_x^+(f + f_0) + \mathcal{P}_x^-(f - f_0) = N_0 \text{rect}_{2W}(f) \quad (11.36)$$

- il suo involuppo complesso $\underline{x}(t)$ relativo ad f_0 ha potenza (e densità di potenza) doppie

$$\mathcal{P}_{\underline{x}} = 2\mathcal{P}_{x_c} = 4N_0W; \quad \mathcal{P}_{\underline{x}}(f) = 2N_0 \text{rect}_{2W}(f) \quad (11.37)$$

Infatti la simmetria pari di $\mathcal{P}_x(f)$ attorno ad f_0 rende $x_c(t)$ e $x_s(t)$ incorrelate, come mostrato al punto 3) di pag. 356: pertanto $\mathcal{P}_{x_c x_s}(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)\} = 0$ (punto 2) e dunque la (11.35) si semplifica nella (11.37).

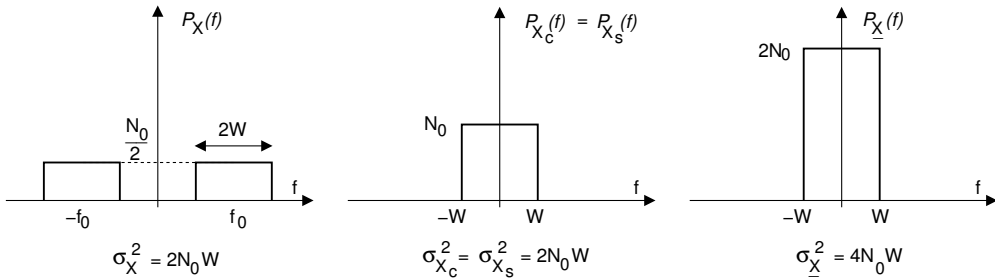


Figura 11.6: Densità di potenza delle c.a. di b.f. per un processo gaussiano bianco e limitato e limitato in banda

11.4.5 Autocorrelazione di processi passa-banda

Svolgiamo qui il calcolo relativo al valore di $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$, $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$, $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$ e $\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)$. Ricordando che (pag. 345) $x_c(t) = x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t$, iniziamo a svolgere i calcoli per $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= E\{x_c(\tau) x_c(t + \tau)\} = \\ &= E\{[x(t) \cos \omega_0 t + \hat{x}(t) \sin \omega_0 t] \cdot \\ &\quad \cdot [x(t + \tau) \cos \omega_0(t + \tau) + \hat{x}(t + \tau) \sin \omega_0(t + \tau)]\} = \\ &= E\{x(t) x(t + \tau)\} \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \\ &\quad + E\{x(t) \hat{x}(t + \tau)\} \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) + \\ &\quad + E\{\hat{x}(t) x(t + \tau)\} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \\ &\quad + E\{\hat{x}(t) \hat{x}(t + \tau)\} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) \end{aligned}$$

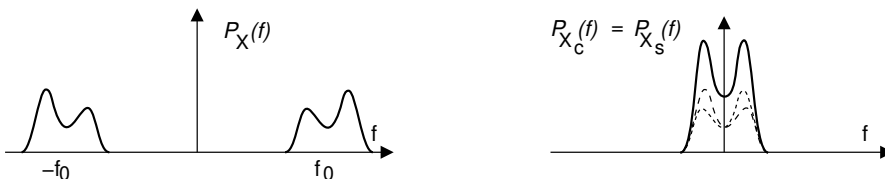


Figura 11.5: Processo passa banda e densità di potenza delle c.a. di b.f.

Valutiamo quindi singolarmente i quattro valori attesi, procedendo con il calcolo di medie temporali in virtù dell'ergodicità, e indicando con $\overline{x(t)}$ la media temporale di $x(t)$, ossia $\overline{x(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$:

$$\begin{aligned}
 E \{x(t) x(t+\tau)\} &= \overline{x(t) x(t+\tau)} = \mathcal{R}_x(\tau) \\
 E \{x(t) \widehat{x}(t+\tau)\} &= \overline{x(t) \widehat{x}(t+\tau)} = \mathcal{R}_{x\widehat{x}}(\tau) = x(-\tau) * \widehat{x}(\tau) = \\
 &= x(-\tau) * x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \mathcal{R}_x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \\
 E \{\widehat{x}(t) x(t+\tau)\} &= \overline{\widehat{x}(t) x(t+\tau)} = \mathcal{R}_{\widehat{x}x}(\tau) = \widehat{x}(-\tau) * x(\tau) = \\
 &= x(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) * x(\tau) = x(-\tau) * x(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = \\
 &= \mathcal{R}_x(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) = -\widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \\
 E \{\widehat{x}(t) \widehat{x}(t+\tau)\} &= \overline{\widehat{x}(t) \widehat{x}(t+\tau)} = \mathcal{R}_{\widehat{x}\widehat{x}}(\tau) = \widehat{x}(-\tau) * \widehat{x}(\tau) = \\
 &= x(-\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) * x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \\
 &= x(-\tau) * x(\tau) * \left(-\frac{1}{\pi\tau}\right) * \frac{1}{\pi\tau} = -\widehat{\widehat{\mathcal{R}}}_x(\tau) = \mathcal{R}_x(\tau)
 \end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni ora trovate nella espressione di $\mathcal{R}_{x_c}(\tau)$, si ottiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{x_c}(\tau) &= \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t+\tau) + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t+\tau) + \\
 &- \widehat{\widehat{\mathcal{R}}}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t+\tau) + \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t+\tau) = \\
 &= \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) + \cos \omega_0(2t+\tau)] + \\
 &+ \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\sin \omega_0(\tau) + \sin \omega_0(2t+\tau)] + \\
 &- \frac{1}{2} \widehat{\widehat{\mathcal{R}}}_x(\tau) [\sin \omega_0(-\tau) + \sin \omega_0(2t+\tau)] + \\
 &+ \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) - \cos \omega_0(2t+\tau)] = \\
 &= \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 \tau + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 \tau
 \end{aligned}$$

che costituisce il risultato anticipato alla (11.33). Per l'espansione dei termini trigonometrici, si è fatto uso delle relazioni

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\
 \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\
 \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]
 \end{aligned}$$

I calcoli relativi al valore di $\mathcal{R}_{x_s}(\tau)$ sono del tutto simili, ed il loro svolgimento porta al risultato $\mathcal{R}_{x_c}(\tau) = \mathcal{R}_{x_s}(\tau)$.

Per quanto riguarda $\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$ applichiamo la relazione $x_s(t) = \widehat{x}(t) \cos \omega_0 t - x(t) \sin \omega_0 t$ per ottenere

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) &= E\{x_c(\tau) x_s(t + \tau)\} = \\
&= E\{[x(t) \cos \omega_0 t + \widehat{x}(t) \sin \omega_0 t] \cdot \\
&\quad \cdot [\widehat{x}(t + \tau) \cos \omega_0(t + \tau) - x(t + \tau) \sin \omega_0(t + \tau)]\} = \\
&= E\{x(t) \widehat{x}(t + \tau)\} \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \\
&\quad - E\{x(t) x(t + \tau)\} \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) + \\
&\quad + E\{\widehat{x}(t) \widehat{x}(t + \tau)\} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) + \\
&\quad - E\{\widehat{x}(t) x(t + \tau)\} \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau)
\end{aligned}$$

I valori attesi che vediamo comparire sono stati già ottenuti e quindi possiamo scrivere direttamente lo sviluppo dei calcoli, in cui si applicano nuovamente le identità trigonometriche note:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau) &= \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) - \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) + \\
&\quad + \mathcal{R}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0(t + \tau) - \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0 t \cdot \sin \omega_0(t + \tau) = \\
&= \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) + \cos \omega_0(2t + \tau)] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\sin \omega_0(\tau) + \sin \omega_0(2t + \tau)] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{R}_x(\tau) [\sin \omega_0(-\tau) + \sin \omega_0(2t + \tau)] + \\
&\quad - \frac{1}{2} \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) [\cos \omega_0(-\tau) - \cos \omega_0(2t + \tau)] = \\
&= -\mathcal{R}_x(\tau) \cdot \sin \omega_0(2t + \tau) + \widehat{\mathcal{R}}_x(\tau) \cdot \cos \omega_0(2t + \tau)
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli argomenti delle funzioni trigonometriche, il valore di t è lasciato non specificato. Pertanto, visto che il processo è stazionario per ipotesi, può sensatamente essere posto a zero, e dunque ottenere il risultato previsto alla (11.33).

I calcoli relativi al valore di $\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau)$ sono del tutto simili, ed il loro svolgimento porta al risultato $\mathcal{R}_{x_s x_c}(\tau) = -\mathcal{R}_{x_c x_s}(\tau)$.

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>