

Serie di Fourier e spazio dei segnali

SONO innanzitutto riviste alcune relazioni di *algebra complessa* e *trigonometria*, in quanto di fondamentale importanza per definire e comprendere la rappresentazione dei segnali periodici mediante lo sviluppo in *serie di Fourier*. Vengono quindi introdotte le proprietà di simmetria della serie per *segnali reali*, e sviluppato il calcolo dei coefficienti di Fourier per il caso dell'*onda rettangolare*. Dopo la dimostrazione del teorema di *Parseval* ed il concetto collegato di ortogonalità, viene sviluppato un approfondimento sullo *spazio dei segnali* per i quali sia definita una operazione di *prodotto interno*, costituendo quest'ultimo un approccio unificante per lo sviluppo dei prossimi capitoli.

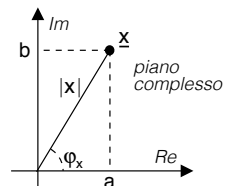
2.1 Prerequisiti trigonometrici

Date che come vedremo un segnale periodico può essere espresso come una combinazione di funzioni trigonometriche, intraprendiamo i passi necessari a poterle descrivere nei termini di funzioni esponenziali complesse, che a loro volta intervengono in modo massiccio nella rappresentazione frequenziale di Fourier.

2.1.1 Numeri complessi

Un numero complesso \underline{x} è costituito da una coppia di valori a e b entrambi *reali*¹ che ne costituiscono la parte reale a e quella immaginaria² b , e viene scritto come

$$\underline{x} = a + jb = \Re \{ \underline{x} \} + j\Im \{ \underline{x} \} \quad (2.1)$$



detta rappresentazione in *coordinate cartesiane* o rettangolari, che lo mette in corrispondenza con un punto in un *piano complesso*. Le operazioni di somma e prodotto tra

¹L'insieme dei numeri reali è indicato con \mathbb{R} , vi fanno parte i numeri interi, razionali, irrazionali e trascendenti, e può essere messo in corrispondenza biunivoca con gli infiniti punti su di una retta.

²L'*unità immaginaria* trae origine dalla teoria dei numeri come la quantità $\sqrt{-1}$, in modo da poter esprimere nel *campo complesso* \mathbb{C} tutte le radici di un'equazione polinomiale. Mentre in *analisi matematica* è indicata dalla lettera i , nel seguito viene indicata con la lettera j in accordo alla notazione di *teoria dei circuiti*, in modo da evitare confusione con il simbolo utilizzato per la corrente elettrica. Risulta $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j$ e così via ciclicamente.

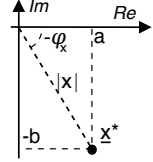
due numeri complessi $\underline{x} = a + jb$ e $\underline{y} = c + jd$ danno come risultato³

$$\underline{x} + \underline{y} = (a + c) + j(b + d) \quad \text{e} \quad \underline{x} \cdot \underline{y} = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

mentre l'inverso di un numero complesso risulta

$$\frac{1}{\underline{x}} = \frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$$

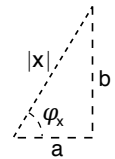
Coniugato pippo Il numero complesso $\underline{x}^* = a - jb$ prende il nome di *coniugato* di \underline{x} , per il quale valgono le relazioni $\underline{x} + \underline{x}^* = 2a = 2\Re\{\underline{x}\}$ e $\underline{x} - \underline{x}^* = 2jb = 2j\Im\{\underline{x}\}$.



Coordinate polari Ricorrendo alle relazioni trigonometriche $a = |\underline{x}| \cos \varphi_x$ e $b = |\underline{x}| \sin \varphi_x$ un numero complesso \underline{x} può essere anche espresso in *coordinate polari* come

$$\underline{x} = |\underline{x}| (\cos \varphi_x + j \sin \varphi_x) \tag{2.2}$$

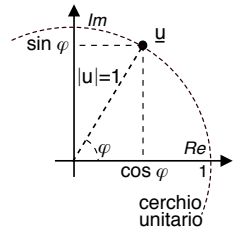
in cui⁴ $|\underline{x}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ prende il nome di *modulo* di \underline{x} e $\varphi_x = \arg\{\underline{x}\} = \arctan \frac{b}{a}$ prende il nome di *fase* o *argomento*. Risulta quindi evidente che $|\underline{x}|^2 = a^2 + b^2 = \underline{x} \cdot \underline{x}^*$, mentre $\frac{1}{\underline{x}} = \frac{\underline{x}^*}{|\underline{x}|^2}$. Infine, In virtù della periodicità di sin e cos, due numeri complessi con uguale modulo ma fase che differisce per multipli di 2π sono *indistinguibili*.



2.1.2 Formula di Eulero

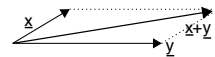
Si può mostrare⁵ che qualora la serie di potenze in cui può essere sviluppata la funzione esponenziale e^z (pag. 22) sia valutata per un argomento $z = jb$ completamente immaginario, essa eguaglia la somma delle serie di potenze in cui è possibile sviluppare la funzione $\cos b + j \sin b$. Questo risultato prende il nome di *formula di Eulero*, e mostra come l'esponenziale immaginario $e^{\pm j\varphi}$ sia un particolare numero complesso con modulo pari ad uno⁶ e fase φ espresso come

$$e^{\pm j\varphi} = \cos \varphi \pm j \sin \varphi \tag{2.3}$$



La relazione (2.3) consente di scrivere le funzioni trigonometriche

³Sommare tra loro le parti reali e quelle immaginarie equivale a realizzare una *somma vettoriale* tra \underline{x} e \underline{y} come mostrato a lato. Per il prodotto si applica invece la regola del prodotto tra binomi, ovvero $(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbd + j^2bd$ da cui il risultato, ricordando che $j^2 = -1$.



⁴Mentre l'espressione del modulo è una diretta conseguenza del teorema di Pitagora, quella della fase discende dall'osservare che $\frac{b}{a} = \frac{|\underline{x}| \sin \varphi_x}{|\underline{x}| \cos \varphi_x} = \tan \varphi_x$, per cui $\varphi_x = \arctan \frac{b}{a}$. Con l'avvertenza che, qualora risulti $a < 0$, al risultato φ_x va aggiunto il termine π in quanto la funzione $\arctan \varphi$ è definita per valori dell'argomento $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, vedi <https://www.geogebra.org/m/Enf5AEbT>. Nei linguaggi di programmazione esiste in genere la funzione $\text{atan2}(b, a)$ che effettua automaticamente tale considerazione, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Arcotangente2>.

⁵Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Eulero#Funzioni_analitiche

⁶Più in generale, il valore e^x con $\underline{x} = a + jb$ è ancora un numero complesso, con fase b e modulo e^a . Infatti $e^{\underline{x}} = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = e^a (\cos b + j \sin b)$.

in termini di esponenziali complessi come⁷

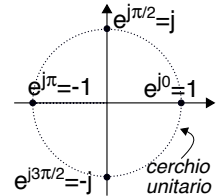
$$\cos \varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \sin \varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

Tali relazioni possono tornare utili nel semplificare i calcoli, trasformando i prodotti tra funzioni trigonometriche in somme di angoli⁸. Ma soprattutto, la rappresentazione di un numero complesso \underline{x} in coordinate polari (2.2) può essere riscritta in base alla (2.3) come

$$\underline{x} = |\underline{x}|e^{j\varphi_x} \tag{2.4}$$

detta anche *rappresentazione esponenziale* di \underline{x} .

In tal modo i numeri complessi di modulo unitario e che presentano la sola parte reale o che sono puramente immaginari possono essere rappresentati come in figura a lato, mentre il coniugato \underline{x}^* di un numero complesso \underline{x} viene ridefinito come quel numero complesso con uguale modulo e fase cambiata di segno, ovvero $\underline{x}^* = a - jb = |\underline{x}|e^{-j\varphi}$.



Infine, il prodotto tra due numeri complessi \underline{x} ed \underline{y} può essere agevolmente calcolato come

$$|\underline{x}|e^{j\varphi_x} \cdot |\underline{y}|e^{j\varphi_y} = |\underline{x}||\underline{y}| \cdot e^{j(\varphi_x + \varphi_y)} = |\underline{z}|e^{j\varphi_z} \quad \text{in cui} \quad |\underline{z}| = |\underline{x}||\underline{y}| \quad \text{e} \quad \varphi_z = \varphi_x + \varphi_y$$

o, detto in altri termini

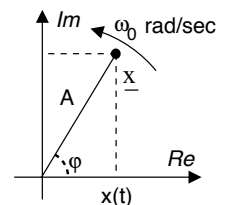
il modulo del prodotto tra numeri complessi è pari al prodotto tra i moduli, e la fase pari alla somma delle fasi

e dunque, come corollario, per il rapporto si ottiene $\frac{\underline{x}}{\underline{y}} = \frac{|\underline{x}|}{|\underline{y}|}e^{j(\varphi_x - \varphi_y)}$.

2.1.3 Fasore

Un segnale del tipo $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ è completamente rappresentato dal numero complesso $\underline{x} = Ae^{j\varphi}$ detto *fasore*, la cui conoscenza permette di riottenere il segnale originario mediante la relazione $x(t) = \Re \{ \underline{x} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \}$, che una volta sviluppata⁹ risulta infatti pari a

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re \{ Ae^{j\varphi} \cdot e^{j2\pi f_0 t} \} = A \cdot \Re \{ e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \} = \\ &= A \cdot \Re \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + j \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \} = \\ &= A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$



⁷Osserviamo infatti che $e^{j\varphi}$ ed $e^{-j\varphi}$ sono tra loro coniugati, e quindi applicando la (2.3) per la loro somma si ha $e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\Re \{ e^{j\varphi} \} = 2 \cos \varphi$ mentre la differenza produce $e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\Im \{ e^{j\varphi} \} = 2j \sin \varphi$.

⁸L'affermazione nasce dalla relazione $e^\alpha e^\beta = e^{\alpha + \beta}$. Ad esempio quindi, il prodotto $\cos \alpha \cdot \sin \beta$ diviene $\frac{1}{4j} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) (e^{j\beta} - e^{-j\beta}) = \frac{1}{4j} [e^{j\alpha}e^{j\beta} - e^{j\alpha}e^{-j\beta} + e^{-j\alpha}e^{j\beta} - e^{-j\alpha}e^{-j\beta}] = \frac{1}{4j} [e^{j(\alpha + \beta)} - e^{j(\alpha - \beta)} + e^{-j(\alpha - \beta)} - e^{-j(\alpha + \beta)}] = \frac{1}{4j} [e^{j(\alpha + \beta)} - e^{-j(\alpha + \beta)} - (e^{j(\alpha - \beta)} - e^{-j(\alpha - \beta)})] = \frac{1}{4j} [2j \sin(\alpha + \beta) - 2j \sin(\alpha - \beta)] = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$

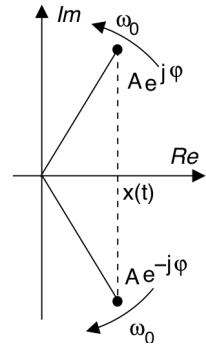
⁹Un modo alternativo di ottenere lo stesso risultato è quello di esprimere gli esponenziali complessi mediante la (2.3), ottenendo $x(t) = \Re \{ |\underline{x}| (\cos \varphi + j \sin \varphi) [\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)] \}$, e sviluppare il calcolo facendo uso delle relazioni $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ e $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, ma avremmo svolto molti più passaggi.

Osserviamo che il risultato è interpretabile graficamente come aver impresso al fasore \underline{x} una rotazione di velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ radianti/secondo in senso *antiorario*, ed aver proiettato il risultato sull'asse reale.

In alternativa, possiamo esprimere il segnale $x(t)$ di partenza anche come

$$x(t) = \frac{1}{2} \{ \underline{x} e^{j2\pi f_0 t} + \underline{x}^* e^{-j2\pi f_0 t} \} \quad (2.5)$$

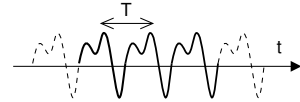
coinvolgendo in tal modo anche le *frequenze negative*, cioè tenendo conto di un secondo vettore contro-rotante, coniugato al primo rotore e che si muove in senso *orario*, che quindi ha una parte immaginaria di segno sempre opposto al primo, e che è moltiplicato per il coniugato del fasore. Vedremo tra breve che la (2.5) coincide con l'espressione della *serie di Fourier* per il caso in questione.



2.2 Serie di Fourier

Come anticipato a pag. 14, un segnale $x(t)$ *periodico* è un segnale di potenza, reale o complesso, che assume ripetutamente gli stessi valori a distanza multipla di un intervallo temporale T denominato *periodo*, ovvero tale che

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

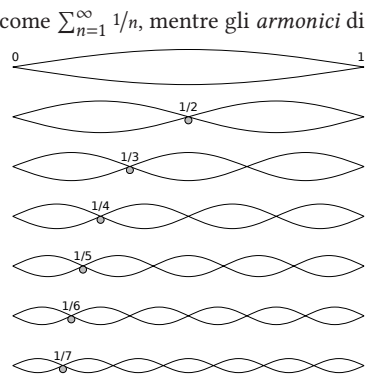


L'inverso di T è detto *frequenza fondamentale* $F = \frac{1}{T}$ o *prima armonica*¹⁰ di $x(t)$, espressa in Hertz, dimensionalmente pari all'inverso di un tempo [sec⁻¹].

Per i segnali periodici esiste una forma di rappresentazione basata sulla conoscenza di una serie infinita di valori *complessi* $\{X_n\}$ denominati *coefficienti di Fourier*, calcolati a partire da un periodo di segnale come

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt \quad (2.6)$$

¹⁰Da un punto di vista etimologico, la serie *armonica* è definita come $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$, mentre gli *armonici* di una corda di chitarra sono i suoni prodotti dopo averne bloccato la vibrazione in corrispondenza di $1/n$ -esimo della sua lunghezza. Dal punto di vista della teoria musicale le *armoniche* di una nota sono altre note a frequenza multipla della prima. In particolare la seconda armonica corrisponde ad un intervallo di *ottava*, mentre la quarta a due ottave. E la terza armonica? Partendo ad esempio dal la_4 , e sapendo che ogni semitono della scala *temperata* corrisponde ad un rapporto di frequenze pari a $2^{1/12}$ rispetto al semitono precedente, determiniamo il numero di semitoni N_s tra il la_4 e la sua la terza armonica. Ad un rapporto di frequenze pari a $2^{N_s/12} = 3$ corrisponde $\frac{N_s}{12} = \log_2 3 \approx 1.5849$ e quindi $N_s = 19$ semitoni, ovvero un intervallo di *dodicesima*, cioè il mi_5 che viene dopo il la_5 dell'ottava successiva. Procedendo allo stesso modo si trova che la quinta, sesta e settima armonica corrispondono rispettivamente a $do\#_6$, mi_6 e sol_6 : pertanto, con le prime sette armoniche si compone un accordo di *settima di dominante*.



e che permettono¹¹ la *ricostruzione* di $x(t)$ nella forma di una combinazione lineare di infinite funzioni esponenziali complesse $e^{j2\pi nFt}$, mediante l'espressione nota come *serie di Fourier*:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt} \quad (2.7)$$

Osserviamo che:

- la conoscenza di $\{X_n\}$ *equivale* a quella di $x(t)$ e *viceversa*, esistendo il modo di passare dall'una all'altra rappresentazione;
- le funzioni della base di rappresentazione $e^{j2\pi nFt}$ sono funzioni trigonometriche a frequenza multipla (*n-esima*) della fondamentale, detta anche *n-esima armonica*;
- la somma dei termini *simmetrici* $X_n e^{j2\pi nFt} + X_{-n} e^{-j2\pi nFt}$ è detta *componente armonica* di $x(t)$ a frequenza $f = nF$ e, se $x(t)$ è reale¹², risulta pari a $2|X_n| \cos(2\pi nFt + \varphi_n)$ in cui φ_n è la fase di X_n ;
- il coefficiente $X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ costituisce il *valor medio* di $x(t)$ (pag. 14);
- la serie di Fourier (2.7) dà valori esatti in tutti i punti in cui $x(t)$ è continuo, mentre in corrispondenza di discontinuità di prima specie fornisce un valore pari alla media dei valori agli estremi, vedi § 2.5.1;
- i coefficienti di Fourier X_n possono essere calcolati anche per un segnale di estensione finita T , ed antitrasformando, il segnale diventa periodico;
- i coefficienti X_n possono essere pensati anche come i valori assunti dalla funzione complessa di variabile continua $\bar{X}(f)$ per i valori discreti $f = nF$, ossia $X_n = \bar{X}(f = nF)$. $\bar{X}(f)$ prende il nome di *inviluppo dello spettro di ampiezza (complessa)* di $x(t)$, e si ottiene riscrivendo la (2.6) come $\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$;
- i coefficienti complessi X_n possono essere espressi nei termini delle corrispondenti parti reale ed immaginaria come $X_n = \Re\{X_n\} + j\Im\{X_n\}$, oppure in forma esponenziale $X_n = M_n e^{j\varphi_n}$ in cui

$$\begin{cases} M_n = \sqrt{\Re\{X_n\}^2 + \Im\{X_n\}^2} = |X_n| & \text{spettro di modulo} \\ \varphi_n = \arctan \frac{\Im\{X_n\}}{\Re\{X_n\}} & \text{spettro di fase} \end{cases}$$

2.2.1 Serie di Fourier per segnali reali

Qualora il segnale periodico $x(t)$ di cui si calcola la serie di Fourier sia *reale*, si verificano le importanti conseguenze che ora analizziamo.

2.2.1.1 Simmetria coniugata o Hermitiana

Quando $x(t)$ è reale i relativi coefficienti di Fourier godono della importante proprietà di *simmetria coniugata*, che consiste nell'eguaglianza

$$X_n = X_{-n}^* \quad (2.8)$$

¹¹Per una discussione relativa alla convergenza della serie (2.7) si veda il § 2.5.1.

¹²vedi § 2.2.1.1 e 2.2.1.3

ovvero il coefficiente con indice n è il complesso coniugato di quello con indice $-n$, avendo uguale parte reale e parte immaginaria di segno opposto. Infatti scomponendo l'esponenziale complesso $e^{-j2\pi nFt}$ mediante la (2.3) come $\cos 2\pi nFt - j \sin 2\pi nFt$, ed essendo $x(t)$ reale, l'integrale (2.6) si suddivide in due integrali entrambi *reali*

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt \quad (2.9)$$

relativi al calcolo rispettivamente della parte reale e di quella immaginaria di X_n , ovvero $\Re\{X_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt$ e $\Im\{X_n\} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt$. Essendo il coseno una funzione pari, $\Re\{X_n\}$ ha lo stesso valore indipendentemente dal segno di n , mentre $\Im\{X_n\}$ cambia segno con n , essendo il seno una funzione dispari. Ciò comporta una proprietà analoga anche per modulo e fase di X_n , e quindi in definitiva

$$x(t) \text{ reale} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X_n\} = \Re\{X_{-n}\} \\ \Im\{X_n\} = -\Im\{X_{-n}\} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} |X_n| = |X_{-n}| \\ \arg\{X_n\} = -\arg\{X_{-n}\} \end{cases}$$

riassumibile nella frase

se $x(t)$ è reale i coefficienti X_n hanno parte reale pari e parte immaginaria dispari, ovvero modulo pari e fase dispari

da cui discende anche¹³

se $x(t)$ oltre ad essere reale è anche pari, i coefficienti X_n sono reali (pari), mentre se $x(t)$ è reale dispari, gli X_n sono immaginari (dispari).

2.2.1.2 Interpretazione dei coefficienti di Fourier come fasori

Confrontando la formula di ricostruzione (2.7) con la (2.5) ricavata al § 2.1.3 per il caso di un $x(t)$ cosinusoidale, e tenendo conto della proprietà di simmetria coniugata (2.8),

è possibile pensare un segnale periodico reale come *la parte reale* del risultato di una somma vettoriale di un insieme infinito di fasori X_n (di modulo *doppio* di quello dei coefficienti X_n), ognuno rotante con una velocità angolare $\omega_n = 2\pi nF$ multipla della fondamentale $2\pi F$.

La figura 2.1 mostra¹⁴ la *somma vettoriale* dei primi

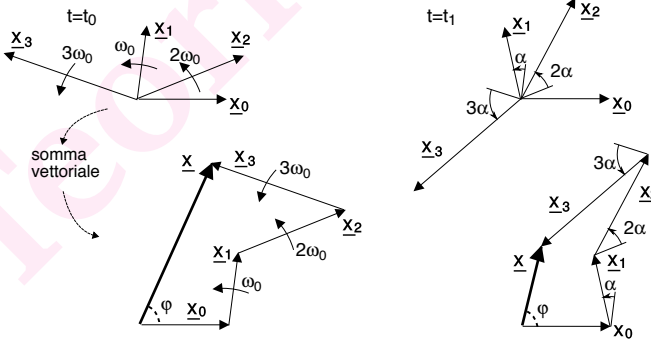


Figura 2.1: Somma vettoriale di fasori armonici per t_0 e t_1

¹³Notiamo infatti che se $x(t)$ è (reale) *pari*, allora il termine $x(t) \sin 2\pi nFt$ che compare nel secondo termine della (2.9) è *dispari*, ed il suo integrale esteso ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine è *nullo*, e pertanto $\Im\{X_n\} = 0$. Se invece $x(t)$ è (reale) *dispari*, allora è $x(t) \cos 2\pi nFt$ nel primo termine ad essere *dispari*, e dunque per lo stesso motivo si annulla l'integrale che esprime $\Re\{X_n\} = 0$.

¹⁴Se la figura non appare del tutto chiara, non hai tutti i torti. Prova allora a dare un'occhiata a queste animazioni <https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/phasor-addition.html>,

tre termini $X_n e^{j2\pi n Ft}$ della (2.7) per $n \geq 0$, valutata per due istanti di tempo consecutivi t_0 e $t_1 > t_0$, ed evidenzia come nell'intervallo $\tau = t_1 - t_0$ i fasori \underline{X}_2 e \underline{X}_3 siano ruotati di un angolo $n\alpha$ multiplo di quello $\alpha = 2\pi F\tau$ di cui ha ruotato \underline{X}_1 .

Esercizio Calcoliamo i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier per il segnale $x(t) = A \cos(2\pi Ft + \varphi)$. Esprimiamo innanzitutto l'integrale che fornisce i coefficienti nei termini della formula di Eulero per il coseno:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{e^{j2\pi Ft} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi Ft} e^{-j\varphi}}{2} e^{-j2\pi n Ft} dt \\ &= \frac{A}{2T} \left(e^{j\varphi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi n Ft} dt + e^{-j\varphi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi Ft} e^{-j2\pi n Ft} dt \right) \end{aligned}$$

in cui $F = \frac{1}{T}$, e consideriamo la funzione integranda $e^{\pm j2\pi Ft} e^{-j2\pi n Ft}$ per i diversi valori di n :

- per $n = 0$, osserviamo che $e^{-j2\pi n Ft} \Big|_{n=0} = e^0 = 1$, e dunque $X_0 = 0$ in quanto

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm j2\pi Ft} dt = 0$$

poiché in un intervallo T entra esattamente un ciclo di (co)sinusoide a frequenza F , risultando in un valor medio nullo.

- per $n = 1$, si ha che $\int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^0 dt = T$, mentre $\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi Ft} e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi 2Ft} dt = 0$, dato che in un periodo T entrano due cicli esatti della funzione periodica integranda, ottenendo quindi

$$X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$$

- per $n = -1$ valgono considerazioni analoghe, ottenendo quindi

$$X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$$

- per $|n| > 1$ infine, si ottiene $X_{\pm n} = 0$ dato che $\int_{-T/2}^{T/2} e^{\pm j2\pi Ft} e^{-j2\pi n Ft} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(\pm 1 - n)Ft} dt$ presenta sempre un numero intero di periodi entro l'intervallo di integrazione.

2.2.1.3 Serie trigonometrica

Qualora i coefficienti X_n presentino simmetria coniugata la (2.7) può essere riscritta¹⁵ come

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{X_n e^{j2\pi n Ft} + X_{-n} e^{-j2\pi n Ft}\} = M_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(2\pi n Ft + \varphi_n) \quad (2.10)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_series_sawtooth_wave_circles_animation.gif
e https://en.wikipedia.org/wiki/File:Fourier_series_square_wave_circles_animation.gif

¹⁵Infatti $X_{\pm n} = M_n e^{\pm j\varphi_n}$ e dunque il termine entro parentesi graffe risulta pari a

$$M_n \left(e^{j(2\pi n Ft + \varphi_n)} + e^{-j(2\pi n Ft + \varphi_n)} \right) = M_n 2 \cos(2\pi n Ft + \varphi_n)$$

ovvero in forma di una serie di coseni; notiamo che $X_0 = M_0$ è necessariamente reale, in quanto la fase deve risultare una funzione dispari della frequenza. Similmente, le proprietà relative alle parti reale ed immaginaria degli X_n permettono di scrivere¹⁶

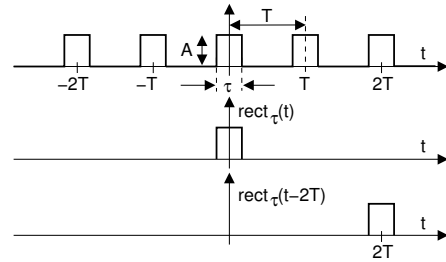
$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ (R_n + jI_n) e^{j2\pi nFt} + (R_n - jI_n) e^{-j2\pi nFt} \} = \\ &= R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ 2R_n \cos(2\pi nFt) - 2I_n \sin(2\pi nFt) \} \end{aligned}$$

in cui $R_0 = M_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ e $\begin{cases} R_n = \Re \{ x_n \} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nFt) dt \\ I_n = \Im \{ x_n \} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nFt) dt \end{cases}$.

Pertanto nel caso in cui $x(t)$ sia un segnale reale la serie di Fourier può essere ricondotta ad uno sviluppo in termini di funzioni trigonometriche, ed in particolare ad una serie di soli coseni (con fase nulla) nel caso in cui $x(t)$ sia pari, oppure una serie di soli seni (sempre con fase nulla), nel caso in cui sia dispari.

2.2.1.4 Serie di Fourier di un'onda rettangolare

Applichiamo quanto fin qui discusso ad un particolare segnale periodico, realizzato ripetendo con periodo T un impulso rettangolare (pag. 21) di base $\tau < T$, ottenendo il risultato mostrato a lato per un valore di *duty cycle*¹⁷ del 33%, la cui espressione analitica può essere scritta



$$x(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\tau}(t - nT)$$

in cui si è adottata la notazione $\text{rect}_{\tau}(t)$ per rappresentare l'impulso, mentre l'argomento $(t - nT)$ indica una *traslazione temporale* di ciascun rettangolo *a destra* (vedi § 1.5.2)¹⁸ (ossia verso i valori *positivi* di t) di nT istanti, cosicché la sommatoria rappresenta appunto la replica dello stesso impulso rettangolare infinite volte in avanti ed all'indietro.

Il calcolo dei coefficienti di Fourier per il segnale in questione non presenta particolari difficoltà, ma l'esito si presta a considerazioni interessanti. Applicando un risultato

¹⁶In questo caso in virtù dell'uguaglianza $j^2 = -1$ il termine tra parentesi graffe diviene

$$\begin{aligned} &R_n \cos(2\pi nFt) + jR_n \sin(2\pi nFt) + jI_n \cos(2\pi nFt) - I_n \sin(2\pi nFt) + \\ &R_n \cos(2\pi nFt) - jR_n \sin(2\pi nFt) - jI_n \cos(2\pi nFt) - I_n \sin(2\pi nFt) \end{aligned}$$

che si semplifica nel risultato mostrato.

¹⁷Il termine DUTY CYCLE si traduce *ciclo di impegno*, ed è definito come il rapporto percentuale tra il tempo per cui l'onda quadra è diversa da zero, ossia $\text{duty cycle} = \frac{\tau}{T} * 100 \%$.

¹⁸Oppure *a sinistra*, qualora n sia negativo e quindi $-nT$ positivo.

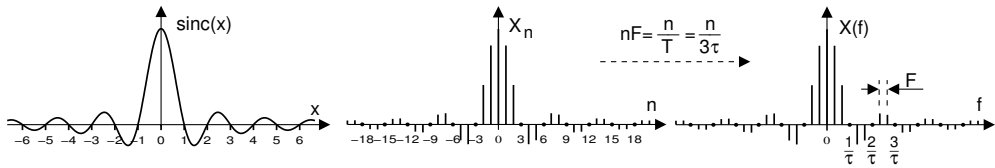


Figura 2.2: Funzione sinc (x) e coefficienti di Fourier dell'onda quadra

noto¹⁹, si ottiene

$$\begin{aligned}
 X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi n F t} dt = \\
 &= A \frac{1}{T} \frac{e^{-j2\pi n F t}}{-j2\pi n F} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = A \frac{1}{T} \frac{\tau}{\pi n F \tau} \frac{e^{j2\pi n F \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi n F \frac{\tau}{2}}}{2j} = \\
 &= A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\pi n F \tau)}{\pi n F \tau} = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}(n F \tau)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

in cui nella seconda uguaglianza gli estremi di integrazione sono stati ristretti all'intervallo di effettiva esistenza del segnale, mentre la penultima uguaglianza si giustifica ricordando le formule di Eulero.

Il risultato (2.11) ottenuto mostra come i coefficienti X_n della serie di Fourier per l'onda rettangolare dipendano dai valori di $\frac{\sin(\pi n F \tau)}{\pi n F \tau}$ calcolati per n intero; tale espressione viene però rappresentata nei termini della funzione *seno cardinale* (vedi pag. 21)

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \tag{2.12}$$

che ricorre spesso nel testo, che è raffigurata nella parte sinistra di fig. 2.2, e che *passa da zero* per valori *interi* dell'argomento x , tranne che per $x = 0$, dove vale uno.

Nella parte centrale di fig. 2.2 è mostrato l'andamento degli X_n che, qualora si ponga $\tau = \frac{T}{3}$ (corrispondente al duty cycle del 33%) e ricordando che $F = 1/T$, valgono $X_n = \frac{A}{3} \text{sinc}(n/3)$, producendo dunque valori di X_n *nulli* in corrispondenza degli indici $n = 3, 6, 9, \dots$

La parte destra di fig. 2.2 mostra ancora il valore dei coefficienti X_n , ma lungo una scala in *Hertz*, dato che il coefficiente X_n di indice n individua l'ampiezza della componente a frequenza $nF = \frac{n}{T}$ relativa all' n -esima armonica, che per $\tau = \frac{T}{3}$ è pari ad $nF = \frac{n}{T} = \frac{n}{3\tau}$ Hz: quindi i valori di n per cui gli X_n si annullano corrispondono alle frequenze $1/\tau, 2/\tau, 3/\tau, \dots$ e dipendono dalla durata τ del singolo impulso, mentre la spaziatura tra le armoniche è pari ad $F = \frac{1}{T}$ e dipende esclusivamente dal *periodo* della forma d'onda. A partire da tali considerazioni, valutiamo come si modificano i coefficienti X_n al variare di τ e di T .

Relazione tra i coefficienti della serie ed i parametri dell'onda quadra La parte in alto di fig. 2.3 mostra quattro possibili modi di variare l'onda quadra di partenza: la colonna di sinistra rappresenta il caso in cui il periodo T si mantenga costante, mentre

¹⁹Sappiamo infatti che $\frac{\partial}{\partial x} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x}$, e quindi $\int_a^b e^{f(x)} dx = 1/\frac{\partial f(x)}{\partial x} \cdot e^{f(x)} \Big|_a^b$

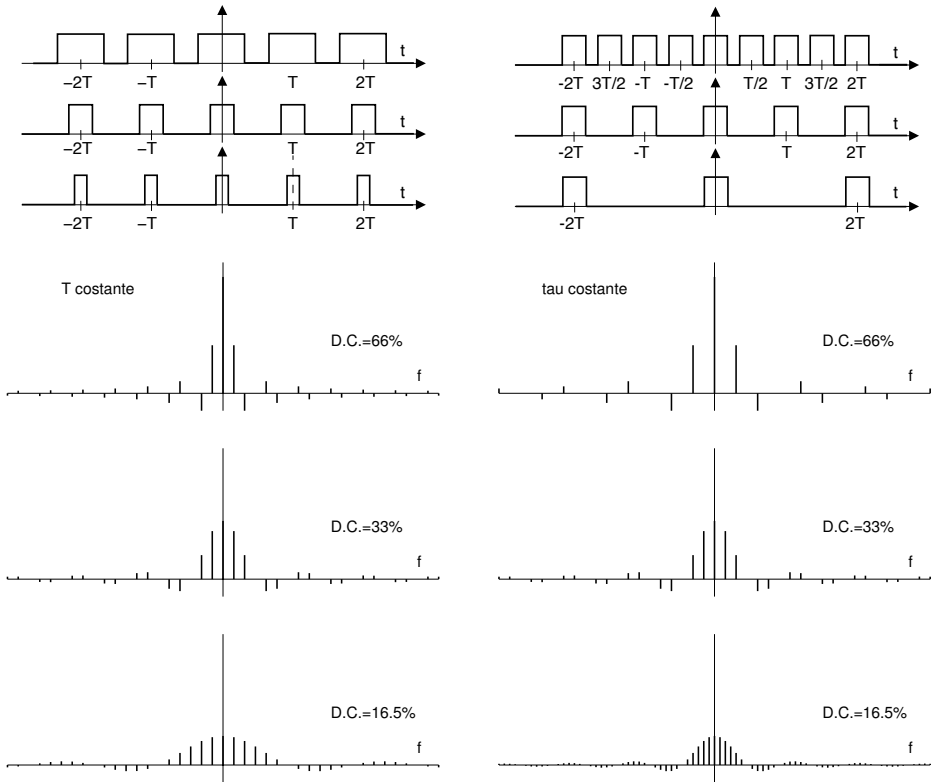


Figura 2.3: Modifiche allo spettro di ampiezza per variazioni della forma d'onda

la durata τ della fase attiva di ogni ciclo *raddoppia* (prima riga) o si *dimezza* (terza riga), mentre la colonna di destra considera il caso in cui τ si mantiene invariato, mentre il periodo T si dimezza o raddoppia in modo da ottenere lo stesso duty cycle $\frac{\tau}{T}$ di sinistra, ovvero pari al 66% (prima riga), 33% (al centro) o 12,5% (terza riga).

La parte inferiore di Fig. 2.3 mostra le corrispondenti variazioni per i valori dei coefficienti dello sviluppo in serie, calcolate facendo uso della (2.11), e raffigurati su di una scala in Hertz. Sul lato sinistro (caso del periodo costante) osserviamo che le armoniche mantengono la stessa spaziatura $\frac{1}{T}$, ma l'involuppo sinc ($nF\tau$) si *contrae* ed *espande* rispettivamente. Il lato destro della figura (caso di τ costante) mostra come sia l'involuppo degli X_n a rimanere costante, mentre le armoniche si *diradano* (sopra) ed *infittiscono* (sotto) rispettivamente all'aumentare ed al diminuire del periodo. Infine, notiamo come al diminuire del duty cycle si assista in entrambi i casi ad una riduzione dell'ampiezza degli X_n , legata alla riduzione di potenza del segnale (vedi sezione 2.3).

2.2.2 Serie di Fourier troncata

Come affermato al § 2.2, la serie di Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt}$ permette di riottenere esattamente il segnale $x(t)$ a partire da *tutti* i valori X_n ; analizziamo ora cosa accade qualora la sommatoria sia invece *troncata*, ossia limitata ai $2N + 1$ termini centrati

attorno ad $n = 0$, utilizzando cioè solamente i coefficienti X_n con indice $-N \leq n \leq N$. A tal fine, consideriamo un'onda *quadra* con duty-cycle del 50%

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}_{\tau/2}(t - kT)$$

per la quale al § 2.2.1.4 abbiamo ottenuto l'espressione $X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}(nF\tau)$ per i relativi coefficienti di Fourier, che per $\tau = \frac{T}{2}$ fornisce $X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$, diverso da zero solo con n *dispari*²⁰. Dalla relazione (2.12) otteniamo che $\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} n / \pi n$, e possiamo dunque esprimere i coefficienti di Fourier dell'onda quadra come

$$X_0 = \frac{1}{2}; \quad X_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n} & \text{con } n \text{ dispari} \\ 0 & \text{con } n \text{ pari} \end{cases}$$

Essendo inoltre $x(t)$ reale pari, sappiamo che $x(t)$ può essere espresso come serie di coseni

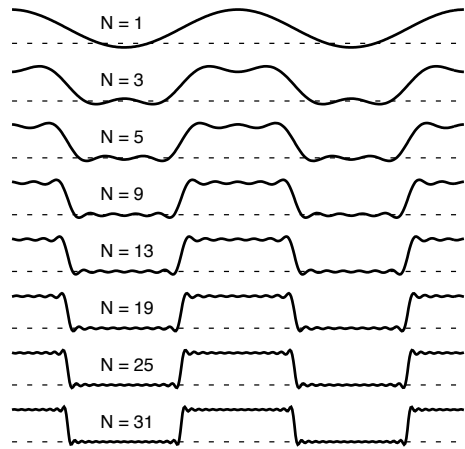
$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2X_n \cos(2\pi nFt)$$

che si presta ad essere facilmente calcolato numericamente e graficato arrestando ad N lo sviluppo in serie

$$\widehat{x}_N(t) = X_0 + \sum_{n=1}^N 2X_n \cos(2\pi nFt)$$

producendo il risultato mostrato in figura per diverse scelte di N .

Come era da aspettarsi al crescere di N la ricostruzione è sempre più accurata, tranne che per le oscillazioni in prossimità della discontinuità, che prendono il nome di *fenomeno di Gibbs*²¹. Da un punto di vista *informale*, accade che l'assenza delle componenti armoniche a frequenza $f = nF$ *più elevata* fa sì che l'errore si localizzi in prossimità degli istanti in cui $x(t)$ varia *più velocemente*. Da un punto di vista *pratico*, il caso studiato è un esempio di cosa può succedere quando un segnale viene privato delle sue componenti a frequenza più elevata, come ad esempio a seguito di un *filtraggio passa-basso*. Da un punto di vista *analitico*, si dimostra che l'errore $e_N(t) = x(t) - \widehat{x}_N(t)$ ha media quadratica $\frac{1}{T} \int e^2(t) dt$ minima, e risulta *ortogonale* (vedi § 2.4) a $\widehat{x}_N(t)$.



2.3 Teorema di Parseval

A pag. 15 abbiamo definito la potenza di un segnale $x(t)$ come il valor medio del suo quadrato, ovvero $\mathcal{P}_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(t)|^2 dt$, facendo poi osservare come nel caso di segnale periodico decada la necessità del passaggio al limite limitando l'integrale

²⁰Si può mostrare che le armoniche *pari* risultano nulle per *tutti* i segnali periodici *alternativi*, ovvero per i quali (a parte una eventuale componente continua) un semiperiodo eguaglia l'altro, cambiato di segno.

²¹Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Fenomeno_di_Gibbs

ad un periodo T , ovvero $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$. Il teorema di Parseval ci fornisce un modo alternativo di ottenere la stessa grandezza a partire dai coefficienti X_n del suo sviluppo in serie, risultando

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (2.13)$$

Per provare che è vero, sviluppiamo i calcoli generalizzandoli al caso di un segnale complesso:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x^*(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_n X_n e^{j2\pi n Ft} \right] \left[\sum_m X_m^* e^{-j2\pi m Ft} \right] dt = \\ &= \sum_n \sum_m X_n X_m^* \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n X_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R_n^2 + I_n^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ortogonalità degli esponenziali complessi Nel passare dalla terza alla quarta riga della (2.14) si è fatto uso del risultato

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \begin{cases} 0 & \text{con } m \neq n \\ 1 & \text{con } m = n \end{cases} \quad (2.15)$$

che deriva dalla circostanza che, ponendo $k = n - m$, la funzione integranda è pari a $\cos(2\pi \frac{k}{T} t) + j \sin(2\pi \frac{k}{T} t)$ e dunque uguale ad 1 quando $k = 0$, e co-sinusoidale con periodo $\frac{T}{k}$ per $k \neq 0$. Mentre quindi per $m = n$ ovvero $k = 0$ l'integrale vale T , quando invece $k \neq 0$ presenta un numero intero k di periodi entro l'intervallo di integrazione T , dando luogo ad un valor medio nullo: ciò comporta la scomparsa dei termini con $m \neq n$ dalla sommatoria doppia in (2.14). In base ai principi di algebra vettoriale forniti al § 2.4, la proprietà appena illustrata viene indicata come *ortogonalità* degli esponenziali complessi.

Spettro di potenza per segnali periodici Tornando ad esaminare il risultato $\mathcal{P}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$ espresso dal teorema di Parseval, notiamo che $|X_n|^2$ è la potenza \mathcal{P}_n della sola n -esima componente armonica $X_n e^{j2\pi n Ft}$ di $x(t)$:

$$\mathcal{P}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [X_n e^{j2\pi n Ft}] [X_n^* e^{-j2\pi n Ft}] dt = \frac{|X_n|^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = |X_n|^2$$

e quindi

La potenza totale \mathcal{P}_x di un segnale periodico $x(t)$ è pari alla somma delle potenze delle sue componenti armoniche

Si presti attenzione che il risultato è una diretta conseguenza dell'ortogonalità degli esponenziali complessi: infatti la potenza di una somma *non* è in generale pari alla

somma delle potenze²²; l'uguaglianza ha luogo solo nel caso in cui gli addendi siano *ortogonali*.

La successione $\{\mathcal{P}_n\} = \{\dots, |X_{-k}|^2, \dots, |X_0|^2, \dots, |X_k|^2, \dots\}$ rappresenta dunque il modo con cui la potenza totale *si ripartisce* tra le diverse armoniche a frequenza $f = nF$, e prende il nome di *spettro di potenza* del segnale $x(t)$. Osserviamo che necessariamente i termini $\mathcal{P}_n = |X_n|^2$ risultano reali e positivi; inoltre se $x(t)$ è reale la proprietà di simmetria coniugata comporta che $|X_n|^2 = |X_{-n}^*|^2 = |X_{-n}|^2$, e quindi $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{-n}$; pertanto un segnale *reale* è caratterizzato da uno spettro di potenza *pari*.

Esempio Determiniamo lo spettro di potenza di un'onda quadra di ampiezza unitaria. Essendo $X_n = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$, si ottiene $\{\mathcal{P}_n\} = \{|X_n|^2\} = \frac{1}{4} \{\text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right)\}$.

Potenza di un coseno Cogliamo l'occasione per verificare il risultato di pag. 15 relativo alla potenza di un coseno di ampiezza A . Applicando il teorema di Parseval ai coefficienti calcolati a pag. 41 si ottiene:

$$\mathcal{P}_x = |X_1|^2 + |X_{-1}|^2 = 2 \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$$

2.4 Spazio dei segnali

Esiste un modo di affrontare l'analisi dei segnali rappresentando gli stessi come elementi di uno *spazio vettoriale*²³, estendendo così ai primi le proprietà algebriche e geometriche valide per i secondi. In questa sezione viene prima sinteticamente rivisitata la teoria degli spazi algebrici per i quali è definito un operatore di prodotto scalare, e quindi individuate le possibili corrispondenze tra le proprietà dei vettori e quelle dei segnali, riuscendo così a realizzare una sintesi unificante in relazione ai concetti di *base di rappresentazione*, *ortogonalità*, e *trasformazione unitaria*. Si accenna infine a come molti degli integrali che sono studiati nel testo (trasformata di Fourier e di Hilbert, convoluzione, correlazione) possano essere ricondotti al calcolo di un *prodotto scalare*, a sua volta associato al concetto di *operatore funzionale*, ossia di funzioni che dipendono da una seconda funzione.

2.4.1 Spazio metrico

Consiste in un insieme \mathcal{A} di elementi (qualunque) per il quale esiste un modo per valutare la *distanza* (o *metrica*) tra elementi, ossia un operatore $d(x, y)$ che associa ad ogni coppia di elementi $x, y \in \mathcal{A}$ un numero *reale*, e per il quale²⁴

²²In generale risulta, con la notazione di prodotto scalare $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ tra vettori-segnali \bar{a} e \bar{b} introdotta al § 2.4: $\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$.

²³Uno spazio vettoriale è la generalizzazione del ben noto *spazio euclideo*, i cui elementi sono descritti da una n -pla di numeri reali detto *vettore* $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$, e che estende quello mono-, bi- o tri-dimensionale rispettivamente legato a retta, piano e spazio in senso geometrico. Le quantità x_i costituiscono dunque le *coordinate* di un punto, ovvero dove si colloca *la testa* di un vettore che parte dall'origine, ed individuano *quanto* di quel vettore è dovuto al contributo di ciascuna delle *componenti* associate ai *versori* della base di rappresentazione.

²⁴Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_(matematica)). Un esempio di distanza particolarmente *poco utile*, ma che rispetta le condizioni mostrate, è definita come $d(x, y) =$

- $d(x, y) \geq 0$ nulla solo se $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ - simmetria
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ - disuguaglianza triangolare

La distanza è un concetto *topologico* che permette di definire *l'intorno* di un punto nello spazio.

Spazio completo Identifica uno spazio metrico in cui il limite a cui tende una successione fa parte dell'insieme stesso²⁵. Uno spazio metrico *non* completo è sempre contenuto in uno spazio completo *più grande*, che ne costituisce il completamento, come ad esempio l'insieme dei numeri razionali è contenuto nell'insieme (completo) dei numeri reali, ottenuto dal primo con l'aggiunta dei numeri irrazionali.

2.4.2 Spazio lineare

Un insieme \mathcal{A} di elementi viene detto *spazio lineare* (o *spazio vettoriale*) su di un campo K ²⁶, quando sono definite le operazioni di *somma* tra elementi $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{A}$ e di *moltiplicazione* degli stessi per dei coefficienti $\lambda \in K$, e queste due operazioni danno come risultato ancora un elemento dell'insieme²⁷, in modo che lo spazio acquisisca le proprietà di una *struttura algebrica*. Oltre al caso intuitivo dello *spazio euclideo* \mathbb{R}^n da cui la nozione di spazio trae origine, e quello \mathbb{C}^n i cui vettori sono descritti da elementi complessi, ricadono in questo caso anche lo spazio dei segnali con periodo T , quello dei segnali di energia, e quello dei segnali di potenza.

Base di rappresentazione Scegliendo un *qualunque* sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ di n vettori \bar{u}_i *linearmente indipendenti*²⁸, la combinazione lineare

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

²⁵La definizione analitica di completezza consiste nell'affermare che tutte le successioni di Cauchy (o successioni fondamentali) sono convergenti, in cui una successione è di Cauchy se, comunque fissato un $\varepsilon > 0$, da un certo punto in poi tutti i suoi elementi sono tra loro più vicini di ε , e dunque la loro distanza tende ad annullarsi; se poi la successione converge *ad un elemento dello spazio stesso*, allora lo spazio è *completo*. Pertanto una successione convergente è di Cauchy, ma non è detto l'inverso. Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_metrico_completo

²⁶ K può essere il campo dei numeri reali \mathbb{R} , o quello dei numeri complessi \mathbb{C} , vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Campo_(matematica)). Qualora il campo sia complesso, anche le componenti del vettore lo sono; d'altra parte, le relazioni sviluppate per il caso complesso continuano a valere anche nel caso di vettori a componenti reali.

²⁷I perfezionisti possono volersi sentir anche dire che deve esistere l'elemento neutro (zero) rispetto alla somma, che quest'ultima deve essere commutativa, associativa, e distributiva rispetto al prodotto, e che ogni elemento \bar{x} deve avere il suo opposto $-\bar{x}$. Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_vettoriale

²⁸L'indipendenza lineare tra vettori comporta che $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i = 0$ solo se $\lambda_i = 0$ per tutti gli i .

dei vettori \bar{u}_i con coefficienti $x_i \in K$ esprime un qualunque elemento $\bar{x} \in \mathcal{A}$ purché n sia pari alla *dimensione* dello spazio, ed in tal caso l'insieme \mathcal{B} dei vettori \bar{u}_i è indicato come sua *base di rappresentazione*²⁹.

Spazio normato Individua uno spazio vettoriale per il quale sia definita la *norma* (o *lunghezza*) $\|\bar{x}\|$ dei suoi elementi³⁰. Come si può verificare dalle proprietà che la definiscono

- $0 \leq \|\bar{x}\| < \infty$ con $\|\bar{x}\| = 0$ se e solo se $\bar{x} = 0$
- $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$ omogeneità con $\lambda \in K$
- $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ disuguaglianza triangolare

la norma corrisponde alla definizione di distanza $d(\bar{x}, \bar{y})$ data al § 2.4.1, semplicemente ponendo $d(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \|\bar{x} - \bar{y}\|$. In tal modo lo spazio normato oltre che algebrico (perché lineare) diviene anche *metrico*, con una metrica che è *indotta* dalla norma; uno spazio normato che è anche completo è detto *spazio di Banach*³¹.

Norma per spazi euclidei Per uno spazio vettoriale con un numero finito n di dimensioni ed *isomorfo* ad \mathbb{R}^n si può definire norma $\|\bar{x}\|_p$ di ordine p (con $p = 0, 1, \dots, \infty$) del vettore $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$ come la quantità

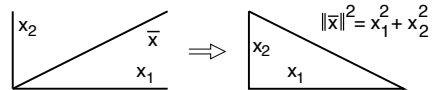
$$\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} \quad (2.17)$$

che per $p = 2$ rappresenta una estensione del *teorema di Pitagora*, mentre la distanza di ordine p *indotta* tra coppie di vettori si scrive come

$$d_p(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p} \quad (2.18)$$

che nel caso $p = 2$ fornisce la ben nota *distanza euclidea*³² $d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Esempio Il teorema di Pitagora stabilisce che $(\|\bar{x}\|)^2 = x_1^2 + x_2^2$, ossia che il quadrato costruito sull'ipotenusa è pari alla somma dei quadrati dei costruiti sui cateti, come in figura.



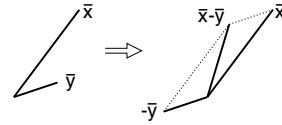
²⁹Per una simulazione bidimensionale si veda ad esempio <https://www.geogebra.org/m/mXkurnd>

³⁰Vedi anche [https://it.wikipedia.org/wiki/Norma_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Norma_(matematica))

³¹Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Banach

³²Per altri valori di p si ottengono risultati che hanno senso in particolari circostanze: ad esempio per $p = 1$ si ha $\|\bar{x} - \bar{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ detta distanza *Manhattan*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Geometria_del_taxi, mentre per $p = \infty$ si ottiene $\|\bar{x} - \bar{y}\|_\infty = \max_i \{|x_i - y_i|\}$, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Distanza_di_Cebicev.

La geometria euclidea calcola la distanza tra due punti attraverso la costruzione grafica dei vettori le cui componenti sono le coordinate dei punti come in figura, e dunque $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ ha componenti $z_1 = x_1 - y_1$ e $z_2 = x_2 - y_2$.



2.4.3 Spazio prodotto interno e spazio di Hilbert

Torniamo ora *indietro* e ripartiamo da un *generico* spazio lineare definito su di un campo K reale o complesso, per il quale non è definita alcuna norma, mentre invece è definito un operatore detto *prodotto scalare* o prodotto *interno*³³, indicato come $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, e che associa uno scalare $\lambda \in K$ a coppie di generici vettori \bar{x} ed \bar{y} in modo che

- $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^*$ proprietà *Hermitiana*, ovvero *commutativa* se $K = \mathbb{R}$
- $\langle a\bar{x} + b\bar{y}, \bar{z} \rangle = a \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + b \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$ proprietà *lineare e distributiva*
- $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ reale, con $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ se e solo se $\bar{x} = 0$

da cui si ottiene che nel caso complesso deve risultare anche $\langle \bar{x}, a\bar{y} \rangle = a^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ detta proprietà *antilineare*³⁴. Osserviamo quindi che la relazione $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ può essere efficacemente utilizzata come *norma* di \bar{x} , semplicemente ponendo³⁵

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \quad (2.19)$$

senza dover ricorrere a *definizioni* come per la (2.17). L'esistenza del prodotto interno pertanto *induce* una norma (e dunque una *distanza*) rendendo *metrico* lo spazio lineare, che viene detto di *Hilbert* qualora sia anche *completo*³⁶; inoltre, il prodotto interno aggiunge allo spazio anche la nozione di *angolo* θ tra vettori, come discutiamo ora.

Disuguaglianza di Schwartz Esprime la relazione³⁷

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|^2 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \cdot \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \quad (2.20)$$

³³In genere il termine *prodotto interno* si riferisce al caso in cui lo spazio sia di natura *complessa*, mentre si dice *prodotto scalare* qualora sia definito sul campo dei numeri reali. Nel seguito potrà essere usato *prodotto scalare* anche nel caso complesso.

³⁴Infatti risulta $\langle \bar{x}, a\bar{y} \rangle = \langle a\bar{y}, \bar{x} \rangle^* = (a \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle)^* = a^* \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle^* = a^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$

³⁵Le proprietà $0 \leq \|\bar{x}\| < \infty$ e $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$ che definiscono una norma sono facilmente verificate, mentre per dimostrare che $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ ovvero $\sqrt{\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle} \leq \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} + \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$ occorre utilizzare il risultato (2.20). Scriviamo infatti

$$\begin{aligned} \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\Re \{ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \} + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \\ &= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2 \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \end{aligned}$$

in quanto $\Re \{ \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \} \leq |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ dove la *seconda* disuguaglianza è appunto la (2.20). Dunque, dato che in base alla (2.19) si ha $\|\bar{x} + \bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y} \rangle}$, si ottiene $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

³⁶Ogni spazio di Hilbert è quindi anche di Banach, ma il viceversa è vero solo se la metrica è indotta da un operatore di prodotto interno, che rispetti le proprietà su indicate; vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Hilbert

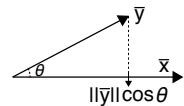
³⁷Innanzitutto osserviamo che deve risultare $\bar{x}, \bar{y} \neq 0$, altrimenti la (2.20) è banalmente $0 = 0$. Appliciamo quindi la relazione $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ ad un vettore $\bar{x} - \lambda\bar{y}$ con un qualunque $\lambda \in K$ (sia per $K = \mathbb{R}$ che

ovvero $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$, e quindi afferma che il prodotto interno tra vettori non è mai maggiore del prodotto delle rispettive lunghezze, eguagliandolo solo se i vettori sono proporzionali, ossia $\bar{x} = \alpha \bar{y}$ ³⁸, o in termini geometrici, *paralleli*.

Angolo tra vettori Dopo aver notato che dalla (2.20) si ottiene $0 \leq \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|} \leq 1$, indichiamo i due estremi 0 e 1 come condizioni di *ortogonalità* e *parallelismo*, e dato che esiste un solo angolo θ tale che $\cos \theta = \frac{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|}{\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|}$, identifichiamo θ come l'angolo³⁹ tra \bar{x} e \bar{y} , in modo che la (2.20) possa essere letta nel consueto modo della fisica e della geometria, ovvero

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \cdot \cos \theta \quad (2.21)$$

dove $\|\bar{y}\| \cdot \cos \theta$ rappresenta la proiezione di $\|\bar{y}\|$ verso la direzione di \bar{x} . A parole, l'eq. (2.21) si legge come *il prodotto scalare è pari al prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo compreso tra i vettori*, e grazie a questo nuovo risultato, possiamo affermare che



Due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo, ossia
 $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$.

Procediamo con l'individuare una *modalità di calcolo* per il prodotto scalare, restringendo per ora l'analisi al caso di spazi a dimensione n finita e *isomorfi* (in quanto con base ortogonale) ad uno spazio euclideo \mathbb{R}^n , ovvero \mathbb{C}^n nel caso più generale di vettori a componenti complesse.

Prodotto scalare tra vettori espressi su di una medesima base ortogonale Come espresso dalla (2.16) i vettori \bar{x} di uno spazio lineare n -dimensionale \mathcal{A} , tanto più se di Hilbert, possono essere espressi come una combinazione lineare

per $K = \mathbb{C}$), scrivendo

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\bar{x} - \lambda \bar{y}\|^2 &= \langle \bar{x} - \lambda \bar{y}, \bar{x} - \lambda \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle - \langle \lambda \bar{y}, \bar{x} \rangle + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \\ &= \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle - \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle^* + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\Re \{ \langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle \} + \lambda^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \end{aligned}$$

Ponendo ora $\lambda = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$ e tenendo conto che $\langle \bar{x}, \lambda \bar{y} \rangle = \lambda^* \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ e che $\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$ è reale, otteniamo

$$0 \leq \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2\Re \left\{ \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^*}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \right\} + \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle^2} \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 2 \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} + \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2}{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}$$

da cui si ottiene la (2.20). Approfondimenti su

https://it.wikipedia.org/wiki/Disuguaglianza_di_Cauchy-Schwarz.

³⁸Infatti in tal caso la (2.20) diviene

$$|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = |\langle \alpha \bar{y}, \bar{y} \rangle| = |\alpha \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle| = \left| \alpha \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \right| = \sqrt{\alpha^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

dato che $\alpha^2 \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \alpha \alpha^* \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle = \langle \alpha \bar{y}, \alpha \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle$.

³⁹Come fatto notare si ottiene $\cos \theta = 1$ quando \bar{x} e \bar{y} sono paralleli per cui la (2.20) è un'uguaglianza. Dal canto suo $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ è un numero (complesso o reale a seconda se $K = \mathbb{C}$ o \mathbb{R}), e dunque l'operazione di modulo $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|$ limita il risultato a $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Quindi θ è un angolo *un po' per modo di dire*; ciononostante, il concetto di parallelismo e ortogonalità che ne deriva è molto utile.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$$

di vettori $\bar{u}_i \in \mathcal{B}$ linearmente indipendenti, ovvero \mathcal{B} è la base di rappresentazione di \mathcal{A} mediante coefficienti $\{x_i\}$. Se ora aggiungiamo che tra gli elementi di \mathcal{B} debba sussistere la condizione di ortogonalità a coppie, ovvero $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$ per tutti gli $i \neq j$, l'intera base è detta *ortonormale*, ed i coefficienti x_i si determinano⁴⁰ eseguendo il prodotto scalare tra \bar{x} ed ognuno di essi

$$x_i = \frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle}{\|\bar{u}_i\|^2} \quad (2.22)$$

Possiamo a questo punto valutare il *prodotto scalare* tra coppie di vettori $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$ e $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i \bar{u}_i$ con coefficienti $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ ottenuti mediante la (2.22), nei termini del prodotto scalare tra i vettori dei coefficienti, ovvero:⁴¹

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \|\bar{u}_i\|^2 \quad (2.23)$$

Calcolo della norma su di una base ortonormale Se i vettori \bar{u}_i oltre ad essere ortogonali hanno tutti norma pari ad uno ovvero $\|\bar{u}_i\|^2 = \langle \bar{u}_i, \bar{u}_i \rangle = 1$ essi vengono detti *unitari*, la base è detta *ortonormale*⁴², e dalla (2.23) si ottiene per il prodotto scalare tra \bar{x} e \bar{y}

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad (2.24)$$

mentre la norma *quadratica* di un generico vettore \bar{x} si ottiene come

$$\|\bar{x}\|^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \quad (2.25)$$

che corrisponde al quadrato della (2.17) per $p = 2$. Quindi, quando la base \mathcal{B} di rappresentazione è ortonormale, ed il prodotto interno è definito dalla (2.24), la norma indotta (2.25) assume la stessa forma della (2.17) corrispondente all'ordine $p = 2$, accomunando il comportamento degli spazi di Hilbert a quello noto per la geometria euclidea, in cui la base è appunto ortonormale.

Una forma più generale per indicare sia l'ortogonalità che l'unitarietà utilizza la notazione $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \delta_{i,j}$, in cui $\delta_{i,j}$ è detto *delta di Kronecker* che vale 1 se $i = j$ e zero in caso contrario. La sua versione continua è il *delta di Dirac*, introdotto al § 3.4.

⁴⁰E sufficiente eseguire il prodotto scalare di ambo i membri di $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i$ per ciascuno dei vettori \bar{u}_j per ottenere $\langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = x_j \langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle = x_j \|\bar{u}_j\|^2$ dato che $\langle \bar{u}_i, \bar{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$ e che $\langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle = \|\bar{u}_j\|^2$.

⁴¹Scriviamo infatti $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i \bar{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j \bar{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i \bar{u}_i, y_j \bar{u}_j \rangle$ ma, essendo \bar{u}_i e \bar{u}_j ortogonali la doppia sommatoria si riduce ad una sola, ovvero $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i \bar{u}_i, y_i \bar{u}_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \|\bar{u}_i\|^2$.

⁴²Da una qualsiasi base ortogonale se ne può ottenere una diversa ma con elementi di norma unitaria, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Base_ortonormale

Notiamo infine come il prodotto scalare $\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle$ tra \bar{x} ed un vettore della base ortonormale sia una *proiezione ortogonale*, nel senso che potendo scrivere $\langle \bar{x}, \bar{u}_i \rangle = |x| \cdot |\bar{u}_i| \cdot \cos \theta$ (eq. (2.21)) ed essendo \bar{u}_i a lunghezza unitaria, si ottiene la lunghezza dell'ombra del primo nella direzione del secondo.

Distanza indotta dal prodotto scalare Si esprime come la *norma del vettore differenza* ovvero applicando la (2.25)

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\|\bar{x} - \bar{y}\|^2} = \sqrt{\langle \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

che a sua volta corrisponde a quella di ordine $p = 2$ che abbiamo definito per gli spazi euclidei (eq. (2.18)); si ricordi che nel caso di vettori complessi risulta $|x_i - y_i|^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i)^* = (\Re\{x_i - y_i\})^2 + (\Im\{x_i - y_i\})^2$.

Esercizio Dati due vettori complessi $\bar{x} = [1 + j2, 0]$ e $\bar{y} = [3 + j4, -j2]$ calcolare la norma di entrambi, e la loro distanza. Si ha $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{(1^2 + 2^2) + 0^2} = \sqrt{5}$ e $\|\bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle} = \sqrt{(3^2 + 4^2) + 2^2} = \sqrt{29}$; mentre $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = [1 + j2 - 3 - j4, 0 + j2] = [-2 - j2, j2]$ e dunque $d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(2^2 + 2^2) + 2^2} = \sqrt{12}$.

2.4.4 Spazi a dimensionalità infinita

I risultati a cui siamo pervenuti, e che sono stati dimostrati per spazi con un numero n finito di dimensioni, mantengono validità anche qualora detto numero divenga infinito, come per gli spazi dei segnali periodici o di energia.

Un esempio di spazio con infinite (ma *numerabili*) dimensioni è quello indicato come l^p e descritto da un vettore le cui componenti sono elementi di una *successione* $\bar{x} = \{x_i\}$ con $i = 1, 2, \dots, \infty$, e per le quali la norma $\|\bar{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$ converge ad un numero finito. La successione X_n dei coefficienti di una serie di Fourier rispecchia tale proprietà per $p = 2$, e la corrispondente norma quadratica $(\|\bar{x}\|_2)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |X_n^2|$ esprime⁴³ la potenza di \bar{x} nei termini del teorema di Parseval.

Un altro spazio ad infinite dimensioni (stavolta *non numerabili*) è quello L^p delle *funzioni* $\bar{x} = x(t)$ la cui p -esima potenza è sommabile⁴⁴; la norma di ordine p in questo caso viene definita come $\|x(t)\|_p = (\int x^p(t) dt)^{1/p}$ e per $p = 2$ ritroviamo la classe dei *segnali di energia*, alla cui energia corrisponde la *norma quadratica* $\mathcal{E}_x = (\|x(t)\|_2)^2 = \int x^2(t) dt$, mentre la distanza $d_2(x(t), y(t))$ tra segnali è la radice dell'errore quadratico $\int |x(t) - y(t)|^2 dt$.

Anche se non ci addentreremo nei dettagli analitici soggiacenti, il tipo di equivalenze appena menzionate sono una conseguenza dell'adattare la definizione di prodotto

⁴³A chi si sta chiedendo dove siano finiti gli indici *negativi*, rispondo che gli indici sono stati *riorganizzati* alterandone la numerazione, tanto rimangono comunque di una infinità numerabile.

⁴⁴La L usata per definire tali insiemi sta per *Lebesgue*, legata cioè al modo di calcolare l'integrale che prende nome da tale matematico, e che assegna uguale valore all'integrale di due funzioni che differiscono in un insieme di punti *a misura nulla*, dette funzioni *uguali quasi ovunque*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Lebesgue e https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_Lp

scalare (2.24) ai casi a dimensionalità infinita, rendendo possibile associare alle relazioni ottenibili una interpretazione geometrica unificante.

2.4.4.1 Spazio dei segnali periodici

È quello descritto dall'insieme dei segnali periodici di periodo T , dato che può essere dotato di un operatore di prodotto interno tra segnali $x(t)$ ed $y(t)$ nella forma

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \quad (2.26)$$

che quando calcolato per $y(t) = x(t)$ permette di equiparare la *norma quadratica* di $x(t)$ alla relativa *potenza*

$$\|x(t)\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

e dunque la sua norma corrisponde al relativo *valore efficace* (pag. 15). Osserviamo che

- la base ortonormale di rappresentazione dei segnali periodici è costituita dai segnali $u_n = e^{j2\pi n Ft}$ con periodo $T = \frac{1}{F}$, in quanto per essi si ha $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = \delta_{n,m}$ come ottenuto nella (2.15). Si riconosce allora che la relazione eq. (2.6) rappresenta il prodotto scalare tra il segnale ed i vettori della base (2.22), dato che dalla (2.26) si ottiene⁴⁵ $\langle \bar{x}, \bar{u}_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n Ft} dt = X_n$;
- l'espressione della serie di Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n Ft}$ (eq. (2.7)) costituisce la rappresentazione del segnale nei termini delle sue componenti ortogonali su base ortonormale, come espresso dalla (2.16);
- il risultato fornito dal teorema di Parseval $\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2$ (eq. (2.13)) non è altro che la (2.25), ovvero il calcolo della norma quadratica come somma dei quadrati delle componenti X_n di $x(t)$ rispetto ai vettori $e^{j2\pi n Ft}$ della base.

La differenza rispetto alla trattazione generale è che ora per descrivere lo spazio occorrono *infiniti* (ma numerabili) vettori della base; in tal senso, lo spazio (dei segnali con periodo T) è detto *separabile*, che nel contesto della teoria dei segnali significa che è costituito dalle sole frequenze *armoniche* della fondamentale.

Una seconda conseguenza dell'ortogonalità della base costituita dagli $e^{j2\pi n Ft}$ è che qualora dalla serie venga ommesso qualche termine (ovvero qualche indice n) ottenendo un diverso segnale $\hat{x}(t) = \sum_{incompleta} X_n e^{j2\pi n Ft}$, il corrispondente errore $x_e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, periodico anch'esso, giace su di un *sottospazio ortogonale* a quello esplorato dai vettori presenti nella serie, e (si dimostra che) ha la minima norma, e dunque potenza, possibile.

⁴⁵Ad esempio, la componente continua $X_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j0t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$ rappresenta il prodotto scalare tra $x(t)$ ed un segnale costante pari ad uno.

2.4.4.2 Spazio dei segnali di energia e di potenza

Definizione del prodotto interno Anche in questi due casi è possibile definire un operatore prodotto interno, che per segnali di energia prende la forma

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (2.27)$$

a cui corrisponde una *norma quadratica* $\|x(t)\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$ pari all'energia del segnale $\mathcal{E}_x = \|x(t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$. Per segnali di potenza invece il prodotto scalare si scrive come

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \quad (2.28)$$

a cui corrisponde una *norma quadratica* che è pari alla potenza del segnale $\mathcal{P}_x = \|x(t)\|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$.

Disuguaglianza di Schwartz La (2.20) può essere applicata sia ai segnali di energia che a quelli di potenza, in quanto le relative espressioni per il prodotto interno, quando sostituite nella (2.20), permettono di scrivere (nel caso di energia)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (2.29)$$

ovvero che il quadrato del prodotto scalare (ovvero dell'energia mutua, § 3.2) tra segnali è sempre inferiore al prodotto delle rispettive energie (o potenze), oppure uguale nel caso in cui un segnale sia proporzionale all'altro, ovvero $x(t) = a y(t)$. Per il caso dei segnali di potenza valgono le stesse parole, dopo aver sostituito la (2.29) con

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |y(t)|^2 dt$$

Questi concetti troveranno applicazione ad es. al § 3.2 relativamente all'energia mutua, al § 7.1.4 nel definire la correlazione tra segnali, al § 7.6 per l'analisi del filtro adattato... Ma lanciamoci prima su di una ulteriore speculazione, di cui tralasciamo il rigore teorico: buona parte delle relazioni affrontate nella prima parte del testo sono una forma di prodotto interno.

2.4.4.3 Spazio dei funzionali lineari definiti da un prodotto interno

Al § 1.6 si è definito un sistema come una trasformazione $\mathcal{T}[\cdot]$ che produce segnali di uscita in funzione di segnali di ingresso ovvero $y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$. Dal punto di vista dell'analisi $\mathcal{T}[\cdot]$ viene pensato come un operatore o funzionale⁴⁶ lineare (eq. (1.3)) che mappa i vettori \bar{x} dello spazio \mathcal{X} dei segnali di ingresso, in elementi \bar{y} di uno spazio \mathcal{Y} di segnali di uscita, eventualmente monodimensionale.

Qualora \mathcal{X} sia uno spazio di Hilbert (ossia completo e dotato di prodotto interno), allora qualunque funzionale $\mathcal{T}_\varphi[\bar{x}]$ può essere espresso nella forma di un prodotto interno

⁴⁶Vedi anche https://it.wikipedia.org/wiki/Analisi_funzionale

$$\mathcal{T}_{\bar{\varphi}}[\bar{x}] = \langle \bar{x}, \bar{\varphi} \rangle \quad (2.30)$$

tra il vettore $\bar{x} \in \mathcal{X}$ ed un altro vettore-segnale $\bar{\varphi}$ che caratterizza la trasformazione. La funzione $\bar{\varphi}$ è talvolta chiamata⁴⁷ la *funzione-kernel*, il *kernel integrale* o il *nucleo* di una trasformazione integrale, ma non in questo testo.

Se anche $\bar{\varphi} \in \mathcal{X}$ l'operatore (2.30) può fornire alcuni risultati ben noti discussi altrove nel testo. Ad esempio se $\bar{\varphi} = \bar{x}$ le espressioni per il prodotto scalare dei segnali (2.27) e (2.28) consentono di ottenere l'energia o la potenza di segnale \bar{x} ; in modo simile, se $\bar{\varphi} \neq \bar{x}$ si ottengono le formule per l'*energia mutua* (3.5) e l'*intercorrelazione* (7.6). Nell'intercorrelazione in particolare il vettore $\bar{\varphi}$ che caratterizza il funzionale dipende da *due* variabili $\bar{\varphi} = \varphi(t, \theta)$, in modo che il risultato del prodotto interno

$$\langle x(t), \varphi(t, \theta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi^*(t, \theta) dt = y(\theta)$$

dipenda dalla nuova variabile θ . Dato che stiamo portando esempi che rimandano ad argomenti trattati nei capitoli successivi, può essere opportuno tornare qui dopo aver svolto una prima fase di studio, almeno fino al cap. 7.

Prendiamo ora ad esempio il caso della *trasformata di Fourier* (3.1), che calcola

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle$$

e che costituisce dunque la proiezione di $x(t)$ nei confronti del segnale $e^{j2\pi ft}$, che a sua volta rappresenta il vettore $\varphi(t, f)$. A ben guardare, gli esponenziali complessi costituiscono una base *ortonormale* per i segnali di energia (§ 3.8.5), condizione che in questo spazio è definita come

$$\langle \varphi(t, f), \varphi(t, \lambda) \rangle = \delta(f - \lambda)$$

in cui δ è un *impulso di Dirac*. Da questa proprietà degli $e^{j2\pi ft}$ discende sia l'esistenza della *antitrasformata* nella forma (3.2), sia la proprietà di *unitarietà*⁴⁸ della trasformazione, ovvero di non alterare la lunghezza dei vettori nel passare dagli elementi dello spazio di segnale \mathcal{X} (funzione di t) e quelli dello spazio immagine \mathcal{Y} (funzione di f), e che dà luogo al teorema di Parseval.

In alcuni casi il vettore $\underline{\varphi}$ che caratterizza il funzionale (2.30) dipende da una *differenza* di variabili, ovvero

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t - \tau)$$

come nell'operazione di *setacciamento* (3.14), di *trasformata di Hilbert* (11.26), o di *convoluzione* (3.18): in quest'ultimo caso $\varphi(t, \tau) = h(t - \tau)$ è direttamente legato alla *risposta impulsiva* $h(t)$ che caratterizza completamente il *sistema*.

Se aver verificato che una convoluzione è dunque un *filtro* corrisponde ad un prodotto scalare e quindi ad un funzionale ovvero un *sistema* non ci è bastato, allarghiamo il discorso aggiungendo il fatto che l'insieme dei funzionali $\mathcal{T}_{\bar{\varphi}}$ che operano su di un medesimo spazio di Hilbert \mathcal{X} di ingresso costituisce *esso stesso* uno spazio di Hilbert,

⁴⁷Vedi ad esempio https://en.wikipedia.org/wiki/Integral_transform

⁴⁸Vedi ad es. https://en.wikipedia.org/wiki/Unitary_operator

detto *spazio duale*⁴⁹ \mathcal{X}^* , in cui la norma è definita come

$$\|\mathcal{T}_\varphi\| = \|\bar{\varphi}\| = \sqrt{\langle \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle}$$

e se $\|\bar{\varphi}\| < \infty$ il funzionale è *continuo*. Se inoltre \mathcal{X} possiede una base *ortonormale* $\{u_i(t)\}$ mediante la quale rappresentare i suoi vettori come $x(t) = \sum_{i=1}^n x_i u_i(t)$ in cui $x_i = \langle x(t), u_i(t) \rangle$, allora i funzionali di \mathcal{X}^* possono *a loro volta* essere rappresentati come una combinazione lineare di vettori-segnali.

Un modo diretto di procedere esprime il *segnale di uscita* $y(\theta) = \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[x(t)]$ come

$$y(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[u_i(t)] = \sum_{i=1}^n x_i v_i(\theta)$$

in cui⁵⁰ $v_i(\theta)$ è il risultato del funzionale \mathcal{T}_φ applicato ai vettori della base $u_i(t)$ di \mathcal{X} , che dunque opera sommando i suoi *vettori di risposta* $v_i(\theta)$ (che appartengono a \mathcal{Y}) con pesi pari alle componenti x_i di $x(t)$ *proiettate* sugli $u_i(t)$.

Esempio L'integrale di convoluzione $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$ esprime l'uscita $y(t)$ come combinazione lineare delle $h(t-\tau)$ effetto degli impulsi $\delta(t)$, che costituiscono una base ortonormale per $x(t)$ nei termini espressi dalla proprietà di setacciamento $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$, vedi § 3.4.

Non è però detto che $\{v_i(\theta)\}$ formi una base di vettori linearmente indipendenti per lo spazio di uscita \mathcal{Y} ; poniamo allora di conoscere una base ortonormale $\{\tilde{u}_i(\theta)\}$ per lo spazio \mathcal{Y} (⁵¹): in tal caso esiste un insieme di n vettori $\{z_i(t) \in \mathcal{X}\}$ che dipende sia da $\{\tilde{u}_i(\theta)\}$ che da $\{u_i(t)\}$ e dalla sua trasformata $\{v_i(\theta)\}$ ⁵², e che individua altrettanti funzionali $\mathcal{T}_{z_i}[x(t)] = \langle x(t), z_i(t) \rangle$ in modo da poter scrivere

$$y(\theta) = \sum_{i=1}^n \langle x(t), z_i(t) \rangle \tilde{u}_i(\theta) = \sum_{i=1}^n \mathcal{T}_{z_i}[x(t)] \tilde{u}_i(\theta)$$

decomponendo quindi \mathcal{T}_φ in n funzionali dipendenti dalla scelta delle basi.

2.5 Appendici

Nei diversi capitoli la sezione di appendice ospita dettagli che possono meritare una attenzione particolare.

⁴⁹Vedi ad es. https://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_duale

⁵⁰Infatti $v_i(\theta) = \mathcal{T}_{\varphi, \theta}[u_i(t)] = \langle u_i(t), \varphi(t, \theta) \rangle$. Ma è anche vero che $\langle u_i(t), \varphi(t, \theta) \rangle = \langle \varphi(t, \theta), u_i(t) \rangle^* = (\mathcal{T}_{u_i}[\varphi(t)])^*$ e dunque i segnali $v_i(\theta)$ sono anche coniugati alla proiezione di $\varphi(t)$ lungo il vettore della base $u_i(t)$.

⁵¹E dunque poter esprimere ogni suo vettore come $y(\theta) = \sum_{i=1}^n y_i \tilde{u}_i(\theta)$ in cui $y_i = \langle y(\theta), \tilde{u}_i(\theta) \rangle$ è la proiezione di $y(\theta)$ lungo $\tilde{u}_i(\theta)$.

⁵²La relazione che lega $z_j(t)$ alle altre grandezze dovrebbe risultare $z_j(t) = \sum_{i=1}^n \langle \tilde{u}_j(\theta), v_i(\theta) \rangle u_i(t)$, ma il testo *Signal Theory* di L.E. Franks che ho utilizzato per questa parte forse ha saltato qualche passaggio, o non ho avuto la pazienza di ricostruirli.

2.5.1 Convergenza della serie di Fourier

Illustriamo le condizioni *sufficienti* a garantire la convergenza della serie di Fourier (2.7), per ogni istante t , al segnale periodico $x(t)$ di partenza.

Condizioni di Dirichlet Qualora un segnale periodico $x(t)$, per t interno all'intervallo di un periodo $t \in (-T/2, T/2)$,

1. sia assolutamente integrabile, ovvero $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$;
2. presenti un numero finito di discontinuità di prima specie⁵³, ovvero sia continuo a tratti;
3. contenga un numero finito di massimi e minimi, ovvero sia derivabile ovunque, esclusi al più un numero finito di punti in cui la derivata presenta discontinuità di prima specie;

allora la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ eguaglia il valore $x(t)$ del segnale utilizzato per calcolarne i coefficienti $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$ in tutti i punti in cui $x(t)$ è continuo, mentre negli istanti di discontinuità di prima specie, fornisce un valore pari alla media dei valori limite destro e sinistro. Tali condizioni si applicano direttamente ai segnali $x(t)$ reali, mentre nel caso di segnali complessi, si applicano in modo indipendente alla parte reale ed a quella immaginaria. Inoltre le condizioni sono sufficienti e non necessarie, nel senso che anche se lo sviluppo di un segnale in serie di Fourier converge, non è detto che lo stesso soddisfi tali condizioni.

Nella pratica, i segnali che rappresentano fenomeni fisici sono *di energia*, cioè per essi si può assumere sempre verificata la condizione $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$, più debole della condizione $\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)| dt < \infty$, ma ciononostante quasi sempre è possibile ottenere lo sviluppo in serie; inoltre, tali segnali sono in pratica sempre continui, rendendo verificata la seconda condizione. Infine, nel caso ad esempio di un'onda triangolare (vedi § 2.5.2), la derivata soddisfa anche la terza condizione.

Rapidità di convergenza Svolgiamo ora qualche riflessione in merito alla velocità con cui i coefficienti X_n tendono a zero per $n \rightarrow \infty$. Si può mostrare che se un segnale soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora le ampiezze dei relativi coefficienti di Fourier rispettano l'andamento $|X_n| \leq \frac{\alpha}{n}$, ovvero le armoniche presentano ampiezze che si riducono con legge *almeno* inversa del corrispondente ordine. Un caso in cui vale l'uguaglianza è quello relativo all'onda quadra studiata al § 2.2.1.4, in cui sono presenti discontinuità di prima specie. Al contrario, per un'onda triangolare (§ 2.5.2) la velocità di smorzamento delle ampiezze è maggiore, risultando infatti del tipo $|X_n| = \frac{\alpha}{n^2}$. Ciò significa che volendo approssimare il segnale troncando la serie ad un indice N , nel caso di un'onda triangolare la potenza dell'errore sarà molto minore, a parità di N , di quella osservabile per l'onda quadra. In generale, si può affermare che se la k -esima derivata di un segnale soddisfa le condizioni di Dirichlet, allora i corrispondenti coefficienti della serie vanno a zero con legge $|X_n| \leq \frac{\alpha}{n^{k+1}}$. Ciò in pratica significa che più un

⁵³Vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Punto_di_discontinuità.

segnale ha un andamento *dolce*, e minore sarà il suo contenuto armonico. Il caso limite è rappresentato dalla sinusoidale, alla quale è associata una unica armonica (la fondamentale), e difatti per essa tutte le derivate sono continue essendo, come noto, sinusoidi anch'esse.

2.5.1.1 Ri-definizione dei coefficienti di Fourier

Moltiplicando il segnale periodico per $e^{-j2\pi mFt}$ ed eseguendo l'integrale tra due istanti t_1 e t_2 presi a distanza di un multiplo intero di periodi (ossia $t_2 - t_1 = kT$), si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j2\pi mFt} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt} \right) e^{-j2\pi mFt} dt = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \int_{t_1}^{t_2} e^{j2\pi(n-m)Ft} dt = (t_2 - t_1) \cdot X_m \end{aligned}$$

in quanto per $n \neq m$ la funzione integranda ha valor medio nullo, dato che nell'intervallo (t_1, t_2) (dovunque collocato dell'asse dei tempi) presenta un numero intero di periodi. Pertanto, il valore dei coefficienti della serie di Fourier può essere ottenuto a partire da un qualunque intervallo $[t_1, t_2]$ esteso su un numero intero di periodi ($t_2 - t_1 = mT$ con m intero):

$$X_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-j2\pi nFt} dt$$

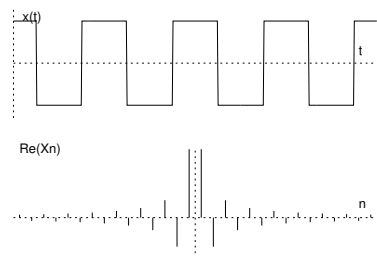
2.5.2 Sviluppo in serie per alcuni segnali

Nello schema che segue sono mostrate le ampiezze delle componenti armoniche X_n per alcuni segnali periodici di periodo T , di cui è fornita l'espressione nel tempo per $|t| < T/2$.

Onda quadra simmetrica

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < T/4 \\ -1 & T/4 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

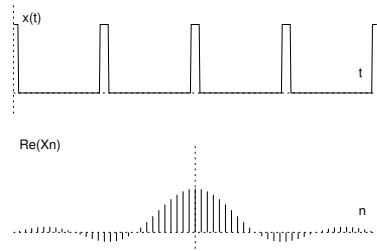
$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$



Treno di impulsi rettangolari

$$x(t) = \begin{cases} +1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & \tau/2 \leq |t| < T/2 \end{cases}$$

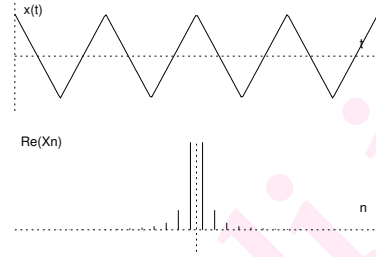
$$X_n = \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$



Onda triangolare simmetrica

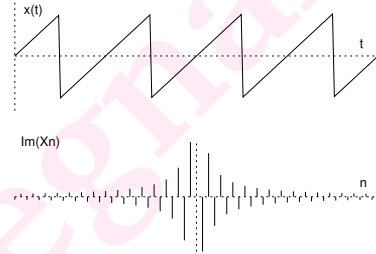
$$x(t) = 1 - 4\frac{|t|}{T} \quad |t| < T/2$$

$$X_n = \begin{cases} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

**Dente di sega simmetrico**

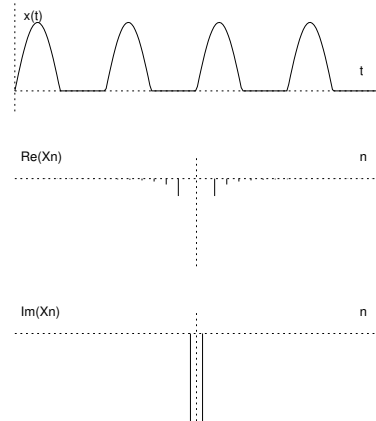
$$x(t) = 2\frac{t}{T} \quad |t| < T/2$$

$$X_n = \begin{cases} j\frac{(-1)^n}{n\pi} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

**Rettificata a singola semionda**

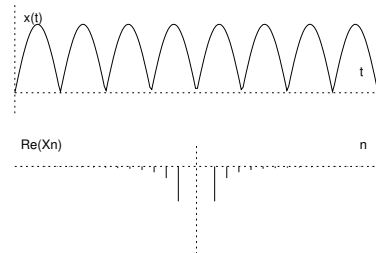
$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & -T/2 \leq t < 0 \end{cases}$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ pari} \\ -j\frac{1}{4} & n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Rettificata a onda intera**

$$x(t) = |\sin \omega_0 t|$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>