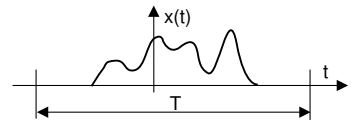


Trasformata di Fourier e convoluzione

SPECIALIZZA al caso di segnali aperiodici l'analisi in frequenza introdotta al § 2.2 per segnali periodici, dando ora luogo ad uno *spettro continuo*. Dopo l'estensione del teorema di Parseval e la definizione di *densità di energia* ed *energia mutua*, il capitolo procede investigando prima le proprietà della trasformata di Fourier, e quindi definendo l'impulso matematico $\delta(t)$ (o di Dirac) e le sue applicazioni come la *risposta impulsiva* di un filtro e *l'integrale di convoluzione*. Si passa quindi ad illustrare l'equivalenza tra convoluzione e prodotto nel dominio trasformato, con le relative conseguenze sul *filtraggio*, la *modulazione* e la *finestratura*. Dopo aver discusso del risultato della trasformata di derivata ed integrale di un segnale, viene definito il *treno di impulsi*, subito applicato per estendere la trasformata di Fourier anche al caso di segnali periodici.

3.1 Dalla serie alla trasformata

A pag. 39 abbiamo osservato come lo sviluppo in serie di Fourier possa essere applicato ad un segnale *limitato nel tempo*, con il risultato che la formula di ricostruzione $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$ in tal caso rende *periodico* il segnale originario. Se allo stesso tempo il periodo *fittizio* T su cui sono



calcolati i coefficienti $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt$ viene fatto tendere ad infinito¹, le frequenze armoniche della serie di Fourier tendono ad avvicinarsi fino ad arrivare ad una distanza infinitesima; allo stesso tempo, il periodo del segnale antitrasformato tende anch'esso ad infinito, e dunque la ricostruzione nel tempo non è più periodica.

La *trasformata* di Fourier è adatta a rappresentare segnali privi di struttura periodica, e da un punto di vista formale può essere vista come un *operatore funzionale* che, applicato ad un segnale $x(t)$ funzione del tempo, ne individua un *secondo* $X(f)$ con valori complessi e funzione di variabile reale e continua, detta *frequenza* ed indicata con

¹Occorre però rimuovere il termine $1/T$ dell'eq. (2.6), altrimenti i coefficienti andrebbero a zero, essendo il segnale a durata limitata.

f ; tale passaggio da tempo a frequenza viene rappresentato attraverso il formalismo $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, indicando il segnale *trasformato* con la stessa lettera di quello di partenza, ma resa maiuscola. Dal punto di vista analitico la trasformata di Fourier è espressa come

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.1)$$

e la sua esistenza è garantita per segnali $x(t)$ *impulsivi* (pag. 16) ovvero tali che $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, e per i quali le condizioni di Dirichlet (§ 2.5.1) sono verificate nell'intervallo $t \in (-\infty, \infty)$. Dato che un segnale impulsivo è anche *di energia* (vedi § 1.5), la (3.1) è valida anche per segnali di energia². Vedremo al § 3.7 che, grazie ad operazioni di passaggio al limite, la trasformata di Fourier può essere definita anche per segnali periodici, e dunque di potenza.

Antitrasformata Il passaggio inverso da f a t è detto *antitrasformata* di Fourier, viene indicato come $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$, e consente di ri-ottenere il segnale $x(t)$ di cui la (3.1) ha calcolato la trasformata $X(f)$. Da un punto di vista analitico l'antitrasformata di Fourier è definita in modo del tutto simile³ alla (3.1), ovvero

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3.2)$$

valida ovunque $x(t)$ sia continuo, mentre nelle discontinuità di prima specie fornisce il valore intermedio tra quelli limite destro e sinistro. Il risultato $X(f)$ della trasformazione viene indicato anche come *spettro di ampiezza* complessa, e dato che $X(f)$ assume valori complessi, può esprimersi in forma esponenziale (2.4) $X(f) = M(f) e^{j\varphi(f)}$ in cui $M(f)$ ed $\varphi(f)$ sono indicati come spettri di *modulo* e di *fase* del segnale $x(t)$.

Spettro di ampiezza come densità L'espressione dell'antitrasformata (3.2) può essere messa a confronto con quella della serie di Fourier $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi nFt}$, evidenziando come la prima possa essere pensata *somma integrale* di infinite componenti $X(f) df$ di ampiezza *infinitesima*, in cui $X(f)$ si esprime come *segnale/Hz*, ovvero come una *densità di ampiezza*.

Spazio a dimensionalità infinita Al § 3.8.5 si mostra come gli esponenziali complessi $e^{j2\pi ft}$ corrispondano ad una base di rappresentazione *ortonormale* per uno spazio di Hilbert (§ 2.4.3) con un numero di dimensioni *infinito non numerabile*, e dunque $X(f)$ costituisce la rappresentazione di $x(t)$ su tale base.

Prima di procedere ad illustrare altre proprietà e caratteristiche della trasformata di Fourier, svolgiamo un semplice esercizio.

Trasformata di un rettangolo Disponendo del segnale $g(t) = A \text{rect}_\tau(t)$, se ne calcoli lo spettro di ampiezza $G(f)$. Si ottiene:

²Anche se un segnale di energia non è necessariamente impulsivo, ci viene in soccorso il https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Plancherel.

³Da un punto di vista *mnemonico*, cerchiamo di ricordare che l'esponenziale sotto il segno di integrale prende il segno *meno* nel passaggio $t \rightarrow f$, ed il segno *più* passando da f a t .

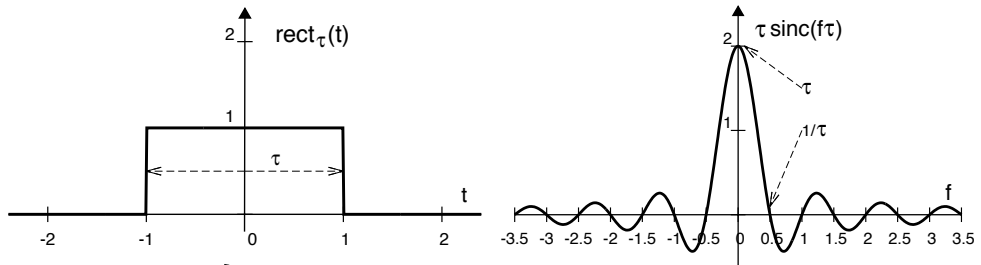


Figura 3.1: \mathcal{F} -trasformata di un rettangolo di base $\tau = 2$ ed ampiezza $A = 1$

$$\begin{aligned}
 G(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{rect}_{\tau}(t) e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = A \left. \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\
 &= \frac{A}{\pi f} \frac{e^{j2\pi f \frac{\tau}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}}{2j} = A\tau \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} = A\tau \cdot \operatorname{sinc}(f\tau) \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Il risultato è riportato in fig 3.1, dove possiamo notare come aumentando la durata τ del rect il relativo spettro di ampiezza $G(f)$ si *addensa* verso la regione delle frequenze più basse, dato che il suo primo passaggio per zero avviene a frequenza $f = \frac{1}{\tau}$; al contrario, qualora il rect sia più breve, $G(f)$ si *allarga*, estendendosi verso regioni di frequenza più elevata. Notiamo quindi come il risultato assomigli a quello già incontrato al § 2.2.1.4 per la serie di Fourier di un segnale periodico ottenuto ripetendo con periodo T un impulso rettangolare di base τ , tranne che ora l'andamento di $G(f)$ rappresenta una distribuzione in frequenza *continua* dello spettro di ampiezza.

La precedente osservazione può essere generalizzata come segue:

Relazione tra serie di Fourier e trasformata di un segnale a durata limitata

Consideriamo un segnale $g(t)$ a *durata limitata* $\tau \leq T$, ed un segnale *periodico* $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT)$ derivato da esso. I coefficienti X_n della serie di Fourier (2.6) ottenibili per $x(t)$ sono legati ai valori $G(f)|_{f=n/T}$ dello spettro di ampiezza (3.1) relativo a $g(t)$ calcolato in corrispondenza alle frequenze $f = \frac{n}{T}$ dalla relazione⁴

$$X_n = \frac{1}{T} G(f)|_{f=\frac{n}{T}} \quad (3.4)$$

Tornando all'esercizio, troviamo infatti che valutando la (3.3) per $f = \frac{n}{T}$ e dividendo per T si ottengono i valori $X_n = A \frac{\tau}{T} \operatorname{sinc}(n \frac{\tau}{T})$ espressi dalla (2.11) relativa alla serie di Fourier di un'onda rettangolare ottenuta usando lo stesso $\operatorname{rect}_{\tau}$ dell'esercizio.

3.2 Energia mutua, Parseval e densità di energia

In analogia a quanto osservato per la potenza dei segnali periodici (§ 2.3), l'*energia* totale \mathcal{E}_x di un segnale $x(t)$ si *distribuisce* nel dominio della frequenza come descritto

⁴Indicando $1/T$ con F in modo da uniformare la notazione a quella del § 2.2 otteniamo infatti

$$G\left(\frac{n}{T}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi n F t} dt = T \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n F t} dt = T \cdot X_n$$

dalla relativa *densità di energia* $\mathcal{E}_x(f)$, che si ottiene a partire da $X(f)$. Arriviamoci per gradi, illustrando prima due relazioni che sono diretta conseguenza delle considerazioni geometriche svolte al § 2.4.

Energia mutua⁵ Data una coppia di segnali di energia $x(t)$ e $y(t)$, è definita come il valore

$$\mathcal{E}_{x,y} = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt \quad (3.5)$$

e corrisponde al *prodotto scalare* (eq. (2.27)) tra $x(t)$ e $y(t)$ nello spazio a dimensionalità infinita dei segnali di energia. L'energia mutua $\mathcal{E}_{x,y}$ rappresenta una misura di *similarità* tra i due segnali, e qualora sia nulla i segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono detti *ortogonali*. Osserviamo che per la disuguaglianza di Schwartz risulta $\mathcal{E}_{x,y} \leq \sqrt{\mathcal{E}_x \cdot \mathcal{E}_y}$, vedi pag. 55.

Teorema di Parseval⁶ Se entrambi $x(t)$ e $y(t)$ possiedono trasformata di Fourier la (3.5) può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{x,y} &= \int \left[\int X(f) e^{j2\pi ft} df \right] y^*(t) dt = \int X(f) \left[\int y^*(t) e^{j2\pi ft} dt \right] df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \end{aligned}$$

ed l'equivalenza

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) Y^*(f) df \quad (3.6)$$

esprime il *teorema di Parseval* per segnali di energia, ed implica che le trasformate di segnali ortogonali, sono anch'esse ortogonali, e viceversa.

Densità di energia Ponendo $y(t) = x(t)$ nella (3.5) otteniamo l'energia totale \mathcal{E}_x di $x(t)$, ovvero la sua *norma quadratica* in termini vettoriali. Combinando (3.5) con (3.6) si ottiene

$$\mathcal{E}_x = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (3.7)$$

che mette in luce come la trasformata di Fourier sia un operatore *unitario*, ossia che non altera la norma dei vettori trasformati. Osservando l'ultimo membro della (3.7) possiamo interpretare

$$\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$$

come lo *spettro di densità di energia* di $x(t)$. Infatti, l'integrale $\int_{f_1}^{f_2} |X(f)|^2 df$ rappresenta il contributo all'energia totale \mathcal{E}_x di $x(t)$, limitatamente alla banda di frequenze comprese tra f_1 ed f_2 .

3.3 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Descriviamo cosa accade quando le (3.1) e (3.2) sono applicate a particolari classi di segnali, a loro combinazioni e/o trasformazioni, o più in generale, cosa lega le

⁵Nei testi anglofoni la (3.5) è indicata come *cross-energy*, a volte tradotta letteralmente come *energia incrociata*, ma qui invece più propriamente intesa come *in comune*, ovvero *mutua*.

⁶In realtà l'estensione del teorema di Parseval alla trasformata di Fourier è dovuta a *Plancherel*, vedi https://en.wikipedia.org/wiki/Plancherel_theorem

trasformazioni in un verso, con quelle in senso opposto. Altre proprietà saranno illustrate a partire dal § 3.5.

Linearità Discende molto semplicemente dalla proprietà distributiva dell'integrale che definisce la trasformata, che consente di scrivere

$$\text{se } z(t) = ax(t) + by(t) \quad \text{allora } Z(f) = aX(f) + bY(f)$$

che permette di catalogare la trasformata di Fourier come *operatore lineare*⁷ (§ 2.4.4.3).

Simmetria coniugata Qualora $x(t)$ sia un segnale *reale* si ottiene⁸

$$X(f) = X^*(-f)$$

ovvero la parte reale di $X(f)$ è *pari* e quella immaginaria *dispari*, così come il modulo $|X(f)|$ è pari e la fase $\arg\{X(f)\}$ dispari. Si applica inoltre il corollario di pag. 40, ovvero se $x(t)$ oltre ad essere reale è anche pari, $X(f)$ è reale (pari), mentre se $x(t)$ è reale dispari, $X(f)$ è puramente immaginaria (dispari).

Dualità Trasformata ed antitrasformata differiscono solo per il segno dell'esponente. Ciò comporta che se sostituiamo alla variabile f del risultato $X(f)$ di una \mathcal{F} -trasformata, la variabile t , si ottiene una funzione del tempo $X(t)$ che, se nuovamente trasformata, fornisce ... il segnale originario $x(t)$, espresso come funzione della variabile f , cambiata di segno: $x(-f)$. Il concetto esposto, intricato a parole, è verificabile analiticamente con qualche *trucco*⁹, e si riassume come

$$\begin{aligned} \text{se } x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} X(f) \quad \text{allora sostituendo } f \text{ con } t \quad X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}\{\}} x(-f) \\ \text{se } X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} x(t) \quad \text{allora sostituendo } t \text{ con } f \quad x(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{\}} X(-t) \end{aligned}$$

e consente l'uso dei risultati ottenuti "in un senso" (ad es. da tempo a frequenza) per derivare senza calcoli i risultati nell'altro (da frequenza a tempo), o viceversa.

Esempio: Trasformata di un sinc(t) Supponiamo di voler trasformare il segnale $x(t) = \frac{B \sin(\pi t B)}{\pi t B} = B \text{sinc}(tB)$: l'applicazione cieca dell'integrale che definisce la trasformata di Fourier al segnale $x(t)$ appare un'impresa ardua, ma...

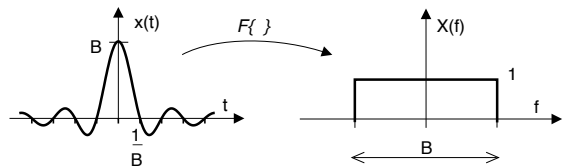
Ricordando che

$$\mathcal{F}\{\text{rect}_\tau(t)\} = \tau \text{sinc}(f\tau)$$

scriviamo direttamente

$$\mathcal{F}\{B \cdot \text{sinc}(tB)\} = \text{rect}_B(f)$$

Pertanto la trasformata di un *sinc* nel tempo, è un rettangolo in frequenza.



⁷Ovvero che mette in corrispondenza coppie di vettori-segnale $x(t)$ e $X(f)$ appartenenti allo spazio vettoriale dei segnali di energia definito rispettivamente sul dominio del tempo e della frequenza. Dato che gli esponenziali complessi $\{e^{j2\pi ft}\}$ costituiscono una base ortonormale per i segnali di energia (§ 3.8.5), osserviamo come la (3.1) valuti il *prodotto interno* tra il vettore $x(t)$ e un vettore della base, mentre la (3.2) rappresenta l'equivalente continuo della formula di ricostruzione (2.7).

⁸Infatti $X^*(f) = [\int x(t) e^{-j2\pi ft} dt]^* = \int x^*(t) e^{j2\pi ft} dt = X(-f)$ dato che $x(t)$ è reale.

⁹Iniziamo dall'espressione dell'antitrasformata $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$ in cui *scambiamo tra loro le variabili* f e t ottenendo $x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{j2\pi ft} dt$; operando quindi un cambio di variabile $f \rightarrow -f$ si ha $x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j2\pi ft} dt$ che coincide con il risultato mostrato alla prima riga nel testo.

Valore nell'origine (o iniziale) e area Stabilisce una eguaglianza che è subito verificabile una volta notato che la trasformata calcolata per $f = 0$ si riduce all'integrale di $x(t)$, e quindi alla sua *area*. Pertanto:

$$X(f = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \quad \text{e, per dualità} \quad x(t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) df \quad (3.8)$$

Esempio Come applicazione, troviamo subito l'area di un $\text{sinc}(\cdot)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(tB) dt = \frac{1}{B} \text{rect}_B(f = 0) = \frac{1}{B} \quad (3.9)$$

Traslazione nel tempo Si tratta di una proprietà molto semplice, e che ricorre frequentemente nei calcoli sui segnali. Esprime la relazione tra la trasformata di un segnale e quella dello stesso qualora traslato, in accordo al predicato

$$\text{se } z(t) = x(t - T) \quad \text{allora} \quad Z(f) = X(f) e^{-j2\pi fT} \quad (3.10)$$

la cui dimostrazione è fornita sotto¹⁰.

Esempio Dato un segnale rettangolare $x(t) = \text{rect}_\tau(t)$, valutiamo la trasformata di $z(t) = x(t - T)$. L'applicazione diretta della (3.10) porta al risultato $Z(f) = \tau \text{sinc}(f\tau) e^{-j2\pi fT}$, e l'esercizio potrebbe dirsi concluso, se non per il desiderio aggiuntivo di disegnare $Z(f)$ nei termini del suo modulo e fase, ovvero in *notazione esponenziale* $Z(f) = |Z(f)| e^{j \arg\{Z(f)\}}$. Ci accorgiamo infatti che il termine $\text{sinc}(f\tau)$ non è pari a $|Z(f)|$, in quanto assume anche valore *negativi*, mentre il modulo, per definizione, è positivo o nullo. Per non appesantire la lettura, la soluzione a questo apparente problema viene svolta al § 3.8.1.

Il termine $-2\pi fT$ che risulta aggiunto allo spettro di fase originario prende il nome di *fase lineare*, in quanto la sua entità aumenta linearmente con f , e quindi le frequenze doppie, triple di una frequenza data, subiscono una variazione *di fase* doppia, tripla, ecc., ma tutte subiscono il medesimo ritardo temporale. Si noti inoltre che un ritardo temporale è associato ad un ritardo di fase, cioè una sottrazione, mentre un'anticipazione temporale dà un'addizione di fase, cioè un'anticipazione. Tali circostanze mettono in luce una interessante conseguenza anche nel passaggio da frequenza a tempo, ossia:

Affinché un segnale mantenga inalterato l'aspetto della propria forma d'onda anche a seguito di una modifica della corrispondente trasformata, l'unica alterazione possibile del suo spettro è una variazione costante per il modulo, e lineare per la fase¹¹

Esempio Consideriamo un segnale periodico $x(t)$ costituito da due sole armoniche

$$x(t) = a \sin(\omega t) + b \sin(2\omega t)$$

¹⁰La dimostrazione si basa sul semplice cambio di variabile $\theta = t - T$:

$$Z(f) = \int x(t - T) e^{-j2\pi f t} dt = \int x(\theta) e^{-j2\pi f(T + \theta)} d\theta = e^{-j2\pi f T} \int x(\theta) e^{-j2\pi f \theta} d\theta = X(f) e^{-j2\pi f T}$$

¹¹Tali condizioni corrispondono a quelle descritte a pag. 231 come quelle di un *canale perfetto*.

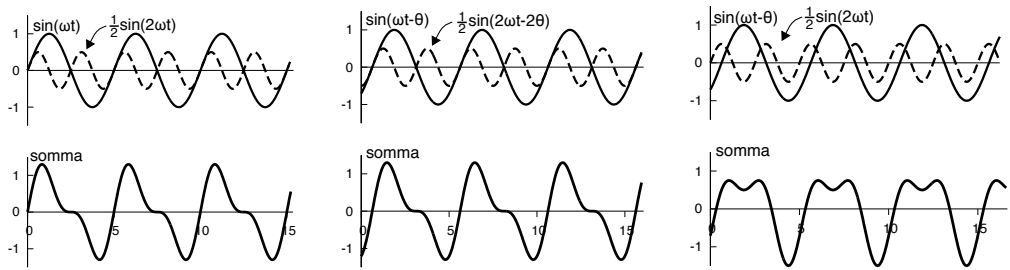


Figura 3.2: Confronto tra diversi spettri di fase

in cui si è posto $2\pi F = \omega$. La sua versione ritardata è

$$x(t - T) = a \sin(\omega(t - T)) + b \sin(2\omega(t - T)) = a \sin(\omega t - \omega T) + b \sin(2\omega t - 2\omega T)$$

Ponendo ora $\omega T = \theta$, otteniamo

$$x(t - T) = a \sin(\omega t - \theta) + b \sin(2\omega t - 2\theta)$$

e verifichiamo che la seconda armonica subisce un ritardo di fase esattamente doppio.

In fig. 3.2 si è posto $a = 1$, $b = 0.5$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $F = 0.2$, ed è mostrato sia il segnale somma originario, sia quello ottenuto considerando un contributo di fase lineare per le due armoniche. Verifichiamo come nel secondo caso la forma d'onda sia la stessa ottenibile per $T = 0$, in quanto le armoniche sono traslate del medesimo intervallo temporale. A destra invece, la fase della seconda armonica viene annullata, ottenendo dalla somma un segnale $a \sin(2\pi F t - \theta) + b \sin(2\pi 2F t)$. Come è evidente, in questo caso il risultato assume una forma d'onda completamente diversa¹².

Traslazione in frequenza (Modulazione) E' la proprietà duale della precedente, e stabilisce che

$$\text{se } Z(f) = X(f - f_0) \quad \text{allora } z(t) = x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

la cui dimostrazione è del tutto analoga a quanto visto alla nota 10. Da un punto di vista mnemonico, distinguiamo la traslazione temporale da quella in frequenza per il fatto che, nel primo caso, i segni della traslazione e dell'esponenziale complesso sono uguali, e nel secondo, opposti.

Da un punto di vista pratico, può sorgere qualche perplessità per la comparsa di un segnale complesso nel tempo. Mostriamo però che anti-trasformando uno spettro ottenuto dalla somma di due traslazioni (in frequenza) opposte, si ottiene un segnale reale:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(f - f_0) + X(f + f_0)\} = x(t) e^{j2\pi f_0 t} + x(t) e^{-j2\pi f_0 t} = 2x(t) \cos 2\pi f_0 t$$

Pertanto, lo sdoppiamento e la traslazione di $X(f)$ in $\pm f_0$ sono equivalenti ad un segnale cosinusoidale di frequenza f_0 , la cui ampiezza è modulata dal segnale $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$. E' proprio per questo motivo, che la proprietà è detta di modulazione (vedi anche a fig. 3.5).

¹²Nel seguito (§ 15.1.2.2) illustreremo come il risultato discusso determini la sensibilità delle trasmissioni numeriche alle distorsioni di fase.

Coniugato Deriva direttamente¹³ dalla definizione di trasformata:

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-f); \quad \mathcal{F}^{-1}\{X^*(f)\} = x^*(-t) \quad (3.11)$$

Se $x(t)$ è reale ciò equivale alla proprietà di simmetria coniugata $X(f) = X^*(-f)$.

Cambiamento di scala Quantifica l'effetto che una variazione nella velocità di scorrimento del tempo ha sullo spettro. Possiamo ad esempio pensare come, ascoltando un nastro magnetico¹⁴ a velocità maggiorata, si ascolta un segnale di durata più breve, e dal timbro più *acuto*. Questo fenomeno viene espresso analiticamente come:

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

in cui se $|a| > 1$ si ottiene una *accelerazione* temporale, ed un *allargamento* dello spettro, oppure il contrario quando $|a| < 1$. La dimostrazione (per $a > 0$) è riportata alla nota¹⁵. Un corollario di questa proprietà è che se $a = -1$, allora

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-f)$$

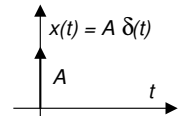
Sospendiamo per ora l'elencazione delle proprietà della trasformata di Fourier per introdurre un *nuovo segnale* del tutto particolare, grazie al quale potremo definire un ulteriore strumento analitico come *l'integrale di convoluzione*, e con questo caratterizzare l'attraversamento di un sistema da parte dei segnali.

3.4 Impulso matematico

Il simbolo $\delta(t)$, chiamato impulso matematico o *delta di Dirac*, descrive un segnale *ideale* che vale zero ovunque, tranne per $t = 0$ dove vale infinito; per contro, l'area di $\delta(t)$ è *unitaria*:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{con } t = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Da un punto di vista analitico $\delta(t)$ *non* è una funzione bensì una *distribuzione*¹⁶, definita come il limite a cui tende una *successione* di funzioni, come discusso appresso. E' prassi comune rappresentare graficamente $A \cdot \delta(t)$ come una freccia (vedi figura) con scritto accanto il valore dell'area A .



Procediamo con l'analisi di alcune importanti applicazioni dell'impulso ora definito.

Trasformata di una costante Anche se per un segnale costante $x(t) = A$ l'integrale (3.1) non converge, grazie al $\delta()$ otteniamo che

La trasformata di Fourier di una costante è un impulso matematico di area pari al valore della costante

¹³Infatti $\mathcal{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt \right]^* = X^*(-f)$

¹⁴Ebbene sì, c'è stato un tempo in cui i suoni venivano registrati su nastri, come bobine e cassette, vedi <https://it.wikipedia.org/wiki/Audiocassetta>

¹⁵Risulta $\int x(at) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int x(at) e^{-j2\pi \frac{f}{a} t} d(at) = \frac{1}{a} \int x(\beta) e^{-j2\pi \frac{f}{a} \beta} d\beta = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$

¹⁶Detta anche *funzione generalizzata*, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Delta_di_Dirac e [http://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_\(matematica\)](http://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_(matematica))

Tale proprietà è valida per entrambi i domini (f e t) di partenza, fornendo

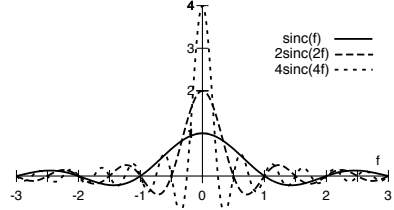
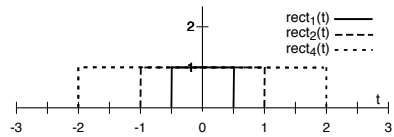
$$\mathcal{F}\{A\} = A \cdot \delta(f) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^{-1}\{A\} = A \cdot \delta(t)$$

Osserviamo infatti che la costante A può essere vista come il limite, per $\tau \rightarrow \infty$, di un segnale rettangolare:

$$A = \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \text{rect}_\tau(t)$$

la cui trasformata per $\tau \rightarrow \infty$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\lim_{\tau \rightarrow \infty} A \text{rect}_\tau(t)\right\} &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{F}\{A \text{rect}_\tau(t)\} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} A \tau \text{sinc}(f\tau) = \begin{cases} \infty & \text{con } f = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \end{aligned}$$



Ci troviamo pertanto nelle esatte circostanze che definiscono un impulso matematico, e resta da verificare che $\int_{-\infty}^{\infty} \tau \text{sinc}(f\tau) df = 1$: a pag. 66 (eq. (3.9)) si è effettivamente mostrato che tale integrale vale uno per qualunque τ , e dunque possiamo scrivere $\mathcal{F}\{A\} = A \cdot \delta(f)$.

Trasformata di segnali periodici Consideriamo ora un segnale periodico $x(t)$, del quale conosciamo lo sviluppo in serie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}$$

Applicando la proprietà di linearità, il risultato per la trasformata di una costante, e ricordando la proprietà della traslazione in frequenza, troviamo¹⁷ che la \mathcal{F} -trasformata di $x(t)$ vale:

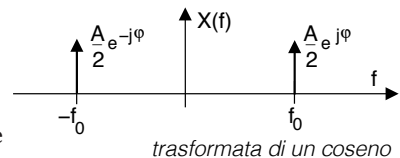
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nF) \tag{3.12}$$

Lo spettro di ampiezza di un segnale periodico è quindi costituito da *impulsi matematici*, situati in corrispondenza delle frequenze armoniche, e di area pari ai rispettivi coefficienti della serie di Fourier, significando che la densità di ampiezza è concentrata solo su tali frequenze. Un modo alternativo di calcolare la trasformata di segnali periodici è illustrato alla sezione 3.7.

Trasformata di un coseno Applichiamo il risultato (3.12) nel verso opposto, ossia per individuare le componenti armoniche, a partire dall'espressione della trasformata di Fourier. Nel caso di un coseno, che scriviamo $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}}{2}$, la relativa trasformata di Fourier risulta

$$\begin{aligned} X(f) &= \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} (e^{j2\pi f_0 t} e^{j\varphi} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\varphi})\right\} \\ &= \frac{A}{2} \{e^{j\varphi} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(f + f_0)\} \end{aligned}$$

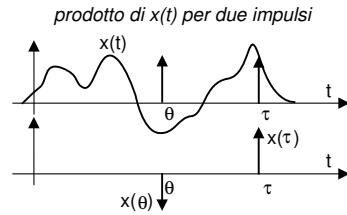
in cui riconosciamo $X_1 = \frac{A}{2} e^{j\varphi}$ e $X_{-1} = \frac{A}{2} e^{-j\varphi}$ come mostrato in figura.



¹⁷Infatti $X(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi n F t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \mathcal{F}\{1 \cdot e^{j2\pi n F t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cdot \delta(f - nF)$

Proprietà di campionamento Esprime il prodotto di un segnale per un impulso unitario, che produce come risultato¹⁸ lo stesso impulso, con area pari al valore del segnale nell'istante in cui è centrato l'impulso, ovvero

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau) \quad (3.13)$$



Operatore di setacciamento Integrando ambo i membri della (3.13) otteniamo $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$ che, dopo un (s)cambio di variabile, consente di scrivere il segnale $x(t)$ nella forma

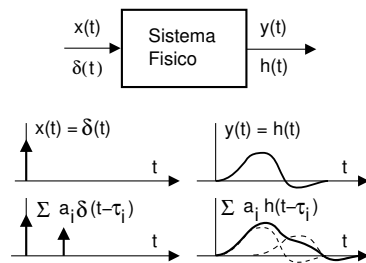
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau \quad (3.14)$$

ovvero come una somma¹⁹ di infiniti termini di valore $x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau$. La relazione (3.14) è detta operatore di *setacciamento* (in inglese, SIFTING) in quanto consiste nel passare (metaforicamente) al setaccio $x(t)$, che compare in entrambi i membri della (3.14), così come la farina compare su entrambi i lati del setaccio stesso. Che ci facciamo? La usiamo tra poco, al § 3.4.2.

Descriviamo ora come grazie all'impulso $\delta(t)$ sia possibile definire un particolare segnale noto come risposta impulsiva $h(t)$, che descrive completamente un sistema lineare e permanente, la cui uscita può essere calcolata per un qualunque segnale di ingresso grazie all'uso di $h(t)$, che agisce come *nucleo* di un operatore integrale noto come *convoluzione*.

3.4.1 Risposta impulsiva

Consideriamo un sistema fisico (elettrico, meccanico, pneumatico...) che venga sollecitato, in un punto considerato come ingresso, da un segnale impulsivo $\delta(t)$ centrato in $t = 0$, ed osserviamo l'andamento temporale di una grandezza (meccanica, pneumatica, elettrica...) che possiamo considerare una *uscita*. Questo segnale di uscita prende il nome di *risposta impulsiva* (ossia all'impulso) ed è indicato con $h(t)$. L'evoluzione di $h(t)$ rappresenta quella della grandezza di uscita, dopo che è passato un tempo pari a t da quando si è applicato in ingresso l'impulso $\delta(t)$, e se il sistema è *causale* (vedi § 1.6) risulta $h(t) = 0$ con $t < 0$, come raffigurato a lato.



¹⁸La (3.13) si dimostra esprimendo $\delta(t)$ come $\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t)$ in modo da scrivere il primo membro come $x(t) \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}_T(t - \tau)$. Al tendere di T a zero il rettangolo di ampiezza $\frac{1}{T}$ converge ad un impulso, la cui area resta moltiplicata per il valore che $x(t)$ assume per $t = \tau$, dove è centrato il rettangolo.

¹⁹Senza voler entrare nei dettagli analitici, diciamo che la (3.14) rappresenta l'equivalente della formula di ricostruzione (2.16) per uno spazio a cardinalità infinita, in cui $\delta(\tau - t)$ al variare di τ costituisce una base di rappresentazione ortonormale, ed i cui coefficienti $x(\tau)$ sono calcolati come prodotto scalare $x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - \tau) dt$.

Aggiungiamo ora l'ipotesi che il sistema sia anche *lineare e permanente* (§ 1.6.1), per cui applicando un ingresso costituito da *più impulsi*, ognuno con differente area a_i e centrato ad un diverso istante τ_i

$$x(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - \tau_i) \tag{3.15}$$

si ottiene una uscita pari a

$$y(t) = \sum_{i=1}^N a_i h(t - \tau_i) \tag{3.16}$$

Riflettiamo sul significato della sommatoria, con l'aiuto della figura precedente: il valore dell'uscita $y(t)$ ad un dato istante t è il risultato dalla somma di N termini, ognuno legato (a meno del fattore a_i) al valore della risposta impulsiva calcolata con argomento $t - \tau_i$ pari al tempo trascorso tra l'istante di applicazione dell' i -esimo impulso τ_i , e l'istante di osservazione t .

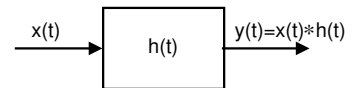
3.4.2 Integrale di convoluzione

Consideriamo ancora lo stesso sistema fisico, lineare e permanente, al cui ingresso sia ora posto un generico segnale $x(t)$ che, grazie alla proprietà di setacciamento (3.14) ed al fatto che $\delta(t)$ è *pari*, rappresentiamo scomposto in infiniti termini, ossia in una somma integrale di impulsi centrati in τ (variabile) ed area $x(\tau) d\tau$ (infinitesima)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \delta(t - \tau) \tag{3.17}$$

L'andamento della grandezza di uscita si ottiene in base allo stesso ragionamento che ha portato dalla (3.15) alla (3.16), essendo infatti pari alla sovrapposizione di *infinite* risposte impulsive, ognuna relativa ad un diverso impulso $x(\tau) d\tau \delta(t - \tau)$ in cui la (3.17) scompone l'ingresso, ovvero

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \tag{3.18}$$



Calcolo dell'uscita per un ingresso qualunque

in cui $h(t - \tau)$ è l'uscita all'istante t causata dall'impulso in ingresso centrato all'istante τ . Il risultato ottenuto prende il nome di *integrale di convoluzione*, e viene indicato in forma simbolica da un asterisco (*), in modo che ci si possa riferire ad esso anche come *prodotto di convoluzione*, ossia $g(t) = x(t) * h(t)$. Come anticipato $h(t)$ caratterizza *completamente* il sistema fisico, dato che permette di calcolarne l'uscita per un qualsiasi ingresso.

Proprietà commutativa Se un segnale $h(t)$ è posto in ingresso ad un sistema con risposta impulsiva $x(t)$, si ottiene ancora la stessa uscita, in quanto l'integrale di convoluzione è *commutativo*²⁰:

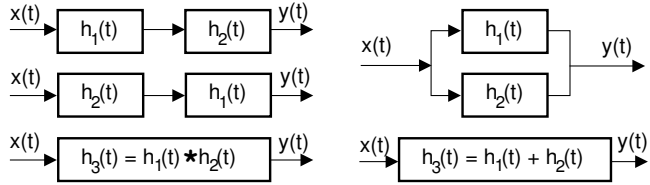
²⁰Adottando il cambio di variabile $t - \tau = \theta$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \theta) h(\theta) d\theta$$

Infatti il cambio di variabile determina quello degli estremi in integrazione, che vengono poi scambiati ripristinando il segno, vedi ad es. <https://it.wikipedia.org/wiki/Convoluzione>

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t)$$

Questa proprietà, assieme a quella di linearità, consente di stabilire le equivalenze a lato, dove si mostra come l'attraversamento *in serie* ed *in parallelo* di più sistemi lineari è equivalente a quello di un unico sistema con risposta impulsiva rispettivamente pari alla convoluzione ed alla somma delle singole risposte impulsive.



Risposta impulsiva equivalente per sistemi in serie e parallelo

3.4.3 Risposta impulsiva come funzione memoria

Diamo ora un'importante valutazione grafica del modo in cui funziona l'operatore di convoluzione, con l'aiuto della fig. 3.3: poniamo che $h(t)$ (prima riga) sia un esponenziale decrescente e $x(t)$ (terza riga) un segnale triangolare. Si vuole arrivare a disegnare la funzione integranda $x(\tau) h(t - \tau)$ (quarta riga) che compare nel calcolo della convoluzione, per un generico istante di uscita $t = \bar{t}$.

La seconda riga in figura mostra (con l'ausilio di quanto anticipato a pag. 18) l'aspetto di $h(\bar{t} - \tau)$ con τ come variabile indipendente, ottenuta prima invertendo $h(t)$ rispetto all'origine dei tempi, e quindi traslandola a destra di una quantità \bar{t} ²¹. Il prodotto dei segnali della seconda e terza riga è quindi pari (come desiderato) a $x(\tau) h(\bar{t} - \tau)$ la cui area, ombreggiata in figura, fornisce infine il risultato dell'integrale di convoluzione all'istante $t = \bar{t}$, ovvero

$$y(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(\bar{t} - \tau) d\tau$$

Per altri valori di \bar{t} il termine $h(\bar{t} - \tau)$ sarà traslato di una diversa quantità, fornendo un diverso valore dell'integrale, cioè un diverso valore di uscita²².

Il calcolo dell'area di $x(\tau) h(\bar{t} - \tau)$ ha il significato di sommare le risposte causate da tutti i valori di ingresso già entrati, e per ogni termine della somma $h(\bar{t} - \tau)$ pondera l'ingresso $x(\tau)$ all'istante

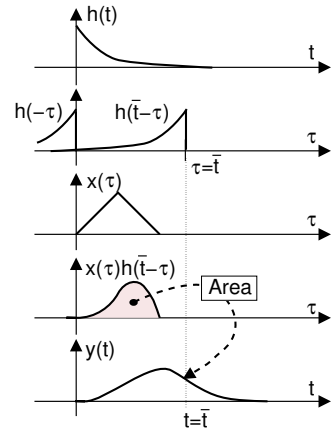


Figura 3.3: Convoluzione per via grafica

²¹Per convincerci dell'operazione, verifichiamo che per $\tau < \bar{t}$ l'argomento $\bar{t} - \tau$ di h è positivo, e infatti il valore di $h(\bar{t} - \tau) \neq 0$.

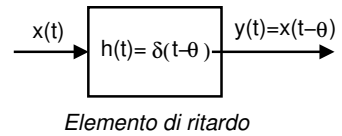
²²Osserviamo che un integrale calcola un numero, e la convoluzione produce un segnale solo perché l'integrale è calcolato per tutte le possibili traslazioni di $h(t - \tau)$, vedi anche § 2.4.4.3. Alcune animazioni che illustrano l'operazione di convoluzione in questi termini sono reperibili ad es. presso <https://it.wikipedia.org/wiki/Convoluzione> e <https://mathworld.wolfram.com/Convolution.html>, mentre presso https://teoriadeisignali.it/story/pub/stud/script/test/conv_corr_fa.m è disponibile un programma interattivo *Octave* per visualizzare questa ed altre animazioni collegate.

τ in base al tempo trascorso $\bar{t} - \tau$ tra l'istante (passato) $\tau \leq \bar{t}$ di applicazione del valore di ingresso, e l'istante \bar{t} di osservazione. I valori di $h(t)$ rappresentano pertanto il peso che la memoria del sistema fisico attribuisce agli ingressi precedenti.

Estensione temporale della convoluzione In base alla costruzione grafica discussa è facile verificare che se $x(t)$ ed $h(t)$ presentano entrambi una durata limitata, ovvero $x(t) \neq 0$ con $t \in [0, T_x]$ e $h(t) \neq 0$ con $t \in [0, T_h]$, allora il risultato $y(t) = x(t) * h(t)$ ha estensione compresa tra $t = 0$ e $t = T_x + T_h$, ossia presenta una durata pari alla somma delle durate di $x(t)$ ed $h(t)$.

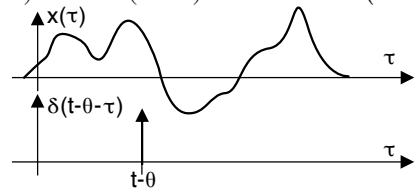
3.4.4 Convoluzione con l'impulso traslato

Consideriamo ora un sistema fisico che operi un semplice ritardo θ sui segnali in ingresso: in tal caso scriveremo $h(t) = \delta(t - \theta)$, ossia la risposta impulsiva corrisponde all'impulso ritardato. Per calcolare l'uscita, che sappiamo essere pari a $y(t) = x(t - \theta)$, possiamo ricorrere all'integrale di convoluzione, ottenendo



$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * h(t) = x(t) * \delta(t - \theta) = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \theta - \tau) d\tau = x(t - \theta) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

La figura a lato rappresenta graficamente i termini che compaiono nell'eq. (3.19), la quale ci permette di enunciare un principio generale, che verrà utilizzato di frequente, e che recita:



La convoluzione tra un segnale $x(t)$ ed un impulso $\delta(t - \theta)$ centrato ad un istante θ provoca la traslazione di $x(t)$ all'istante in cui è centrato l'impulso.

3.5 Moltiplicazione in frequenza e nel tempo

Forti dei nuovi strumenti in nostro possesso, riprendiamo la discussione sulle proprietà della trasformata di Fourier. Infatti, la descrizione di un sistema fisico per mezzo della sua risposta impulsiva è di fondamentale utilità soprattutto per merito della proprietà

La trasformata di Fourier della convoluzione tra due segnali è pari al prodotto delle trasformate dei segnali

ovvero

$$\mathcal{F} \{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f) \quad (3.20)$$

la cui dimostrazione è riportata alla nota²³. Sussiste inoltre anche la proprietà *duale*, ovvero ad un *prodotto nel tempo* corrisponde una *convoluzione in frequenza*, cioè

$$\mathcal{F} \{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.21)$$

23
$$\begin{aligned}
 Z(f) &= \mathcal{F} \{x(t) * y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) Y(f) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\
 &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = Y(f) \cdot X(f)
 \end{aligned}$$

La fig. 3.4 mostra come l'ultima relazione individui un *isomorfismo* tra spazi di segnale; chiaramente la (3.20) rappresenta un isomorfismo analogo. Nel seguito, trattiamo delle conseguenze e dei risvolti legati alla coppia di proprietà ora introdotte, iniziando dalla prima.

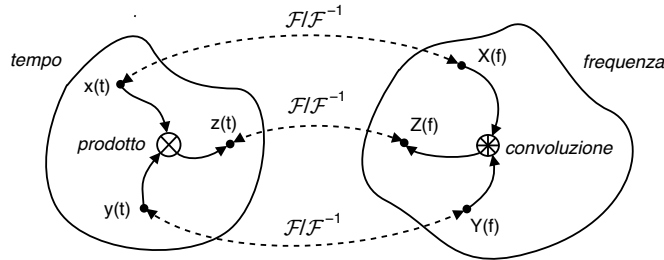


Figura 3.4: Isomorfismo tra gli spazi di segnale nel tempo e nella frequenza

3.5.1 Moltiplicazione in frequenza (filtraggio)

La proprietà (3.20) consente una diversa modalità di calcolo dell'uscita da un sistema fisico, che può infatti essere ricavata operando nel dominio della frequenza, calcolando prima

$$Y(f) = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(f)H(f) \quad (3.22)$$

e quindi valutando $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$. La trasformata della risposta impulsiva $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ prende il nome di *risposta in frequenza*, per il motivo esposto di seguito, assieme ad un paio di esempi di applicazione di questa proprietà a casi già noti al lettore. Approfondimenti sulle operazioni di filtraggio possono essere trovati al cap. 7, da affrontare dopo lo studio dei processi ergodici al § 6.3.

Risposta in frequenza Ponendo in ingresso al sistema un segnale esponenziale complesso $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, in cui è presente l'unica frequenza f_0 (infatti $X(f) = \delta(f - f_0)$), la proprietà del prodotto per un impulso permette di valutare una uscita $Y(f) = H(f)\delta(f - f_0) = H(f_0)\delta(f - f_0)$, ossia un impulso centrato in f_0 e di area complessa $H(f_0)$, da cui

$$y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t}$$

Quindi, il segnale in ingresso si ripropone in uscita, alterato in modulo e fase in base al valore complesso $|H(f_0)|e^{j\arg\{H(f_0)\}}$ che $H(f)$ assume alla frequenza f_0 : per questo motivo $H(f)$ è detta *risposta in frequenza* del sistema.

Autovettori di $H(f)$ Ricordando come in algebra lineare l'applicazione di una trasformazione lineare ad un proprio autovettore produce l'autovettore stesso, moltiplicato per il rispettivo autovalore, osserviamo che per un sistema con risposta in frequenza $H(f)$ gli autovettori (o *autofunzioni*) sono i segnali esponenziali complessi $e^{j2\pi f_0 t}$, ai quali risulta associato l'autovalore $H(f_0)$.

Misura della risposta in frequenza Se un filtro è idealmente realizzabile (pag. 26) risulta $H(f) = H^*(-f)$, e considerando per $H(f)$ la sua espressione in termini

di modulo e fase $H(f) = M(f)e^{j\varphi(f)}$, risulta $M(f)|_{f<0} = M(f)|_{f>0}$ e $\varphi(f)|_{f<0} = -\varphi(f)|_{f>0}$. Ciò consente di misurare modulo $M(f)$ e fase $\varphi(f)$ della risposta in frequenza per tutti i valori di f , utilizzando come ingresso una funzione sinusoidale con ampiezza A e fase θ note: $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$. Il segnale in uscita è ancora una cosinusoide²⁴ con ampiezza $A \cdot M(f_0)$ e fase $\theta + \varphi(f_0)$; pertanto ricaviamo

$$M(f_0) = \frac{\max\{y(t)\}}{\max\{x(t)\}}, \quad \text{e} \quad \varphi(f_0) = \arg\{y(t)\} - \arg\{x(t)\}$$

Ripetendo il procedimento per diverse f_0 , possiamo “campionare” $H(f)$. Al § 3.8.2 si illustra una modalità operativa per la misura della differenza di fase tra sinusoidi.

Sistema passa tutto Poniamo di avere $H(f) = 1$, e che quindi risulti $h(t) = \delta(t)$. In questo caso le componenti di $X(f)$ alle diverse frequenze non subiscono alcuna alterazione, ottenendo

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = x(t)$$

ed il sistema viene detto di tipo *passa tutto*. Per verifica possiamo scrivere l'espressione dell'integrale di convoluzione, ovvero $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$: ritroviamo quindi la proprietà di setacciamento (3.14).

Fase lineare e ritardo Se invece $H(f) = e^{-j2\pi f\tau}$ abbiamo un sistema caratterizzato da una *fase lineare* (pag. 66) e che equivale ad un elemento di ritardo, riproducendo in uscita il valore che era presente in ingresso τ istanti prima. Infatti in base alla (3.10) risulta:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{X(f) e^{-j2\pi f\tau}\} = x(t - \tau)$$

D'altra parte, scrivendo l'integrale di convoluzione, e ricordando che $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-j2\pi f\tau}\} = \delta(t - \tau)$, avremmo ottenuto $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) \delta(t - \tau - \theta) d\theta = x(t - \tau)$, ritrovando la proprietà della convoluzione per un impulso traslato. Un sistema siffatto è indicato a pag. 231 come *canale perfetto*, in quanto privo di distorsioni lineari (vedi § 8.2).

Sistemi in cascata Ponendo l'uscita $y(t) = x(t) * h(t)$ di un primo sistema con risposta impulsiva $h(t)$ in ingresso ad un secondo filtro con risposta impulsiva

²⁴Svolgiamo i calcoli nel dominio della frequenza, partendo dal risultato di pag. 69:

$$X(f) = \frac{A}{2} \left(e^{j\theta} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} \delta(f + f_0) \right);$$

$$Y(f) = X(f) H(f) = \frac{A}{2} M(f_0) \left(e^{j\theta} e^{j\varphi(f_0)} \delta(f - f_0) + e^{-j\theta} e^{-j\varphi(f_0)} \delta(f + f_0) \right)$$

e antitrasformando si ottiene

$$y(t) = A \cdot M(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \theta + \varphi(f_0))$$

$g(t)$, e ricordando che (pag. 71) la cascata dei due sistemi è equivalente ad un terzo sistema con risposta impulsiva $h'(t) = h(t) * g(t)$, si ottiene come risultato complessivo $z(t) = y(t) * g(t) = x(t) * h(t) * g(t)$, la cui trasformata di Fourier risulta $Z(f) = X(f) H(f) G(f)$. Pertanto, la risposta in frequenza di sistemi posti in serie è il prodotto delle relative risposte in frequenza.

3.5.2 Moltiplicazione nel tempo (*modulazione e finestrata*)

La relazione (3.21)

$$Z(f) = \mathcal{F}\{x(t)y(t)\} = X(f) * Y(f) \quad (3.23)$$

ci permette di investigare le conseguenze frequenziali del prodotto temporale di due segnali.

Esempio Prendiamo il caso in cui $z(t) = A \text{rect}_T(t) \cos 2\pi f_0 t$, ovvero pari alla forma d'onda graficata a sinistra nella fig. 3.5. Applicando i risultati noti e la proprietà di traslazione in frequenza, risulta:

$$\begin{aligned} Z(f) &= \frac{A}{2} \mathcal{F}\left\{\text{rect}_T(t) \left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right\} \\ &= \frac{AT}{2} (\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T]) \end{aligned}$$

in cui $\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$ si è traslato in $\pm f_0$.

Il risultato dell'esempio, mostrato a destra in fig. 3.5, coincide con quello previsto: l'espressione di $Z(f)$ infatti è anche pari alla convoluzione tra $\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$ ed i due impulsi traslati $\mathcal{F}\{\cos 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$, determinando quindi la replica dello spettro del *rect*, traslata alla frequenza del coseno.

Modulazione Il prodotto tra segnali nel tempo prende il nome di modulazione quando uno dei due fattori è una (co)sinusoide, la cui ampiezza viene appunto variata (o *modulata*) dal secondo fattore²⁵. La *modulazione di ampiezza* (cap. 11) dei radio ricevitori si riferisce esattamente a questo processo, svolto allo scopo di condividere tra più emittenti la banda prevista per le trasmissioni, assegnando a ciascuna di esse una diversa frequenza portante f_0 su cui trasmettere: infatti come mostrato dall'esempio, lo spettro del rettangolo si è spostato da $f = 0$ a $f = f_0$.

Finestratura Questo termine fa riferimento al caso in cui uno dei due fattori della (3.23) sia un segnale a durata limitata (detto *finestra*), come nel caso del $\text{rect}_T(t)$ di fig. 3.5. Con riferimento all'esempio si può osservare che per T crescente $Z(f)$ tende sempre più ad assomigliare ad una coppia di impulsi, ossia al risultato noto per un un coseno di durata *infinita*. Qualora si consideri invece solo un *breve intervallo* di un segnale il suo spettro si modifica a seguito della *convoluzione in frequenza* con la trasformata della *finestra* di analisi. L'estrazione di un segmento di durata limitata da un segnale comunque esteso prende dunque il nome di *finestratura* (WINDOWING),

²⁵Nel caso dell'esempio il rettangolo è costante e dunque l'ampiezza del coseno *non varia*, ma il termine modulazione si riferisce al prodotto di una sinusoide per un segnale dall'andamento qualsiasi.

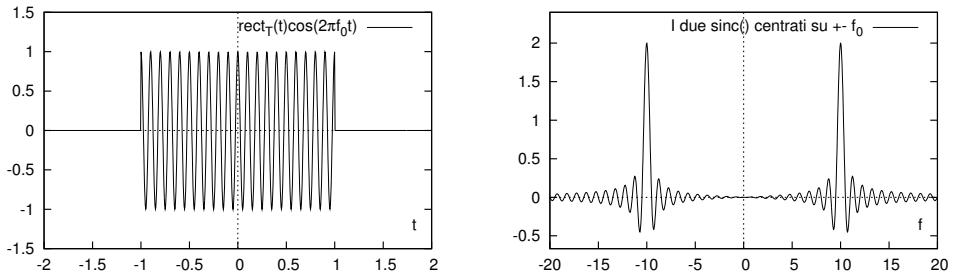


Figura 3.5: Trasformata di un coseno finestrato con $T = 2, f_0 = 10$

ed in appendice 3.8.4 sono svolte considerazioni relative alla scelta di una finestra rettangolare, o con *altro andamento*.

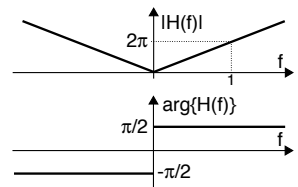
3.6 Derivazione ed integrazione nel tempo

Queste due proprietà sono di applicazione meno frequente, ma talvolta utile. In particolare, si verifica che le operazioni di derivata ed integrale di un segnale possono essere realizzate mediante il passaggio dello stesso attraverso un filtro, dato che derivata ed integrale nel tempo sono equivalenti a prodotti in frequenza, e quindi realizzabili come convoluzione del segnale con una appropriata risposta impulsiva.

Derivazione nel tempo La trasformata $Y(f)$ di un segnale $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ è esprimibile in funzione della trasformata di $x(t)$ come²⁶

$$Y(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = j2\pi f \cdot X(f) \tag{3.24}$$

e più in generale si ha $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = (j2\pi f)^n \cdot X(f)$. L'andamento del modulo dello spettro originario $|X(f)|$ risulta pertanto *esaltato* alle frequenze più elevate, con legge proporzionale ad f , come risulta dal prodotto per $2\pi|f|$. Osservando poi che il numero immaginario puro $j2\pi f = 2\pi f e^{j\frac{\pi}{2}\text{sgn}(f)}$ ha fase $\pm\frac{\pi}{2}$ con segno uguale a quello di f , troviamo che la fase di $X(f)$ subisce un incremento di $\frac{\pi}{2}$ per frequenze positive, ed un eguale decremento per quelle negative. Pertanto, la derivata di un segnale corrisponde all'uscita di un filtro descritto dalla risposta in frequenza riportata a lato.



Esercizio Calcolare $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$, considerando $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ e $x(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t$. Valutare poi $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\}$ nel caso in cui $f_1 = 10$ e $f_2 = 100$ Hz.

²⁶La dimostrazione viene svolta per segnali di energia, applicando in modo diretto la regola di integrazione per parti $\int [f'(t)g(t)]dt = f(t)g(t) - \int [f(t)g'(t)]dt$:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j2\pi ft} dt = x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{\infty} + j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f X(f)$$

in quanto il termine $x(t) e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ si annulla, dato che se $x(t)$ è un segnale di energia, tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

Anziché applicare le regole di derivazione e quindi effettuare la trasformata, scegliamo di calcolare prima $X(f)$, e quindi applicare la (3.24):

$$X(f) = 1/2 [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + \delta(f - f_2) + \delta(f + f_2)]$$

Dato che (pag. 70) $f \cdot \delta(f \pm a) = \mp a \cdot \delta(f \pm a)$, il prodotto $Y(f) = j2\pi f \cdot X(f)$ fornisce

$$Y(f) = \frac{j2\pi}{2} \{f_1 [\delta(f - f_1) - \delta(f + f_1)] + f_2 [\delta(f - f_2) - \delta(f + f_2)]\}$$

Considerando infine che $\frac{j2\pi}{2} = -\frac{2\pi}{2j}$, si ottiene $y(t) = -2\pi f_1 \sin 2\pi f_1 t - 2\pi f_2 \sin 2\pi f_2 t$ e quindi, per $f_1 = 10$ e $f_2 = 100$, si ha

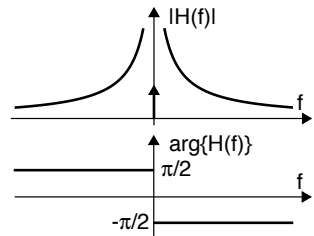
$$y(t) = -2\pi [10 \sin \omega_1 t + 100 \sin \omega_2 t]$$

Il doppietto Viene da chiedersi quale sia la risposta impulsiva $h(t)$ di un filtro derivatore. Dato che per definizione $h(t)$ rappresenta l'uscita corrispondente ad un ingresso impulsivo $\delta(t)$, evidentemente deve risultare $h(t) = \delta'(t)$, ovvero pari alla derivata dell'impulso. ok, ma come è fatto $\delta'(t)$, e perché viene detto doppietto? Per rispondere occorre fare un passo indietro, e tornare a pensare l'impulso come una distribuzione, ad es. $\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \text{rect}_\tau(t)$, e considerare che $\frac{d}{dt} \text{rect}_\tau(t) = \delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})$, ossia due impulsi di segno opposto, centrati in corrispondenza delle discontinuità²⁷. Pertanto risulta $\delta'(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [\delta(t + \frac{\tau}{2}) - \delta(t - \frac{\tau}{2})]$, ovvero due impulsi di area infinita e segno opposto, entrambi centrati in $t = 0$.

Integrazione nel tempo Indicando il segnale integrale (o primitiva) come $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$, il legame tra integrale e derivata permette di scrivere²⁸

$$Y(f) = \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta \right\} = \frac{X(f)}{j2\pi f} \tag{3.25}$$

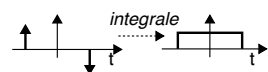
In analogia alla derivata, la (3.25) rappresenta l'uscita di un filtro integratore con risposta in frequenza $H(f) = -j\frac{1}{2\pi f}$, che quindi *esalta* le frequenze più basse del segnale originario in accordo all'andamento iperbolico di $|H(f)| = 1/2\pi|f|$, mentre la fase $\arg\{H(f)\} = -\frac{\pi}{2} \text{sgn}(f)$ subisce una alterazione *opposta* al caso della derivata, dato che ora j ha cambiato segno.



Notiamo però che il risultato (3.25) manifesta la comparsa di una *singolarità* in $f = 0$ se $X(0) \neq 0$: come mostrato a pag. 66, ciò corrisponde ad un segnale $x(t)$ che sottende un'area non nulla, e quindi $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta$ non si azzerava per $t \rightarrow \infty$. In

²⁷

Se infatti valutiamo $\int_{-\infty}^t [\delta(\theta + \frac{\tau}{2}) - \delta(\theta - \frac{\tau}{2})] d\theta$ con $t > \frac{\tau}{2}$, otteniamo due gradini $u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})$, che combinati assieme, riproducono il rect_τ di partenza.



²⁸Essendo $x(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, ed applicando la (3.24) otteniamo $X(f) = j2\pi f Y(f)$, da cui la (3.25).

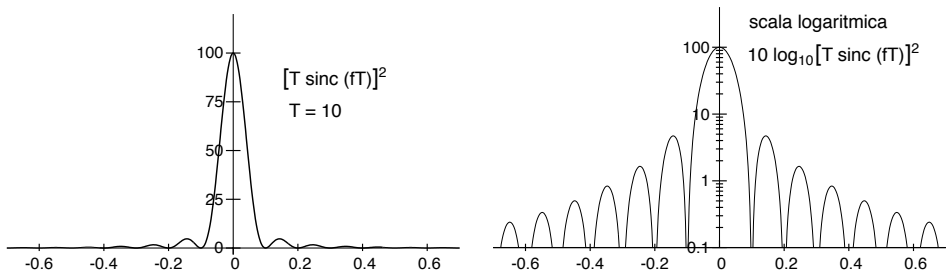


Figura 3.6: Andamento di $(T \text{sinc}(fT))^2$ in scala lineare e logaritmica; $T = 10$.

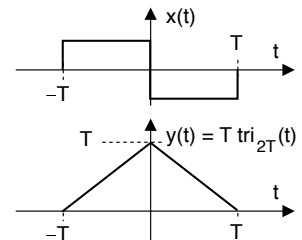
questo caso $y(t)$ non è di energia, ed il calcolo della sua trasformata richiede qualche *espediente*²⁹, che aggiunge ad $H(f) = -j \frac{1}{2\pi f}$ il termine $\frac{1}{2} \delta(f)$, anch'esso mostrato in figura.

Esercizio Trasformata di un triangolo. Consideriamo un segnale ad area nulla

$$x(t) = \text{rect}_T \left(t + \frac{T}{2} \right) - \text{rect}_T \left(t - \frac{T}{2} \right)$$

ed il suo integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta = T \text{tri}_{2T}(t)$$



entrambi rappresentati in figura: $y(t)$ è nullo fino a $t < -T$, cresce linearmente fino a $t = 0$, e quindi il contributo all'integrale dato dall'area del *rect* negativo torna ad annullarne il valore.

Per calcolare la trasformata di $y(t)$, calcoliamo prima quella di $x(t)$, e poi applichiamo la proprietà dell'integrazione. Applicando la proprietà di traslazione nel tempo, scriviamo

$$\begin{aligned} X(f) &= T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{+j2\pi f \frac{T}{2}} - T \cdot \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = \\ &= T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \cdot 2j \sin \pi f T = j2T \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi f T} \end{aligned}$$

Essendo $x(t)$ ad area nulla, la trasformata del suo integrale si ottiene dividendo $X(f)$ per $j2\pi f$, ovvero

$$Y(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} = \frac{j2T \frac{\sin^2(\pi f T)}{\pi f T} T}{j2\pi f} = \left(T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 = (T \text{sinc}(fT))^2$$

il cui andamento è mostrato in figura 3.6. Da questo risultato ne consegue infine che $\mathcal{F}\{\text{tri}_{2T}(t)\} = T \text{sinc}^2(fT)$, come riportato al § 3.8.8.

²⁹Si può giungere ad un risultato anche nel caso in cui $X(0) \neq 0$, ricorrendo all'impulso $\delta(t)$. Occorre scrivere l'integrale di $x(t)$ nella forma di una convoluzione con un *gradino unitario* $u(t)$, cioè $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) u(t-\theta) d\theta$ (si pensi alla costruzione grafica del § 3.4.3). Al § 3.8.6 si ricava che la trasformata del gradino vale $U(f) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$, ed applicando la proprietà della trasformata della convoluzione si ottiene $Y(f) = X(f) U(f) = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2} X(0)$ che è la formula più generale per l'integrazione, ed in cui l'ultimo termine scompare per segnali ad area nulla, riottenendo la (3.25).

Densità di energia del rettangolo Lo stesso risultato mostrato nell'esempio può essere ottenuto per altra via, notando che il triangolo è il risultato della convoluzione di due rettangoli:

$$y(t) = T \cdot \text{tri}_{2T}(t) = \text{rect}_T(t) * \text{rect}_T(t) \quad (3.26)$$

Come verifica, si ripercorra la costruzione grafica riportata alla sezione 3.4.3. E' quindi ora sufficiente applicare la proprietà del prodotto in frequenza, per ottenere:

$$Y(f) = \mathcal{F}\{T \cdot \text{tri}_{2T}(t)\} = [\mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\}]^2 = [T \text{sinc}(fT)]^2 \quad (3.27)$$

Il risultato (3.27) è anche pari alla densità di energia $\mathcal{E}_z(f)$ di un segnale rettangolare $z(t) = \text{rect}_T(t)$: infatti per il teorema di Parseval (eq. (3.7)) si ha $\mathcal{E}_z(f) = Z(f) Z^*(f)$, in cui $Z(f) = \mathcal{F}\{\text{rect}_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$, e pertanto

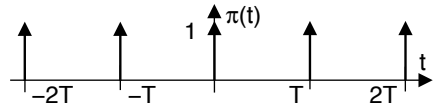
$$\mathcal{E}_z(f) = [T \text{sinc}(fT)]^2 \quad (3.28)$$

Prima di terminare il capitolo, definiamo un nuovo importante tipo di segnale *tuttofare*.

3.7 Treno di impulsi

La ripetizione periodica di un impulso matematico $\delta(t)$ dà luogo ad un segnale del tutto particolare, il cui ruolo si rivelerà fondamentale in diversi aspetti trattati nel testo, come il campionamento (cap. 4) e la trasmissione numerica (cap. 15); nel seguito ne mostriamo una prima applicazione orientata ad ottenere la descrizione della trasformata per un segnale periodico, senza necessità di calcolare i relativi coefficienti di Fourier.

Definizione Un treno di impulsi (o segnale *a pettine*) di periodo T viene rappresentato dal simbolo $\pi_T(t)$ ed è realizzato come una serie infinita di impulsi di Dirac



$$\pi_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (3.29)$$

Serie di Fourier Il segnale $\pi_T(t)$ è periodico, e dunque può essere rappresentato mediante la relativa serie come $\pi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_n e^{j2\pi n F t}$ con $F = \frac{1}{T}$ ed i cui coefficienti Π_n sono pari a

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \right] e^{-j2\pi n F t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n F t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \delta(t) dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

in quanto tra tutti gli impulsi della sommatoria ne resta solo uno, quello centrato in zero, dato che tutti gli altri cadono al di fuori dei limiti di integrazione, mentre la penultima eguaglianza tiene conto della (3.13). Tutti i coefficienti risultano pertanto

avere lo stesso valore, pari ad $\frac{1}{T}$, ottenendo lo sviluppo

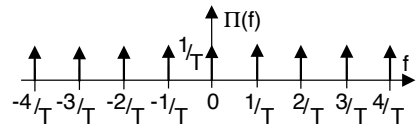
$$\pi_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n F t} \quad (3.30)$$

Notiamo inoltre che, essendo $\pi_T(t)$ un segnale reale pari, l'eq. (3.30) può essere riscritta³⁰ come una serie di coseni (vedi il § 2.2.1.3) $\pi_T(t) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2\pi n F t$.

Trasformata del treno di impulsi Si può ottenere applicando la (3.12) alla (3.30), ovvero

$$\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n F t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f) \quad (3.31)$$

ottenendo così il risultato che la trasformata di un treno di impulsi è a sua volta un treno di impulsi, di ampiezza $1/T$, e con periodo (in frequenza) che è l'inverso di quello originario, cioè $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\} = \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f)$.



Trasformata di un segnale periodico Utilizziamo ora il risultato (3.31) per ottenere una formula alternativa alla (3.12) per un generico segnale $x(t)$ periodico con periodo T , che innanzitutto scriviamo come una serie infinita di ripetizioni di un suo periodo $g(t)$

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) \quad (3.32)$$

Sfruttando la proprietà (3.19) di convoluzione con l'impulso traslato, la (3.32) può essere scritta nei termini della (3.29) come

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t) * \delta(t - mT) = g(t) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) = g(t) * \pi_T(t)$$

dove nel secondo passaggio si è sfruttata la linearità della convoluzione. Ricordando ora la proprietà della moltiplicazione in frequenza (3.22) otteniamo che lo spettro di $x(t)$ si esprime come

$$X(f) = G(f) \cdot \mathcal{F}\{\pi_T(t)\} \quad (3.33)$$

e quindi, sostituendo l'espressione di $\mathcal{F}\{\pi_T(t)\}$ ottenuta con la (3.31) nella (3.33) otteniamo

$$X(f) = G(f) \cdot \frac{1}{T} \Pi_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (3.34)$$

ovvero la trasformata di un segnale periodico $x(t)$ è pari al prodotto tra la trasformata $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ di un suo periodo, ed un treno di impulsi in frequenza di periodo $\frac{1}{T}$ ed ampiezza $\frac{1}{T}$.

³⁰Sembra strano che $\pi_T(t)$ si ottenga come somma di infiniti coseni a frequenza armonica e tutti della stessa ampiezza $\frac{2}{T}$? Per verificare il risultato, visitare <https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/the-dirac-comb-and-its-fourier-transform.html>

Esempio Riprendendo in considerazione il caso dell'onda quadra affrontato al § 2.2.1.4, non è difficile riconoscere come, ponendo $g(t) = A \text{rect}_\tau(t)$, a cui corrisponde $G(f) = A\tau \text{sinc}(f\tau)$, il prodotto di $G(f)$ per il treno di impulsi $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nF)$ (con $F = \frac{1}{T}$) fornisce il risultato già incontrato:

$$X(f) = A \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(nF\tau) \delta(f - nF)$$

Somma di Poisson Il risultato ottenuto è un aspetto dell'uguaglianza nota come *somma di Poisson*³¹ e che permette di esprimere una somma infinita basata su di una funzione nel tempo, nei termini di una somma infinita basata su di una funzione della frequenza, che è la trasformata di quella nel tempo. Nel caso in esame, antitrasformando entrambi i membri della (3.34) si ottiene

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} G\left(\frac{n}{T}\right) e^{j2\pi \frac{n}{T}t}$$

che riconosciamo corrispondere all'espansione in serie di Fourier del segnale periodico $x(t)$, non appena constatato come i termini $\frac{1}{T} G\left(\frac{n}{T}\right)$ altro non sono che i suoi coefficienti Fourier, come d'altra parte risulta anche dalla (3.4).

3.8 Appendici

3.8.1 Grafico della trasformata di un rettangolo ritardato

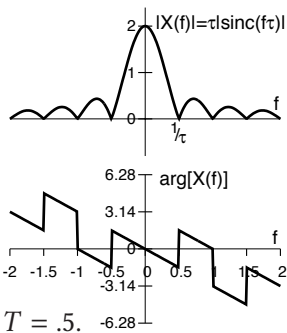
Affrontiamo il problema definito a pag. 66. Convienne iniziare esprimendo $X(f) = \tau \text{sinc}(f\tau)$ come

$$X(f) = \tau |\text{sinc}(f\tau)| e^{j\phi(f)}$$

in cui, adottando la funzione $\text{sgn}(x) = x/|x|$ (pag. 1.5.3),

$$\phi(f) = \frac{\pi}{2} \{1 - \text{sgn}[\text{sinc}(f\tau)]\} \cdot \text{sgn}(f)$$

alterna valori tra 0 e π in funzione del segno del *sinc*, in modo che quando *sinc* è negativo la fase sia π e dunque il fattore $e^{j\pi} = -1$ ristabilisce il suo corretto valore. Inoltre, il prodotto per $\text{sgn}(f)$ rende la fase un segnale *dispari*.



L'esercizio chiedeva di calcolare la trasformata di $z(t) = x(t - T) = \text{rect}_\tau(t - T)$, e dunque possiamo dire che la traslazione temporale del *rect* determina per $Z(f)$ uno spettro di modulo ancora pari a $|Z(f)| = \tau |\text{sinc}(f\tau)|$, mentre alla fase $\phi(f)$ si aggiunge il contributo *lineare* in f pari a $\varphi(f) = -2\pi fT$, ottenendo quindi

$$Z(f) = \tau |\text{sinc}(f\tau)| e^{j(\phi(f) - 2\pi fT)}$$

che viene rappresentato in figura, avendo posto $\tau = 2$ e

³¹Per un approfondimento si veda ad es.

http://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_sommazione_di_Poisson.

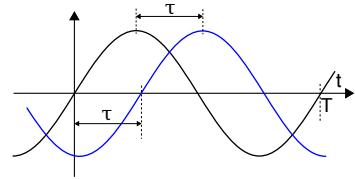
3.8.2 Misura di una differenza di fase

Come suggerito a pagina ??, esaminiamo come valutare una differenza di fase tra due sinusoidi, ad esempio quando vogliamo misurare la risposta di fase di un sistema. A questo scopo, prendiamo il grafico (letto su un oscilloscopio a doppia traccia) dove due sinusoidi con periodo uguale T hanno un ritardo τ . Dobbiamo in effetti valutare la semplice *proporzione*

$$\tau : T = \varphi : 2\pi$$

in modo da ottenere

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi T}$$



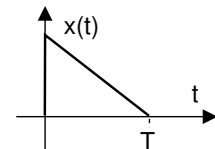
ma ora notiamo che la curva blu ha *un ritardo*, quindi la sua fase rispetto al seno nero è $-\varphi$. Ma forse la domanda a monte è: perché un intero periodo T equivale a un angolo uguale a 2π ?? Ecco...

- in primo luogo si noti³² che il rapporto tra la circonferenza C e il diametro d di ogni cerchio è $3.14159 \dots = \pi$, ovvero $\frac{C}{d} = \pi$;
- si consideri quindi che il diametro d è doppio del raggio, cioè $d = 2r$, cosicché $\frac{C}{r} = 2\pi$;
- in conclusione quando un punto, ruotando su una circonferenza *di raggio unitario*, ha compiuto un giro completo, ha percorso una distanza di 2π .

3.8.3 Quanti sono i possibili modi di calcolare una trasformata?

Sia dato il segnale

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & \text{con } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



mostrato in figura. Descrivere quanti più modi possibili di calcolarne lo spettro di densità di energia $\mathcal{E}_x(f)$.

1. Si calcola $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ e quindi $\mathcal{E}_x(f) = |X(f)|^2$;
2. Notando che $x(t) = y(t) \cdot z(t)$ con $y(t) = \text{tri}_{2T}(t)$ e $z(t) = \text{rect}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$, possiamo scrivere $X(f) = Y(f) * Z(f)$, e quindi si procede come in 1);
3. Notiamo che la derivata³³ di $x(t)$ vale $g(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \delta(t) - \frac{1}{T}\text{rect}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$; questo ci permette di calcolare $G(f)$ come $G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} = 1 - \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j\pi fT}$. Otteniamo quindi $X(f) = \frac{G(f)}{j2\pi f}$, e quindi come in 1);
4. Anticipando un risultato del § 7.2.1, è possibile calcolare $\mathcal{R}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t + \tau) dt$, e quindi $\mathcal{E}_x(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}$.

³²Vedi <https://www.geogebra.org/m/sgBZefns> per una animazione

³³La derivata di una discontinuità di prima specie è pari ad un impulso matematico, di area uguale all'altezza della discontinuità. Infatti l'integrale dell'impulso $\int_{-\infty}^t \delta(\theta) d\theta$ è proprio un gradino. Questa considerazione consente di risolvere in modo semplice le trasformate di segnali in cui è presente una discontinuità.

3.8.4 Finestratura e stima spettrale

Applichiamo ora la teoria svolta al § 3.5.2 per speculare sull'interpretazione della trasformata di $x(t)$ svolta a partire da un segmento $y(t)$ ottenuto delimitando $x(t)$ nel tempo mediante moltiplicazione per una *funzione finestra* di durata limitata $w(t)$. La trasformata di $y(t) = x(t)w(t)$ fornisce infatti il valore $Y(f) = X(f) * W(f)$, e quindi il *vero spettro* $X(f)$ di $x(t)$ non può essere conosciuto, se non tramite l'effetto della convoluzione con quello $W(f)$ della funzione finestra $w(t)$: in questo caso si parla dunque più propriamente di *stima spettrale* (vedi § 7.3). Già a pagina 76 si è fatto notare come, se $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$ e $w(t) = \text{rect}_T(t)$, si ottiene che $W_{\text{rect}}(f) = T \text{sinc}(fT)$, e pertanto

$$\mathcal{F}\{x(t) \cdot w(t)\} = \frac{AT}{2} (\text{sinc}[(f - f_0)T] + \text{sinc}[(f + f_0)T])$$

tanto più diverso dai due impulsi del coseno (vedi Fig. 3.5), quanto più è piccolo T .

Valutiamo ora gli effetti derivanti dall'uso di una funzione finestra diversa da quella rettangolare. Se ad esempio si sceglie di adottare una finestra *triangolare* di eguale durata T , a partire dalla (3.27) si ottiene

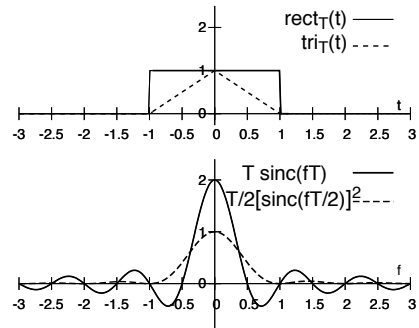
$$W_{\text{tri}}(f) = \mathcal{F}\{w(t) = \text{tri}_T(t)\} = \frac{T}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right) \right]^2$$

Come può essere verificato dalla figura a fianco, la finestra triangolare esibisce un andamento nel tempo *più dolce* (non ha discontinuità di prima specie) rispetto al $\text{rect}(t)$, e ciò si riflette in una maggiore concentrazione della sua trasformata alle frequenze più basse. Infatti $W_{\text{tri}}(f)$ ha un *lobo principale* di estensione *doppia* rispetto a $W_{\text{rect}}(f)$ (il primo zero si trova ad $f = \frac{2}{T}$ anziché ad $\frac{1}{T}$), mentre le *code laterali* decrescono *più rapidamente*, andando a zero come $\frac{1}{f^2}$; infine, il valore $W_{\text{tri}}(f = 0)$ risulta dimezzato, così come l'area della $w_{\text{tri}}(t)$.

L'andamento del *lobo principale* e delle *code* di $W(f)$ si riflette nell'andamento della trasformata del segnale finestrato qualora il segnale originario contenga, ad esempio, più di una frequenza: per la linearità della trasformata, il risultato sarà la replica di $W(f)$ centrata alle frequenze presenti. La Fig. 3.7 confronta il risultato ottenibile per un segnale contenente due sinusoidi di frequenza $f_0 = 10$ e $f_1 = 15$ Hz, quando delimitato (a sinistra) mediante una finestra rettangolare di durata (dall'alto in basso) $T = 2, 0.5, \text{ e } 0.25$ secondi³⁴, oppure (a destra) mediante una finestra triangolare della stessa durata. E' possibile distinguere due effetti.

Risoluzione spettrale Osserviamo che al diminuire del prodotto $(f_1 - f_0) \cdot T$, le due trasformate $W(f)$ *interagiscono*, fino ad esibire un andamento complessivo in cui non è più possibile *distinguere* la presenza di due diversi toni. Il fenomeno illustrato avviene

³⁴Queste durate corrispondono quindi ad utilizzare 20 cicli di sinusoidi, oppure 5, oppure due e mezzo.



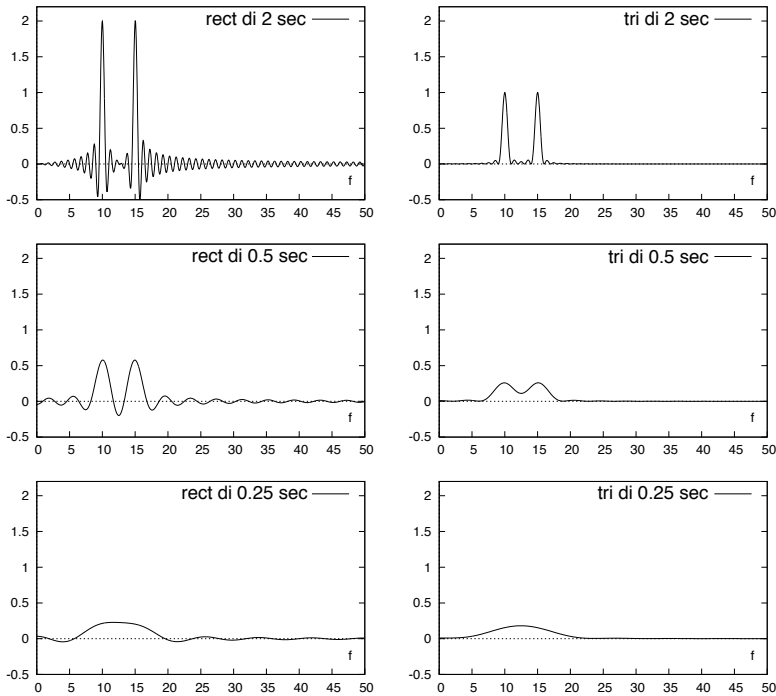


Figura 3.7: Trasformata di due toni a 10 e 15 Hz, con finestra temporale $\text{rect}_T(t)$ e $\text{tri}_T(t)$ di durata 2, 0.5 e 0.25 secondi

tanto prima, quanto più il lobo principale di $W(f)$ è esteso; pertanto, l'uso di una finestra triangolare peggiora la situazione: in effetti, la finestra rettangolare è quella che permette la migliore capacità di distinguere due toni.

Infiltrazione spettrale Detto *leakage* in inglese, indica l'*influenza* che una determinata componente spettrale ha nei confronti delle altre porzioni dello spettro: ad esempio, la prima riga di fig. 3.7 mostra come adottando $w(t) = \text{tri}_T(t)$ si ottiene un $Y(f)$ più simile a quello di due toni, piuttosto che con un $\text{rect}_T(t)$. Ciò è dovuto alle ampie code di $W_{\text{rect}}(f) = T \text{sinc}(fT)$ che appunto *infiltrano* il contenuto energetico di ciascun tono a frequenze anche distanti, mentre nel caso di $w(t) = \text{tri}_T(t)$ ciò avviene in forma assai ridotta, evitando di mostrare *artefatti*.

Considerazioni di questo tipo possono far preferire una tra le diverse possibili proposte³⁵ di funzione finestra, in dipendenza dal particolare obiettivo della stima spettrale (§ 7.3).

³⁵Nel tempo sono state definite un elevato numero di finestre temporali, ognuna *migliore* sotto certi aspetti, e *peggiore* sotto altri. Consultando Wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function, possiamo elencare le finestre di *Hamming*, *Hann*, *Cosine*, *Lanczos*, *Bartlett*, *Gauss*, *Blackman*, *Kaiser*, *Nuttall*, *Bessel*, *Dolph-Chebyshev*, *Exponential*, *Tukey*...

3.8.5 Gli esponenziali complessi come base ortogonale

Al § 3.1 sono esposte similitudini tra la serie e la trasformata di Fourier; chiediamoci ora se le funzioni $e^{j2\pi ft}$ possano anche in questo caso essere considerate come una base *ortonormale* (pag. 52), e se la (3.1) sia una *proiezione* di $x(t)$ lungo tali vettori.

Un primo ostacolo è rappresentato dal fatto che ora la cardinalità dello spazio di rappresentazione risulta veramente *infinita*, e non più infinita *numerabile* come per la serie. Ma l'ostacolo maggiore sembra essere che le funzioni $e^{j2\pi ft}$ non sono segnali impulsivi, e neanche di energia: infatti $e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi ft} = 1$, e dunque la definizione di prodotto scalare (3.5) e di norma fornisce $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi ft} dt = \infty$. Ma se proviamo ad effettuare il calcolo del prodotto scalare tra due esponenziali $e^{j2\pi ft}$ ed $e^{j2\pi \lambda t}$ come risultato di un passaggio al limite, otteniamo

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j2\pi ft} e^{-j2\pi \lambda t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{j2\pi (f-\lambda)t} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \cdot \text{sinc}((f-\lambda)\tau) = \delta(f-\lambda)$$

in cui si è fatto uso del risultato (3.3) e del fatto che l'ultimo limite tende ad un impulso matematico, come mostrato al § 3.4, ottenendo che $\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi \lambda t} \rangle = \delta(f-\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \lambda \\ \infty & \text{se } f = \lambda \end{cases}$. Se poi applichiamo agli esponenziali la definizione di prodotto interno per segnali di potenza (2.28), si ottiene che

$$\langle e^{j2\pi ft}, e^{j2\pi \lambda t} \rangle_{pot} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \tau \text{sinc}((f-\lambda)\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } f \neq \lambda \\ 1 & \text{se } f = \lambda \end{cases}$$

permettendo dunque di dichiarare la base $\{e^{j2\pi ft}\}$ come *ortonormale* per lo spazio dei segnali di potenza.

Effettivamente, visto che l'introduzione dell'impulso $\delta(\cdot)$ permette di estendere l'operatore di trasformata di Fourier anche al caso dei segnali periodici (pag. 69), che sono di potenza, sembra sensato considerare quest'ultimo come lo spazio corretto in cui individuare le funzioni della base che permette la rappresentazione $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$ dei segnali $x(t)$ nei termini della corrispondente trasformata di Fourier $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$.

3.8.6 Trasformata di un gradino

Definiamo la funzione gradino³⁶ come $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{per } t = 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$ che, fornendo $\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt =$

∞ , non dovrebbe avere una trasformata $U(f)$. Proviamo allora a gestire il gradino nelle vesti di una *distribuzione*, ed in modo simile a quanto fatto al § 3.4 per la costante, lo rappresentiamo come il limite a cui tende una *successione* $u(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} u_{\alpha}(t)$, dei cui elementi valutare la trasformata $U_{\alpha}(f) = \mathcal{F}\{u_{\alpha}(t)\}$, e adottare $U(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} U_{\alpha}(f)$ come trasformata di $u(t)$. Scegliamo quindi $u_{\alpha}(t) = e^{-\alpha t}$ per $t > 0$ che effettivamente

³⁶Nota anche come funzione di Heaviside, vedi

https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_gradino_di_Heaviside

converge a $u(t)$ per $\alpha \rightarrow 0$, e troviamo

$$U_\alpha(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} = \frac{e^{-(\alpha+j2\pi f)t}}{-(\alpha+j2\pi f)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+j2\pi f} = \frac{\alpha-j2\pi f}{\alpha^2+(2\pi f)^2} \quad (3.35)$$

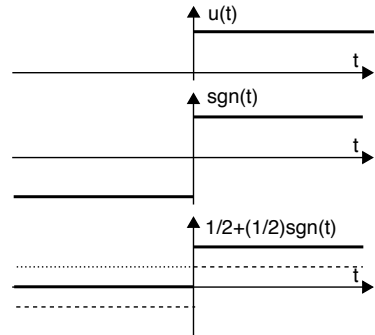
Mentre per la parte immaginaria risulta che

$$U^{Im}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \Im \{U_\alpha(f)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2\pi f}{\alpha^2+(2\pi f)^2} = -\frac{1}{2\pi f}$$

e *va bene così*, il limite della parte reale della (3.35) $U^{Re}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$ assume invece la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ se anche $f \rightarrow 0$. Per tentare di capire *cosa manca*, proviamo ad antitrasformare $jU^{Im}(f)$, ottenendo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{j}{2\pi f} \right\} &= \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi f} df = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2\pi f t}{j2\pi f} df + j \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2\pi f t}{j2\pi f} df = \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin 2\pi f t}{2\pi f} df = t \int_{-\infty}^\infty \text{sinc}(2ft) df = \frac{t}{2|t|} = \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \end{aligned}$$

dato che $\frac{\cos 2\pi f t}{j2\pi f}$ è una funzione dispari e dunque dà integrale nullo³⁷, mentre la penultima uguaglianza sfrutta il risultato (3.9). *Ci siamo quasi!* Infatti, il gradino può essere riscritto come $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$ (vedi la figura a lato), e in questo modo ci accorgiamo che mentre $jU^{Im}(f) = -\frac{j}{2\pi f}$ è la trasformata di $\frac{1}{2} \text{sgn}(t)$, $U^{Re}(f)$ deve necessariamente convergere alla trasformata di $\frac{1}{2}$, ovvero ad un impulso di area $\frac{1}{2}$, permettendo finalmente di scrivere



$$U(f) = \mathcal{F} \{u(t)\} = \frac{1}{2} \left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f} \right)$$

Sembrano conti troppo contorti? In realtà l'abbiamo *fatta semplice*...³⁸.

3.8.7 Proprietà della trasformata di Fourier

Uno schema riassuntivo delle relazioni illustrate nel capitolo

³⁷Ciò è vero purché si consideri il metodo di calcolo dell'integrale noto come *valore principale di Cauchy*, in quanto $\frac{\cos 2\pi f t}{j2\pi f}$ tende a $\frac{1}{0}$ per $f \rightarrow 0$, con valori opposti per 0^+ e 0^- , vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Valore_principale_di_Cauchy.

³⁸Vedi ad es. <http://bueler.github.io/M611F05/M611heaviside.pdf>

PROPRIETÀ	$z(t)$	$Z(f) = \mathcal{F}\{z(t)\}$
Linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Coniugato	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Cambiamento di scala	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Ritardo	$x(t-T)$	$X(f)e^{-j2\pi fT}$
Traslazione in frequenza	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$
Modulazione di ampiezza	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$
Prodotto in frequenza	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
Prodotto nel tempo	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma)Y(f-\sigma)d\sigma$
Dualità	$X(t)$	$x(-f)$
Simmetria coniugata	$x(t)$ reale	$X(f) = X^*(-f)$
Derivazione	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j2\pi f \cdot X(f)$
Integrazione	$\int_{-\infty}^t x(\theta)d\theta$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)X(0)$

3.8.8 Trasformate di segnali

Un sommario dei risultati per alcune trasformate

$x(t)$	$X(f)$	\mathcal{P}/\mathcal{E}	$\mathcal{P}(f)/\mathcal{E}(f)$	Pot/En
$\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$	$\frac{1}{2}e^{j\varphi}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}\delta(f+f_0)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\delta(f-f_0) + \frac{1}{4}\delta(f+f_0)$	P
A	$A \cdot \delta(f)$	A^2	$A^2 \cdot \delta(f)$	P
$A \cdot \text{rect}_\tau(t)$	$A \cdot \tau \text{sinc}(f\tau)$	$A^2 \cdot \tau$	$A^2 \cdot \tau^2 \text{sinc}^2(f\tau)$	E
$A \cdot \text{tri}_{2\tau}(t)$	$A \cdot \tau \text{sinc}^2(f\tau)$ ⁽¹⁾	$A^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau$	$A^2 \cdot \tau^2 \text{sinc}^4(f\tau)$	E
$e^{-\beta t}, t \geq 0$	$\frac{1}{\beta + j2\pi f}$ ⁽²⁾		$\frac{1}{\beta^2 + 4(\pi f)^2}$	E
$e^{-\beta t }$	$\frac{2\beta}{\beta^2 + 4(\pi f)^2}$ ⁽³⁾		$\frac{4\beta^2}{\beta^4 + 8(\pi\beta f)^2 + 16(\pi f)^4}$	E
$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\frac{(\sigma 2\pi f)^2}{2}}$ ⁽⁴⁾		$2\pi\sigma^2 e^{-(\sigma 2\pi f)^2}$	E
$\begin{cases} 1 & \text{con } t > 0 \\ 0 & \text{con } t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f) - \frac{j}{\pi f}\right)$ ⁽⁵⁾			
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT)$	$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ ⁽⁶⁾			

1. Per il risultato di $\mathcal{F}\{\text{tri}_{2\tau}(t)\}$, vedi esercizio a pag. 79;
2. per il risultato di $\mathcal{F}\{e^{-\beta t}\}$, vedi nota 14 a pag. 123;
3. per il risultato di $\mathcal{F}\{e^{-\beta|t|}\}$, vedi nota 33 a pag. 206;
4. per il risultato di $\mathcal{F}\{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\}$, vedi nota 25 a pag. 156;
5. per la trasformata della funzione gradino, vedi § 3.8.6;
6. per la trasformata del treno di impulsi, vedi § 3.7.

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

è il risultato di un progetto ventennale di cultura libera, aggiornato di continuo ed evolutosi fino alla forma attuale. La sua disponibilità pubblica è regolata dalle norme di licenza CREATIVE COMMONS

*Attribuzione - Non commerciale -
Condividi allo stesso modo*



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

<https://teoriadeisignali.it/libro/>

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*¹ che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

1

- . Lyx - <http://www.lyx.org/>
- . L^AT_EX - <https://www.latex-project.org/>
- . TeX Users Group - <https://tug.org/>
- . Inkscape - <http://www.inkscape.org/>
- . Gnuplot - <http://www.gnuplot.info/>
- . Octave - <http://www.gnu.org/software/octave/>
- . Geany - <https://www.geany.org/>
- . Linux - <https://www.linux.it/>
- . Free Software Foundation - <https://shop.fsf.org/>
- . GNOME Foundation - <https://www.gnome.org/>
- . Mozilla Foundation - <https://www.mozilla.org/it/>
- . Wikipedia - <https://it.wikipedia.org>
- . Internet Archive - <https://archive.org/about/>
- . Creative Commons - <https://creativecommons.it/chapterIT/>
- . WordPress - <https://it.wordpress.org/>
- . Phplist - <https://www.phplist.org/>