Capitolo 1

Una visione di insieme

Questo capitolo introduttivo offre innanzitutto una panoramica dei diversi aspetti, denominazioni e procedure che sono oggetto di studio nella trasmissione dei segnali, e la cui analisi approfondita viene sviluppata ai capitoli successivi. Prosegue quindi al § 1.5 approfondendo la descrizione delle caratteristiche dei *segnali* e dei *sistemi*, ovvero del veicolo utilizzato per trasmettere informazione. Saranno individuate diverse categorie e modalità di rappresentazione per i segnali, nonché le operazioni che è possibile eseguire su di essi.

1.1 Trasmissione dei segnali e dell'informazione

La disciplina della *trasmissione dei segnali* si è sviluppata allo scopo di descrivere la rappresentazione di *contenuti semantici* o *messaggi informativi* (il *significato*) mediante l'andamento nel tempo di grandezze fisiche (elettromagnetiche e/o simboliche) che ne costituiscono il *significante*[1]. Dopo che al messaggio è stato associato un idoneo segnale (che lo *codifica*), la *trasmissione a distanza* del segnale avviene grazie a diversi apparati cooperanti, spesso organizzati *in rete*. Il segnale trasmesso può rappresentare un messaggio generato al tempo stesso della sua trasmissione, oppure pre-esistente e registrato.

Sorgente, destinatario e canale L'origine del segnale da trasmettere è tipicamente indicata (vedi Fig. 1.1-a) come *sorgente*, e ciò che giace tra sorgente e *destinatario* è descritto da una entità astratta denominata *canale* di comunicazione, le cui caratteristiche condizionano i segnali trasmessi.

Distorsione e disturbo Il canale può modificare (ovvero *distorcere*) il segnale sia nel suo andamento temporale, che per quanto riguarda le frequenze in esso contenute[2].

[1] La distinzione tra significato e significante esprime la differenza che passa, ad esempio, tra l'immagine mentale che ognuno può avere di un cavallo, e la parola "cavallo" (scritta o pronunciata), in cui entrambi partecipano a definire un *segno linguistico*, vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/Significante`. In tale contesto, i due aspetti del segno rimandano ad un *referente*, che nel nostro esempio corrisponde ad un cavallo in carne ad ossa, mentre dal punto di vista dei segnali individua una specifica *forma d'onda*.

[2] Approfondiremo nel seguito (cap. 8) il senso di questi concetti, limitandoci per ora ad associarli ad una generica *diversità* tra il segnale trasmesso e quello ricevuto.

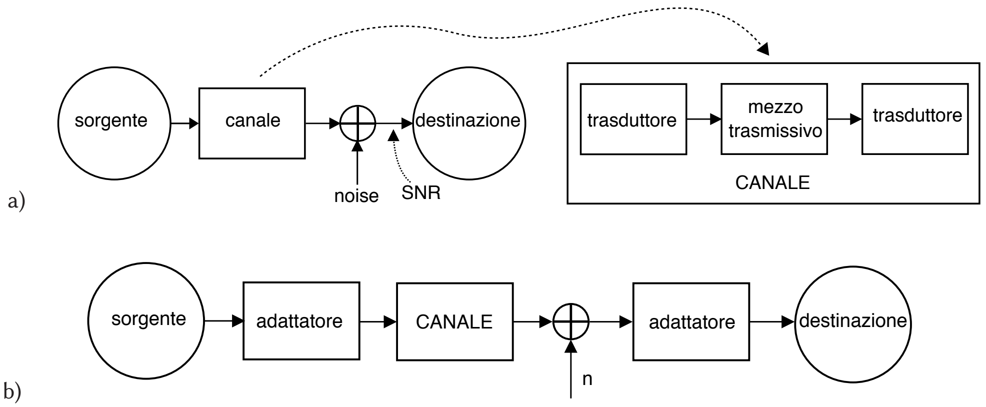


Figura 1.1: Trasmissione dell'informazione attraverso un canale di comunicazione

Cause fisiche ineliminabili producono inoltre la presenza di un segnale di *disturbo additivo* al lato ricevente, indicato come *rumore* (o *noise* in inglese), che rende il segnale a destinazione ancora diverso da quello all'uscita del canale. La conoscenza dei peggioramenti introdotti dal canale e dal rumore guida la scelta dei metodi di trasmissione più idonei a minimizzare la distorsione per il messaggio trasmesso.

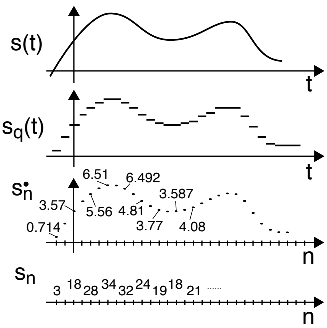
Rapporto segnale-rumore L'entità delle alterazioni subite dal messaggio viene quantificata nei termini di un *rapporto segnale rumore* (SNR o SIGNAL-TO-NOISE RATIO), un indice di qualità del collegamento che per ora definiamo genericamente come il rapporto tra *l'entità* del segnale utile ricevuto e quella del rumore ad esso sovrapposto, indicato come *noise* nella figura 1.1, comprendemdo in esso sia il disturbo additivo che la distorsione introdotta dal canale.

Trasmissione La fig. 1.1-a) evidenzia come nella realtà fisica il canale sia costituito da un *mezzo trasmissivo* su cui si propaga un segnale di natura elettromagnetica, generato e ricevuto mediante appositi *trasduttori* od *interfacce* di trasmissione e ricezione[3]. Considerando per il momento i trasduttori come facenti parte del canale stesso, proseguiamo l'analisi concentrandoci sugli ulteriori aspetti del processo di comunicazione.

Adattatori In figura 1.1-b) si mostra la possibile presenza (in trasmissione, ricezione, o ad entrambe le estremità del canale) di dispositivi *adattatori*, che hanno lo scopo di controbilanciare per quanto possibile i fenomeni di distorsione introdotti dalla trasmissione: si può ad esempio ricorrere ad un *equalizzatore* per correggere la risposta in frequenza di un canale, o ad un *amplificatore*, per contrastare l'attenuazione subita dal segnale.

Rete La trasmissione lungo un canale in uso esclusivo alla coppia sorgente - destinazione è piuttosto raro; usualmente i collegamenti sono *condivisi* tra più comunicazioni, ognuna con differente origine e destinatario. Il problema della condivisione delle risorse

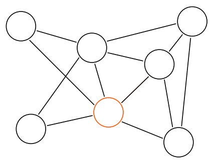
[3] Un classico esempio di trasduttore è quello dell'antenna, nel caso di trasmissione radio, ovvero di microfono ed altoparlante qualora ci si ponga dal punto di vista dello studio e degli ascoltatori.



dominio	codominio	tipo di segnale
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$s(t)$ segnale analogico
$\mathbb{R}$	$\mathbb{N}$	$s_q(t)$ segnale quantizzato
$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$s_n^\bullet$ sequenza di campioni
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	s_n sequenza numerica

Figura 1.2: Segnali analogici, numerici, campionati e quantizzati

trasmissive, ed il coordinamento di queste attività, produce la necessità di analizzare in modo esplicito le *reti di telecomunicazione*, che entrano a far parte integrante dei sistemi di trasmissione dell'informazione.



1.2 Segnali analogici e numerici

Gli aspetti accennati sono immediatamente applicabili a segnali di natura *analogica*, definiti per *tutti* gli istanti di tempo, e che assumono valori nell'ambito dei numeri reali (o, come vedremo al cap. 11, complessi), come ad esempio nel caso di un segnale audio (vocale o musicale); d'altra parte, un segnale può viceversa essere definito solo per istanti di tempo *discreti* ovvero numerabili, ed assumere valori anch'essi discreti, come ad esempio per i documenti conservati su di un computer. In tal caso il segnale viene detto *sequenza numerica*, e la sua trasmissione coinvolge ulteriori elementi.

La figura 1.2 illustra la classificazione dei segnali dal punto di vista analitico, in base all'insieme di definizione dei valori assunti, e del dominio a cui appartiene la variabile indipendente. Notiamo che oltre ai due casi di segnale analogico e sequenza numerica, sussistono anche i due casi intermedi di *segnale quantizzato* $s_q(t)$ definito per tutti gli istanti ma a valori discreti, e di *sequenza di campioni* $s_n^\bullet$ definita ad istanti discreti, ma con valori continui. La relazione tra queste rappresentazioni dell'informazione viene approfondita al § 1.2.2.

1.2.1 Segnale analogico

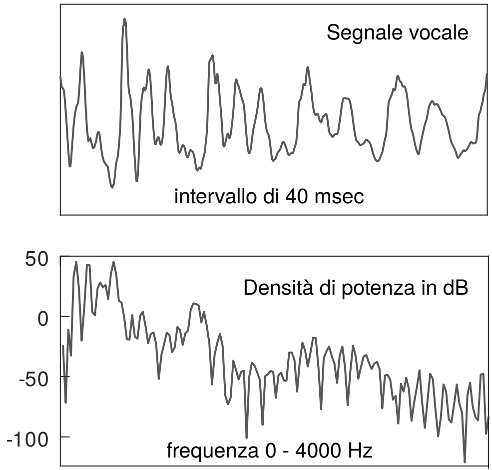
Corrisponde all'andamento *nel tempo* di una grandezza fisica $s(t)$, di natura elettromagnetica come nei campi dell'elettronica o dei circuiti, ovvero risultato della trasduzione elettrica di grandezze di altra natura, come nel caso di un segnale audio che consiste in un'onda trasversale di pressione-velocità convertita in una tensione da un microfono, o nel caso di una misura di posizione, velocità od accelerazione ottenuta mediante tecniche di geo-localizzazione come nel telerilevamento, oppure ancora acquisita mediante sensori utilizzati ad es. nel contesto dei sistemi di controllo automatico.

Una diversa categoria di segnale sono le *immagini*, definite come una funzione di due variabili *spaziali* $s(x, y)$ il cui valore ne individua la *luminanza*, eventualmente corredata da altri segnali di immagine definiti sullo stesso dominio e relativi all'informazione di *crominanza*. In questo contesto il fattore *tempo* torna in gioco qualora si tratti di immagini in movimento, come nei video: questi aspetti sono trattati al cap. 10.

Un segnale può anche presentare *valori complessi*[4], e in tal caso *si sdoppia* in due andamenti definiti come parte reale e parte immaginaria, oppure modulo e fase. In tutti casi, un segnale analogico corrisponde alla comune accezione di funzione di variabile continua dell'analisi matematica, definita su di un supporto che può essere limitato o meno, e può in generale essere studiato e caratterizzato con le tecniche proprie di tale disciplina. Al § 1.5 è fornita una classificazione dei segnali in categorie (impulsivi, di energia, di potenza, e periodici) che rivestono un ruolo fondamentale per il loro studio successivo.

1.2.1.1 Rappresentazione frequenziale dei segnali analogici

Un fondamentale strumento per lo studio di un segnale $s(t)$ è la sua *analisi spettrale*, condotta per mezzo di una particolare *trasformazione lineare*, che individua un corrispondente segnale (in generale complesso) $S(f)$ funzione di una diversa variabile indipendente f nota come *frequenza*. Questo nuovo segnale è un sorta di *radiografia*, una analisi che individua lo *spettro* di frequenze di cui è costituito $s(t)$; le differenza tra la minima e massima delle frequenze presenti è detta *banda del segnale*, uno dei principali parametri che lo caratterizzano dal punto di vista dell'impegno delle risorse necessarie a trasmetterlo.



A seconda della categoria in cui ricade $s(t)$, la trasformazione assume una tra diverse formulazioni, definendo così uno *sviluppo in serie di Fourier* per la rappresentazione dei segnali periodici, una *trasformata di Fourier* per segnali di energia, e uno *spettro di densità di potenza* per segnali di durata indefinita. L'analisi di Fourier individua come la potenza (o l'energia) del segnale si *distribuisce in frequenza.*

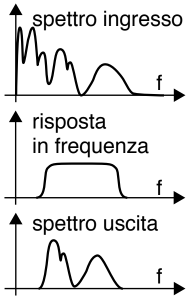
1.2.1.2 Transito dei segnali attraverso sistemi fisici

L'attraversamento di un *canale* da parte di un segnale analogico, che come discusso al § 1.1 avviene grazie ad un *mezzo trasmissivo*, viene studiato mediante l'ausilio di alcuni strumenti fondamentali qui brevemente descritti, e ripresi al § 1.6.

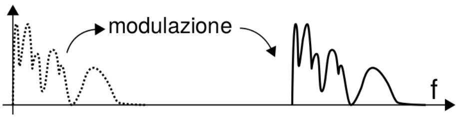
Risposta impulsiva e convoluzione La prima rappresenta l'uscita di un sistema fisico quando in ingresso è presente una particolare astrazione analitica, detta *impulso*

[4]Come vedremo al cap, 11, un segnale a valori complessi è il risultato di una particolare rappresentazione, detta *inviluppo complesso*, utile nell'analisi dei segnali modulati.

matematico. La risposta impulsiva permette di esprimere l'uscita del sistema in corrispondenza di un ingresso qualunque, mediante il calcolo di un particolare integrale (*di convoluzione*) che coinvolge solamente l'espressione del segnale in ingresso, e quella della risposta impulsiva.



Risposta in frequenza e filtraggio Operando nel dominio della frequenza, osserveremo come la trasformata di Fourier della risposta impulsiva rappresenti la *risposta in frequenza* del sistema, ovvero la modalità con cui il sistema riproduce in uscita ciascuna delle frequenze presenti nel segnale di ingresso. Dato che la risposta in frequenza descrive quali frequenze passeranno amplificate, inalterate od attenuate, il transito di un segnale viene indicato anche con il termine *filtraggio*, ed il sistema è detto *filtro*.



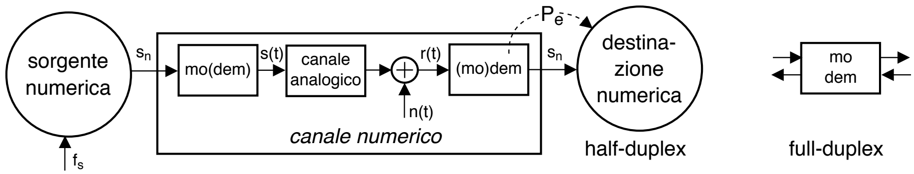
Modulazione Qualora il canale (o filtro) attraverso cui convogliare il segnale $s(t)$ non permetta l'attraversamento alle frequenze in esso presenti, come ad esempio nel caso di un collegamento radio, occorre trasformare il segnale mediante una tecnica chiamata *modulazione*, in modo che il risultato giaccia in una *banda* di frequenze compatibile con la risposta in frequenza del canale. Il segnale modulato occupa ora una banda concentrata attorno ad un frequenza più elevata detta *portante*, ed il suo andamento nel dominio del tempo è descritto da un segnale noto come *inviluppo complesso*.

Trasferimento energetico Nel caso di collegamenti a distanza il mezzo trasmissivo *attenua* il segnale in transito, che viene ricevuto con una ampiezza molto inferiore a quella di trasmissione. Pertanto è fondamentale verificare che la potenza ricevuta non sia inferiore alla *soglia di sensibilità* del ricevitore, ovvero il minimo segnale necessario a garantire la qualità di ricezione richiesta. D'altra parte, attenuazioni e distorsioni di entità non trascurabile possono verificarsi anche in assenza di collegamenti a distanza, qualora si verifichi un *disadattamento di impedenza* tra stadi della catena trasmissiva.

Ulteriori aspetti dei sistemi di telecomunicazione sono riassunti al § 1.4, mentre ora ci occupiamo di caratterizzare le modalità di trasmissione per una *sequenza*.

1.2.2 Trasmissione numerica

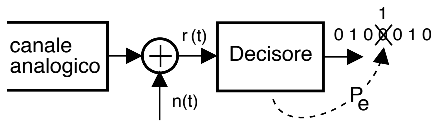
Quando il contenuto informativo è costituito da una sequenza numerica s_n i suoi elementi possono essere messi in relazione biunivoca con un più generale *alfabeto simbolico* $\mathcal{A}$ a cardinalità finita, come ad esempio nel caso di un testo scritto, in cui $\mathcal{A}$ è il vero e proprio alfabeto della lingua in cui è scritto il testo. In questo caso sorgente e destinazione della trasmissione sono anch'esse indicate come *numeriche*, mentre gli elementi della sequenza s_n sono indicati come *simboli*, emessi dalla sorgente ad intervalli temporali regolari distanziati da un tempo di T_s secondi detto *periodo di* *simbolo*, il cui inverso $f_s = 1/T_s$ è indicato come *frequenza di simbolo*[5]. Ciò che permette la trasmissione tra sorgente e destinazione dell'informazione contenuta nel messaggio prende ora il nome di *canale numerico*, pensabile come una entità a se stante, che la figura seguente mostra essere comunque costituito al suo interno dal canale *analogico* già discusso, e basato a sua volta su di un mezzo trasmissivo.



Modem o codificatore di linea Denota il dispositivo che provvede a generare un segnale analogico $s(t)$ in grado di trasportare l'informazione espressa dalla sequenza numerica s_n, e la cui etimologia deriva dalla contrazione di MO*dulatore* e DEM*odulatore*, mentre il termine *codificatore di linea* è riferito alla trasmissione su di una *linea di trasmissione* come ad esempio un collegamento in cavo. In particolare, una trasmissione unidirezionale[6] necessita di solo *metà* delle funzioni del modem per entrambi i lati del collegamento, mentre nel caso di collegamento *full duplex* (in cui gli estremi del canale possono essere contemporaneamente sorgente e destinazione) il modem opera allo stesso tempo nelle due direzioni.

All'interno del modem di ricezione è presente un dispositivo *decisore*, in grado di ricostruire la sequenza s_n a partire dal segnale analogico ricevuto $r(t)$, ma a causa del rumore $n(t)$ presente all'uscita del canale analogico il decisore può commettere *errore*, producendo una sequenza $\hat{s}_n \neq s_n$.

Probabilità di errore Quando il *decisore* presente nel modem produce un simbolo *diverso* da quello trasmesso si verifica un *errore*, e la frazione del numero di eventi di errore rispetto al totale rappresenta la *probabilità di errore*, il cui valore costituisce il parametro che caratterizza *la qualità* del collegamento numerico. Evidentemente il valore della probabilità di errore è strettamente legato in modo inverso a quello del rapporto segnale-rumore SNR che si riscontra per il canale analogico sottostante.

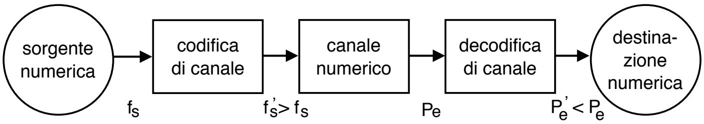


[5]Una sequenza prodotta da una sorgente numerica si presta facilmente ad essere trasformata in un'altra, con un diverso alfabeto ed una differente frequenza di simbolo. Per fissare le idee, consideriamo i simboli di una sequenza numerica s_n ad L valori (ovvero $\mathcal{A} = 1, 2, \cdots, L$): questi possono essere presi a gruppi di M, producendo nuovi simboli q_k a velocità M volte inferiore, ma con L^M valori distinti. Se si dispone di un alfabeto di uscita $\mathcal{B}$ ad H valori (ovvero $\mathcal{B} = 1, 2, \ldots H$), i gruppi di M simboli L-ari originari possono essere rappresentati con gruppi di N simboli H-ari purché $L^M \leq H^N$. Esempio: per codificare in binario ($H = 2$) simboli con $L = 26$ valori, occorrono almeno $N = 5$ bit/simbolo, ottenendo così $2^5 = 32 > L = 26$. E' un ragionamento confuso? Si e no. Basta fare degli esempi.

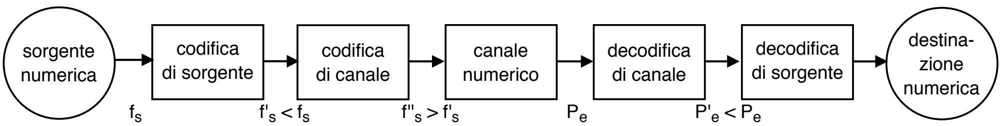
[6]Nelle trasmissioni unidirezionali, sorgente e destinazione non si scambiano i ruoli. La trasmissione stessa viene anche indicata con il termine di *half-duplex*.

Affrontiamo ora due aspetti del tutto *peculiari* della trasmissione di sequenze numeriche e simboliche, ovvero la codifica *di canale* e *di sorgente*.

Codifica di canale Consiste nell'invio di più simboli di quanti non ne produca la sorgente, e quindi di fatto *aumentando* il loro numero per unità di tempo, che da f_s passa ad $f_s' > f_s$. La scelta dei simboli aggiunti viene fatta in modo che essi *dipendano* in modo *deterministico* da quelli da già presenti, rendendo così la sequenza trasmessa *ridondante*, allo scopo di ridurre il valore della probabilità di errore. Infatti la dipendenza (nota) tra i simboli trasmessi permette al ricevitore di "accorgersi" che si è verificato un errore, dato che tale dipendenza non è più rispettata, e quindi il ricevitore può attuare delle contromisure, come quella di inviare una richiesta di ritrasmissione, oppure se la ridondanza introdotta è sufficientemente elevata, tentare di correggere errori isolati[7]. Dopo aver (eventualmente) svolto le possibili contromisure, i simboli aggiunti vengono rimossi al lato ricevente da parte di un blocco di *decodifica di canale*.



Codifica di sorgente Ha uno scopo per così dire "inverso" a quello della codifica di canale: la codifica di sorgente infatti *rimuove la dipendenza* (ora in senso *statistico*) tra i simboli presenti nella sequenza prodotta dalla sorgente, determinando la riduzione del numero di simboli da trasmettere per unità di tempo[8], che passa così da f_s ad $f_s' < f_s$. Un tipico esempio è rappresentato dagli algoritmi di *compressione* per i documenti su computer, come ad es. i file *zippati*: in tal caso il fattore di compressione ottenibile dipende dalla natura del file, ed è tanto maggiore quanto più questo presenti caratteristiche di ripetitività, ovvero di predicibilità del suo contenuto. Pertanto l'uscita di un codificatore di sorgente è una sequenza di simboli tendenzialmente *indipendenti* tra loro, avendo limitato la predicibilità di un simbolo a partire dai circostanti.



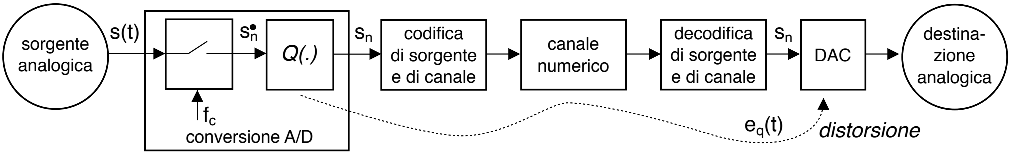
Non resta ora che discutere dei due casi elencati in fig. 1.2 ma non ancora incontrati, ovvero di ...

Campionamento e quantizzazione Poniamoci il problema di utilizzare un *canale numerico* per effettuare una *trasmissione analogica*: il vantaggio di una tale "contorsione" è da ricercarsi nel migliore comportamento della trasmissione numerica rispetto ai

[7]Si parla in questo caso di codifica FEC, ovvero di *Forward Error Correction*.

[8]Pensiamo per similitudine ad un imballaggio, il cui contenuto è prima disposto in modo da occupare il minimo volume (codifica di sorgente), ed a cui viene poi aggiunto del materiale antiurto (codifica di canale).

disturbi, nonché alla sua *generalità*[9]. Per riuscire nello scopo occorre che il segnale $s(t)$ prodotto dalla sorgente analogica venga prima *campionato* prelevandone i valori $s_n^\bullet$ in corrispondenza degli istanti $t = nT_c$, ossia con una velocità di $f_c = {}^1\!/T_c$ campioni/secondo, e quindi *quantizzato* approssimando i valori $s_n^\bullet$ mediante un insieme finito di L valori, producendo una sequenza numerica s_n di simboli appartenenti ad un alfabeto finito. Questa coppia di operazioni è indicata come *conversione analogico-digitale* o A/D, e la sequenza s_n può essere rappresentata da una sequenza *binaria* facendo corrispondere $M = \lceil \log_2 L \rceil$ bit[10] ad ognuno dei simboli L−ari. Dopo le operazioni di co-decodifica e trasmissione, un dispositivo di conversione *digitale-analogica* (DAC) posto al lato ricevente provvede a ricostruire il segnale $s(t)$ originario.[11]



Rumore di quantizzazione L'approssimazione dei campioni $s_n^\bullet$ mediante un insieme finito di valori introduce una *distorsione*, dato che il DAC opera su valori approssimati e non su quelli reali. L'effetto risultante è come se presso la destinazione fosse presente un disturbo additivo $e_q(t)$, detto *rumore di quantizzazione*, che si somma al segnale originario. L'entità di tale disturbo è inversamente legata alla *risoluzione del quantizzatore*, ovvero alla capacità di differenziare tra valori di ingresso molto vicini tra loro. In definitiva, la distorsione risulta tanto minore quanto maggiore è la velocità del flusso informativo prodotto dal quantizzatore, espresso in bit/secondo.

Abbiamo ora tutte le basi per introdurre un ulteriore concetto, quello della

Teoria dell'informazione Se ne parla al cap. 9, e deriva da una serie di teoremi enunciati negli anni '50 da Claude Shannon, le cui conseguenze possono essere riassunte come

Compromesso velocità-distorsione Una sorgente analogica campionata a velocità di f_c campioni/secondo e quantizzata con M bit/campione produce un flusso informativo di $f_b = f_c \cdot M$ bit/secondo, tanto più elevato quanto minore è la distorsione introdotta dal processo di quantizzazione[12]; pertanto la velocità di

[9] Nei collegamenti numerici non occorre specializzare il metodo di trasmissione al mezzo a disposizione, anzi quest'ultimo è totalmente "mascherato" dal fornitore del collegamento numerico stesso, e dal modem che viene utilizzato.

[10] La notazione $M = \lceil \log_2 L \rceil$ individua l'intero superiore del valore racchiuso tra le semiparentesi $\lceil\rceil$. Ad esempio se $L = 21$ allora $\log_2 21 = 4,3923..$ e dunque $M = \lceil 4,3923 \rceil = 5$, ovvero occorrono 5 bit/campione.

[11] L'utilizzo di dispositivi di conversione digitale-analogico è molto comune nella realtà odierna, un esempio tra tutti è quello dei *CD audio*, vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/CD_Audio`

[12] Infatti $M = \lceil \log_2 L \rceil$ aumenta all'aumentare del numero L di possibili valori per i campioni quantizzati, e ciò corrisponde ad una maggiore fedeltà, ossia ad una minore distorsione. Inoltre, al cap. 4 verrà illustrato come l'aumento di f_c corrisponda ad un maggiore intervallo di frequenze che possono essere riprodotte dal DAC, ovvero anche il valore di f_c è direttamente legato ad un concetto di fedeltà di riproduzione.

trasmissione può essere ridotta a patto di accettare una maggiore distorsione.

Compromesso banda-potenza Un qualsiasi canale pone un limite al massimo flusso informativo che vi transita. Il limite deriva dai vincoli che il canale impone sulla massima banda **B** del segnale trasmesso, sulla massima potenza di segnale **S** ricevuta, e sulla potenza di rumore **N** presente al ricevitore. Il massimo flusso di informazione in transito prende il nome di *capacità di canale* **C**, espressa dalla relazione $C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$ bit/sec. In questi termini, la massima velocità di trasmissione può dipendere da una limitazione sulla banda, o sulla potenza, od essere causata da un eccessivo rumore: a parità di rumore solo adottando un diverso canale che permetta di trasmettere più potenza, o di occupare più banda, è possibile trasmettere a velocità più elevata.

Compromesso tempo-distorsione Considerando una coppia sorgente + canale, dato che il canale limita il massimo flusso informativo prodotto dalla sorgente, quest'ultima verrà necessariamente riprodotta con una distorsione tanto maggiore quanto minore è la capacità di canale. A meno di non cambiare canale, oppure impiegare *più tempo* per la trasmissione, e rinunciare alla possibilità di una riproduzione in *tempo reale*.

1.3 Segnali aleatori

Fin qui si è fatta l'assunzione implicita che i segnali e le sequenze di cui si discute siano *segnali certi*, ovvero completamente *noti*, in forma di espressione analitica (ad es., una sinusoide con ampiezza e fase noti) oppure nei termini di una forma d'onda registrata. Al contrario, un sistema di comunicazione deve essere progettato per poter funzionare altrettanto bene per tutti i possibili segnali appartenenti ad una medesima classe, che prendono il nome di segnali (o *processi*) *aleatori* in quanto definiti unicamente da un punto di vista probabilistico, o per meglio dire, statistico.

1.3.1 Calcolo delle probabilità e statistica

Non solo costituisce la base per trattare i segnali aleatori, ma anche per definire la quantità di informazione di un messaggio, le prestazioni di un collegamento, i fenomeni che caratterizzano le trasmissioni radiomobili, il dimensionamento di una rete... Per questo al cap. 6 sono riassunti concetti di calcolo delle probabilità e di statistica, immediatamente applicati nel cap. 7 per arrivare a descrivere sia i segnali certi che quelli aleatori mediante lo stesso formalismo analitico.

1.3.1.1 Autocorrelazione e densità di potenza

Con questi termini si indicano due funzioni discusse al cap. 7, una del tempo e l'altra della frequenza, che è possibile definire per i segnali sia certi che aleatori, e che ne permettono la trattazione in modo unificato ai fini della relativa *stima spettrale*. Osserveremo come processi molto *correlati* siano caratterizzati da una densità di potenza di tipo *colorato*, mentre al contrario i processi scarsamente correlati saranno identificati da una densità di potenza di tipo *bianco*[13].

1.3.1.2 Teoria del traffico

Viene trattata al cap. 22 ed affonda le radici nel calcolo delle probabilità. Affronta il problema del dimensionamento di collegamenti che trasportano più messaggi contemporaneamente, ovvero che li trasmettono su di un medesimo mezzo trasmissivo in forma multiplata. In particolare, la teoria del traffico consente di analizzare e confrontare le prestazioni offerte dalle reti basate sulla commutazione di circuito o di pacchetto, dal punto di vista della probabilità di blocco e del ritardo medio.

1.4 Sistemi di telecomunicazione

Questa introduzione prosegue descrivendo, in modo sommario e sicuramente parziale, cinque diversi *punti di vista* in cui è possibile inquadrare le problematiche di telecomunicazione, ovvero gli aspetti *fisici*, di *sistema*, di *rete*, di *elaborazione*, e di *trasporto*, fornendo per ognuno di essi rimandi a dove nel testo essi vengono trattati, principalmente collocati a partire dalla *seconda parte* del testo, pag. 431.

Aspetti fisici Un canale di comunicazione, *dal punto di vista fisico*, si identifica con il mezzo trasmissivo, per la descrizione del quale si adotta frequentemente un modello circuitale. Elenchiamo i mezzi comunemente adottati:

Collegamento radio Il segnale si propaga nello spazio libero come onda elettromagnetica sferica, e viene irradiato mediante antenne, che ne focalizzano la potenza lungo direzioni privilegiate. La trasmissione è resa possibile grazie al processo di modulazione, cap. 20;

Collegamento in cavo Da quello tra computer e stampante, a quello su doppino (telefonia) e su cavo coassiale (televisione, ethernet). Può essere di tipo half o full duplex a seconda se i due estremi della comunicazione siano unidirezionali o bidirezionali, § 19.2;

Collegamento in fibra ottica E' realizzato facendo viaggiare energia luminosa attraverso una guida d'onda di materiale dielettrico. La tecnica è idonea alla trasmissione dei soli segnali numerici, dato che la sorgente luminosa in trasmissione viene semplicemente *accesa e spenta* in corrispondenza dei bit (zero od uno) del messaggio, § 19.3;

Modello circuitale Il collegamento ed i trasduttori ad esso relativi sono spesso descritti ricorrendo ad un circuito elettrico equivalente, in modo da poterne descrivere il comportamento mediante strumenti analitici noti, cap. 18.

[13] I termini *colorato* e *bianco* hanno origine da una similitudine con l'energia luminosa, per cui se la luce bianca indica l'indiscriminata presenza di tutte le lunghezze d'onda, così uno spettro bianco indica la presenza in egual misura di tutte le frequenze; viceversa, come una luce colorata dipende dal prevalere di determinate frequenze nella radiazione elettromagnetica, così uno spettro colorato indica la prevalenza di alcune frequenze su altre.

Aspetti sistemistici Da un punto di vista *di sistema*, il transito dei segnali attraverso sistemi fisici è analizzato in termini del peggioramento introdotto, che può essere catalogato nell'ambito di diverse categorie:

Distorsioni Si distinguono quelle cosiddette *lineari*, causate da una risposta in frequenza non ideale, dalle distorsioni *non lineari*, che causano invece una deformazione istantanea sulla forma d'onda in transito, capp. 8 e 13;

Non stazionarietà Sono fenomeni caratterizzati da una variazione nel tempo delle caratteristiche del canale, e ricorrono spesso nel caso di comunicazioni con mezzi mobili, § 20.4.4;

Attenuazione Un segnale trasmesso su un canale presenta in uscita una ampiezza inferiore a quella di ingresso. L'attenuazione può essere legata a cause fisiche intrinseche (lunghezza del collegamento, disadattamento di impedenze, tecnologia degli amplificatori), o dipendendere da fatti contingenti (percorsi multipli, pioggia); in questo secondo caso, il fenomeno è trattato come l'esito di un processo aleatorio, §§ 19.1, 19.2.2, 20.4.1, 19.3.2;

Portata Affinché possano essere soddisfatti i requisiti di qualità (ad esempio l'SNR) desiderati, risulta che la lunghezza del collegamento deve essere inferiore ad un massimo, in conseguenza dell'attenuazione del collegamento, della potenza trasmessa, e degli altri fatti contingenti;

Qualità del servizio Con questo termine sono indicate diverse grandezze, ognuna applicabile in un particolare contesto, e che rappresentano un indice di "bontà" del processo comunicativo. Tra queste grandezze possiamo citare il *rapporto segnale rumore* SNR (§ 14) e la *probabilità di errore* P_e (§ 15.4, tab. 16.1), relative rispettivamente alle trasmissioni analogiche e numeriche; il *ritardo medio* (§ 22.4), rilevante nel caso di trasmissioni a pacchetto; il *tempo di fuori servizio* (§ 20.3.2.1), qualificante della affidabilità dei sottosistemi di comunicazione.

Rete Dal punto di vista della *rete di comunicazione*, la consegna del messaggio informativo alla destinazione deve tener conto degli aspetti descritti come:

Commutazione La rete è costituita da un insieme di *nodi di commutazione,* interconnessi da collegamenti che vengono usati in modalità condivisa da molte comunicazioni contemporanee, e che sono *attraversati* dai messaggi in transito e da *smistare* verso la porta di uscita corretta, §§ 22.5.2.2, 24.8;

Instradamento La determinazione del percorso dei messaggi nella rete, scelto tra i possibili percorsi alternativi che collegano la sorgente con la destinazione, prende il nome di *instradamento*, §§ 24.7, 23.1.3;

Segnalazione Il coordinamento tra i nodi della rete avviene mediante lo scambio tra gli stessi di informazioni aggiuntive dette *di segnalazione*, che costituiscono un vero e proprio processo di comunicazione parallelo a quello prettamente informativo, § 24.3.2;

Protocollo Lo scambio dei messaggi tra le coppie di nodi della rete, od anche tra i nodi ed un organo di controllo centrale, avviene utilizzando particolari linguaggi, detti *protocolli* di segnalazione, capp. 23, 24, § 22.6.

Mobilità Se i nodi della rete modificano la propria posizione nel tempo, o gli utenti desiderano usufruire degli stessi servizi indipendentemente dal punto di accesso alla rete, occorre individuare soluzioni specifiche, come ad esempio la registrazione ed il mantenimento dei propri dati presso una *unità di controllo*, e l'adozione di procedure di *autenticazione* che permettano di certificare l'identità degli utenti.

Elaborazione terminale Questa categoria comprende tutti gli aspetti legati alle trasformazioni operate sull'informazione ai due estremi del collegamento[14]. Tra questi è possibile distinguere la...

Codifica di sorgente Individua le trasformazioni sul segnale in grado di ridurre la quantità di risorse trasmissive necessarie (ad esempio, banda), e consiste in operazioni che tengono conto di specifiche *caratteristiche del segnale* da trattare, come nel caso della codifica vocale, o della codifica video, capp. 9 e 10;

Codifica di canale Definisce le trasformazioni necessarie a combattere gli errori nelle trasmissioni numeriche, e può tener conto delle caratteristiche statistiche *dei disturbi*, cap. 17;

Modulazione e formattazione Le operazioni necessarie alla trasmissione di un segnale radio, o di un segnale numerico, possono tener conto delle caratteristiche del *canale trasmissivo*, e adottare soluzioni che possono facilitare la realizzazione delle due funzioni precedenti, § 12, cap. 16, § 22.5.1.

Trasporto Dal punto di vista *logistico*, sono rilevanti gli aspetti di

Multiplazione Individua le modalità di uso condiviso di uno stesso mezzo trasmissivo da parte di più comunicazioni in transito contemporaneo per un tratto in comune; il risultato è quello di migliorare sensibilmente l'efficienza di utilizzo della rete, garantendo che le risorse trasmissive non restino poco (o per nulla) utilizzate. Le tecniche comunemente adottate sono la *multiplazione* ...

- di *frequenza*, in cui le diverse comunicazioni sono centrate su portanti diverse ma che ricadono in una medesima banda di frequenze, §§ 24.2.1, 11.1.1;
- di *tempo*, in cui lo stesso collegamento è utilizzato per più comunicazioni contemporanee in base ad uno schema di alternanza temporale, (§ 24.2.1);
- di *codice*, in cui diverse comunicazioni avvengono simultaneamente nella medesima banda di frequenza, adottando una particolare codifica che ne permette la separazione dal lato ricevente, (§ 16.9);

[14] L'importanza e la specificità di tali trasformazioni assume un rilievo sempre maggiore con l'evoluzione (in termini di miniaturizzazione e potenza di calcolo) dei dispositivi di elaborazione, in special modo per ciò che riguarda le trasmissioni numeriche.

- *cromatica* o di *lunghezza d'onda*, che si realizza quando un'unica fibra ottica è alimentata da una sorgente luminosa che adotta una λ diversa per ogni flusso numerico trasportato, (§ 19.3.3.2);
- *spaziale*, possibile nelle trasmissioni radio multi-antenna (§ 21.5), in cui più comunicazioni avvengono allo stesso tempo e nella stessa banda, ma restano separabili in virtù delle proprietà della matrice di guadagni complessi tra le antenne di trasmissione e quelle di ricezione.

Controllo Riguarda la corretta consegna del messaggio al destinatario, e coinvolge la gestione degli errori di trasmissione (§ 22.6), le problematiche di riassemblaggio delle comunicazioni inoltrate in forma di pacchetti distinti, la gestione della segnalazione per ciò che riguarda l'adattamento dei protocolli di instradamento alle condizioni di carico della rete, ed il coordinamento delle sorgenti che desiderano trasmettere utilizzando il medesimo mezzo trasmissivo.

Si conclude qui la parte introduttiva di questo capitolo. Passiamo ora ad approfondire gli oggetti dello studio che ci attende, indicati come *segnali* e *sistemi*, due categorie concettuali alla base di molte discipline dell'ingegneria dell'informazione, e per questo a volte date per scontate: proviamo quindi a fare un po' di chiarezza.

1.5 Classi di segnale ed operazioni relative

Al § 1.2 è stata illustrata una tassonomia dei segnali distinguendoli sulla base del dominio di definizione (continuo o discreto) e dei valori assunti (continui o discreti). Volendo procedere per gradi, iniziamo a discutere dei segnali analogici $s(t)$, continui sia per quanto riguarda il tempo che per le ampiezze, e che essendo nient'altro che funzioni di una variabile temporale, possono essere caratterizzati utilizzando gli strumenti noti dai corsi di analisi matematica, almeno nel caso in cui se ne conosca l'espressione analitica. D'altra parte i segnali che tratteremo, proprio per la loro natura di trasportare informazione, spesso non sono noti a priori[15] ma definiti solo in termini statistici: vedi ad esempio la fig. 1.3 che riporta un frammento di segnale vocale, ed un tracciato ECG. In tal caso i calcoli che stiamo per illustrare individuano condizioni che possono essere verificate solo per via numerica[16], a partire da *esempi* dei segnali stessi.

Al § 1.2.1 sono stati definiti *segnali analogici* anche le immagini ed le funzioni a valore complesso, ma per ora restringiamo l'attenzione al caso di segnali di *variabile reale* ed a *valori reali*, ovvero di semplici *funzioni del tempo* $s(t)$. Inoltre, ci aspettiamo che in generale i segnali di interesse NON POSSANO avere asintoti verticali, dato che i circuiti elettrici operano su tensioni e correnti di valore finito; per lo stesso motivo, *escludiamo* i segnali che divengono *illimitati* per $t \to \infty$.

[15] Discuteremo al cap. 9 come l'informazione consista nella *sorpresa* di conoscere qualcosa che prima era ignoto, e dunque un segnale perfettamente noto non trasporta informazione.

[16] Ad esempio, il calcolo dell'integrale di una funzione viene svolto *per via numerica* quando è ottenuto senza conoscerne la primitiva, per mezzo di un programma che ne calcola l'approssimazione secondo la definizione di Riemann `https://it.wikipedia.org/wiki/Integrale_di_Riemann`, vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/Integrazione_numerica` e pagine collegate.

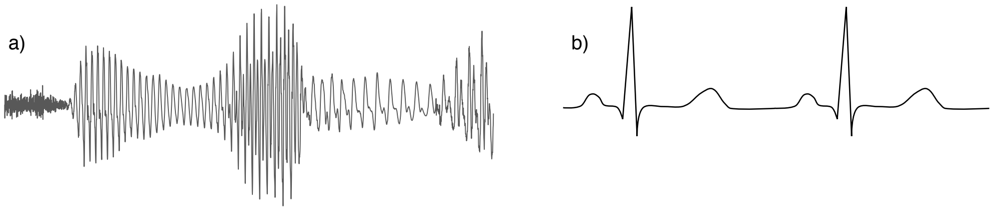


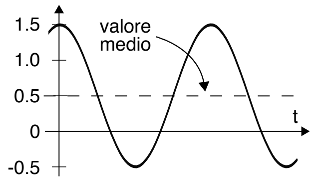
Figura 1.3: a) - 300 msec di segnale vocale; b) - due cicli di segnale elettrocardiografico

Valore medio Se osserviamo un segnale per un intervallo di tempo finito τ, per convenzione centrato attorno a $t = 0$, definiamo *media temporale* su τ il valore $\bar{s}_\tau = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t)\,dt$ e, facendo tendere τ ad infinito, si ottiene il suo *valore medio* $\bar{s}$ come

$$\bar{s} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} s(t)\,dt$$

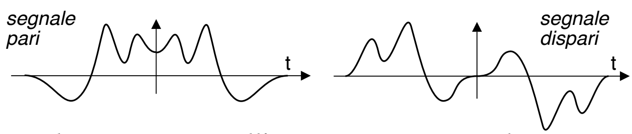
che si esprime nella stessa unità di misura di $s(t)$, visto che la somma integrale moltiplica per un tempo, per il quale viene nuovamente diviso attraverso il fattore $1/\tau$.

Il valore medio $\bar{s}$ è detto anche *componente continua*, ed un qualunque segnale può essere decomposto come $s(t) = s_0(t) + \bar{s}$ in cui $s_0(t)$ è a media nulla. Se $s(t)$ è un segnale *costante* pari ad A, allora $\bar{s} = A$ ed il termine $s_0(t)$ è nullo. In figura, una cosinusoide a valor medio 0.5.



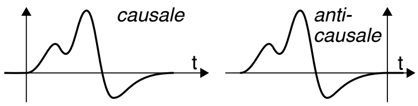
Simmetria pari e dispari Ogni segnale può essere decomposto nella somma dei due termini

$$s(t) = s_p(t) + s_d(t)$$



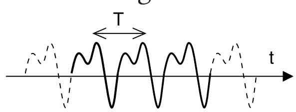
in cui $s_p(t)$ e $s_d(t)$ individuano rispettivamente la sua parte *pari* e *dispari* rispetto all'istante $t = 0$, potendo scrivere $s_p(t) = s_p(-t)$ e $s_d(t) = -s_d(-t)$[17]. Un segnale può essere anche solamente pari, o solamente dispari, come rappresentato in figura; notiamo che necessariamente un segnale dispari ha valor medio nullo.

Causalità Individua la condizione per cui $s(t) = 0$ per $t < 0$, mentre nel caso opposto ($s(t) = 0$ per $t > 0$) il segnale è detto *anticausale*. Qualora risulti $s(t) \neq 0$ sia per $t < 0$ che per $t > 0$ il segnale è detto *noncausale*.



Segnale periodico In questo caso il segnale si ripete ciclicamente uguale a se stesso, ed il minimo intervallo temporale T che intercorre tra due copie prende il nome di *periodo*, potendo scrivere

$$s(t) = s(t+T)$$



[17] Le componenti pari e dispari di un segnale si ottengono scrivendo $s(t)$ come

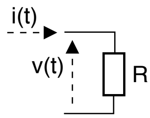
$$s(t) = \tfrac{1}{2}(s(t)+s(t)) + \tfrac{1}{2}(s(-t)-s(-t)) = \tfrac{1}{2}(s(t)+s(-t)) + \tfrac{1}{2}(s(t)-s(-t))$$

da cui si riconosce che $s_p(t) = \frac{1}{2}(s(t)+s(-t))$ e $s_d(t) = \frac{1}{2}(s(t)-s(-t))$.

Il valor medio di un segnale periodico può essere calcolato come $\bar{s} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,dt$, od anche $\bar{s} = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} s(t)\,dt$ per qualsiasi scelta di a. Al § 2.2 vedremo come un segnale periodico possa essere rappresentato mediante la somma pesata di infiniti termini del tipo $\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t + \varphi_n\right)$ con $n = 0, 1, \cdots \infty$. Un segnale *non* periodico è detto *aperiodico.*

Non resta ora che distinguere tra i segnali che si mantengono diversi da zero per $t \longrightarrow \infty$ ([18]) da quelli che invece tendono a zero. Iniziamo dai primi.

Segnale di potenza In fisica la *potenza* $\mathcal{P}$ (espressa in $Watt$ ovvero $^{joule}/_{sec}$) è definita come lavoro per unità di tempo, la *tensione* $\mathcal{V}$ (o potenziale elettrico) come lavoro per unità di carica, e la *corrente* $\mathcal{I}$ come carica per unità di tempo[19]. Da un punto di vista dimensionale possiamo dunque scrivere $\mathcal{P} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{I}$. Infatti, un circuito sottoposto ad una tensione $v(t)$ ed in cui scorre una corrente $i(t)$ assorbe una potenza *istantanea* $p(t) = v(t) \cdot i(t)$ Watt; se poi il circuito consiste in un resistore R, i valori di $v(t)$ ed $i(t)$ sono legati dalla legge di Ohm $i(t) = {}^{v(t)}/_{R}$ e dunque $p(t) = {}^{v^2(t)}/_{R}$; scegliendo infine $R = 1\Omega$ si ottiene $p(t) = v^2(t)$.



La dipendenza dal tempo per la potenza $p(t)$ *scompare* qualora $v(t)$ sia pari ad una costante A, ed in tal caso possiamo scrivere che la *potenza* $\mathcal{P}_v$ del segnale $v(t) = A$ risulta $\mathcal{P}_v = A^2$. Se invece $v(t)$ varia nel tempo, se ne può valutare la potenza *media* assorbita in un intervallo T come valore medio $\overline{\mathcal{P}_{\mathrm{T}}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v^2(t)\,dt$, e per $T \rightarrow \infty$ otteniamo la definizione di potenza di un generico segnale $s(t)$ come

$$\mathcal{P}_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2\,dt \tag{1.1}$$

applicabile anche al caso di segnali *complessi* scrivendo $|s(t)|^2 = s(t) \cdot s^*(t)$ in cui $s^*(t)$ indica il *coniugato* di $s(t)$.

Esercizio Calcoliamo la potenza del segnale periodico $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$. In questo caso il valore medio può ottenersi limitando l'integrale ad un solo periodo $T = {}^{1}/_{f_0}$, e la (1.1) diviene $\mathcal{P}_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[A\cos(2\pi f_0 t)\right]^2 dt = \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\left[1+\cos(4\pi f_0 t)\right]dt = \frac{A^2}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} dt = \frac{A^2}{2}$ in cui si è applicata la relazione $\cos^2\alpha = {}^{1}/_{2}\,(1+\cos 2\alpha)$, e si è sfruttato il fatto che l'intervallo T di integrazione copre *esattamente* due periodi di $\cos(4\pi f_0 t)$, dando luogo ad un valor medio nullo.

Valore efficace E' definito come la radice quadrata della potenza $\mathcal{P}_s$ di un segnale ovvero $s_{eff} = \sqrt{\mathcal{P}_s}$, e rappresenta il valore di un segnale *costante* con la stessa potenza di $s(t)$; è noto anche come *valore quadratico medio* o RMS (*root mean square*). Per una sinusoide di ampiezza A risulta quindi $s_{eff} = {}^{A}/_{\sqrt{2}} \simeq 0.707 \cdot A$.

[18] Si tratta di segnali che non si annullano, ma che neanche divergono, ed in questo caso possono rientrare i fenomeni naturali come il rumore del vento o delle onde del mare, ma anche segnali la cui durata eccede l'intervallo effettivo di osservazione, come un battito cardiaco, o perché no, l'audio di un televisore lasciato acceso giorno e notte!

[19] Vedi ad esempio `https://it.wikipedia.org/wiki/Potenza_(fisica)`, o (sempre su Wikipedia) `Potenziale_elettrico`, `Corrente_elettrica`, e `Potenza_elettrica`

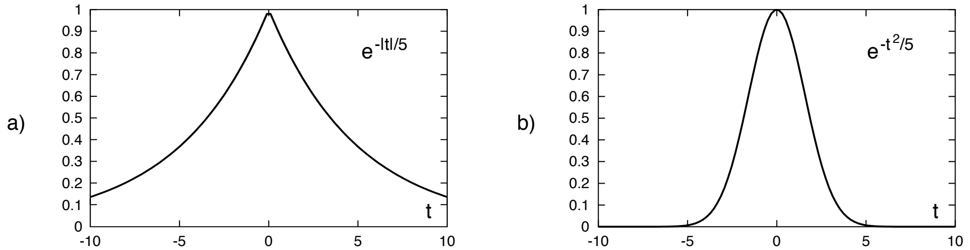


Figura 1.4: Segnale di energia: a) - impulso esponenziale bilatero; b) - impulso gaussiano

Se il segnale tende a zero per $t \to \infty$, al crescere di T il suo integrale $\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2$ aumenta *più lentamente* di quanto non faccia T, e dunque il valore della potenza calcolato mediante la (1.1) risulta nullo, ovvero il segnale *non è* di potenza, e invece è un...

Segnale di energia Riprendiamo la citazione della fisica per cui la potenza è un lavoro per unità di tempo, e ricordiamo che il lavoro è definito come una variazione di energia[20]. Definiamo dunque un segnale (reale o complesso) $s(t)$ *di energia* $\mathcal{E}_s$ quando è diversa da zero la quantità[21]

$$\mathcal{E}_s = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot s^*(t)\, dt \tag{1.2}$$

indicata appunto come energia del segnale. Un paio di esempi di segnale di energia sono riportati in fig. 1.4. L'insieme di tutti i possibili segnali di energia costituisce uno *spazio vettoriale* indicato in matematica come spazio L^2, e gode di particolari proprietà che approfondiremo più avanti[22].

Segnale impulsivo E' un segnale che tende a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, ovvero per il quale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|\, dt < \infty$$

E' il caso delle funzioni *assolutamente sommabili*, per le quali appunto $|s(t)|$ tende a zero più velocemente di $\frac{1}{t}$, e che dunque sono anche di energia.

[20]Ad esempio si compie un lavoro quando si solleva un oggetto, aumentando la sua energia potenziale, o gli si imprime una accelerazione, aumentandone l'energia cinetica.

[21]Perché l'integrale (1.2) converga occorre che per $t \to \infty$ il segnale $s(t)$ tenda a zero più velocemente di $\frac{1}{\sqrt{t}}$, e perciò $|s(t)|^2$ vi tende più in rapidamente di $\frac{1}{t}$. In altre parole, un segnale di energia $s(t)$ è *quadraticamente sommabile*; infatti sappiamo dall'analisi che una funzione è detta *sommabile* (o integrabile) nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ se il suo integrale è finito, ed una condizione sufficiente perché ciò avvenga è che $\lim_{t\to\infty} s(t)$ sia un infinitesimo di ordine *superiore* a 1, ovvero che $\lim_{t\to\infty} t \cdot s(t) = 0$.

[22]Vedi ad es. `https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_a_quadrato_sommabile`. La L che dà il nome allo spazio sta per *Lebesgue*, mentre il ^{2} individua un caso particolare (*di Hilbert*) di spazio L^p che corrisponde a tutte le funzioni per le quali $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^p\, dt$ converge, noto come spazio di *Banach*, per il quale l'integrale costituisce una misura (norma) per i suoi elementi, il che induce una metrica, e quindi una topologia; per approfondimenti `https://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space`

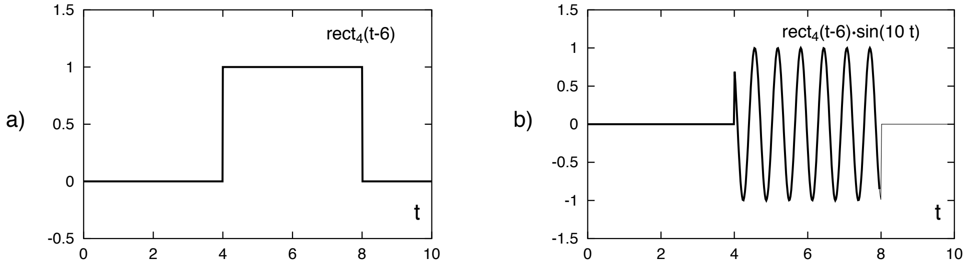


Figura 1.5: Segnale a durata limitata: a) - impulso rettangolare tra 4 ed 8; b) - sinusoide troncata

Segnale a durata limitata Risulta identicamente nullo per t al di fuori di un intervallo finito $[t_1, t_2]$, come esemplificato in fig. 1.5, e dato che per esso la (1.2) da un risultato finito, è anche di energia.

Riassumendo

- Un segnale *impulsivo* è di energia;
- Un segnale a *durata limitata* è impulsivo, e di energia;
- Un segnale *periodico* non è di energia, ma di potenza;

Vedi anche la rappresentazione insiemistica di fig. 1.6.

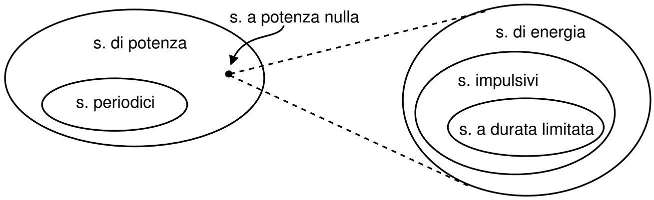


Figura 1.6: Visione insiemistica per le diverse classi di segnali

1.5.1 Spettro di segnale

Come anticipato al § 1.2.1.1, una caratteristica fondamentale dei segnali è quella di poterli descrivere nei termini del *contenuto spettrale* che compete a ciascuno di essi, ovvero come la potenza (o energia) complessiva sia distribuita su di un insieme di *frequenze*. La frequenza è l'inverso di un tempo, e rappresenta *quanto spesso* avviene una circostanza; i segnali sinusoidali sono gli unici a contenere *una sola* frequenza, pari all'inverso del loro periodo.

Esempio Ad una sinusoide di periodo 50 msec corrisponde una frequenza di $^1/_{0.05} = 20$ $^{cicli}/_{secondo}$ e si esprime come $\sin(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 20$ Hertz (Hz).

Un qualunque altro segnale è composto da più di una frequenza, il cui insieme è detto *spettro*[23] *del segnale* (nel dominio della frequenza). Può essere ottenuto mediante gli strumenti forniti dalla *analisi di Fourier* come la corrispondente serie (cap. 2) e

[23] La parola spettro deriva dal latino *specĕre* (guardare) e viene utilizzato in molti campi della scienza per indicare la *gamma* dei costituenti di un qualcosa, vedi `https://it.wiktionary.org/wiki/spettro`

trasformata (cap. 3), che associano ad un segnale $x(t)$ un secondo segnale *complesso* $X(f)$ che è diverso da zero per tutti i valori di f presenti in $x(t)$. Dato che la stessa analisi può essere svolta anche per la risposta impulsiva $h(t)$ che caratterizza un sistema lineare e permanente (§ 1.6), tale rappresentazione si rivelerà unificante.

1.5.1.1 Segnale limitato in banda

Quando un segnale contiene solo frequenze comprese entro un intervallo finito viene detto *limitato in banda* (§ 1.2.1.1); se tale banda è contigua alla frequenza zero viene detto *di banda base*, oppure di banda *traslata* qualora l'intervallo delle frequenze presenti sia concentrato attorno ad una frequenza più elevata detta *portante*. La limitazione in banda è una condizione necessaria affinché un segnale analogico possa essere campionato e quantizzato (cap. 4); d'altra parte, un segnale non può essere contemporaneamente limitato sia in banda che nel tempo.

1.5.2 Operazioni sui segnali

Iniziamo discutendo le operazioni che coinvolgono *un solo* segnale, modificandone ad es. l'ampiezza, o che sono il risultato di una trasformazione *lineare* dell'argomento, ossia sono frutto di un cambio di variabile, come rappresentato in fig. 1.7.

Prodotto per una costante L'ampiezza del segnale $x(t)$ viene variata producendo un $y(t) = a \cdot x(t)$ che ne costituisce una copia *amplificata* ($|a| > 1$), *attenuata* ($|a| < 1$) o *capovolta* ($a < 0$).

Traslazione temporale Sostituisce ad un segnale $x(t)$ un secondo segnale $y(t)$ che ne rappresenta una copia *anticipata* o *ritardata* di un intervallo τ, ovvero

- anticipo: $y(t) = x(t + \tau)$ con $y(t)$ che si sposta *a sinistra* rispetto ad $x(t)$;
- ritardo: $y(t) = x(t - \tau)$ con $y(t)$ che si sposta *a destra* rispetto ad $x(t)$.

Per ricordare la concordanza tra il segno della traslazione τ e le spostamento grafico, si pensi che se un treno è *in ritardo* significa che *non è ancora arrivato*, e dunque (il suo arrivo) si è spostato *in avanti* nel tempo, o nel futuro.

Ribaltamento Ruota il segnale rispetto all'asse delle ordinate, e si scrive $y(t) = x(-t)$.

Cambio di scala Comprime od espande *il grafico* rispetto all'asse dei tempi, ed è espresso come $y(t) = x(\alpha t)$. Si ha una *compressione* per $\alpha > 1$, ovvero una *espansione* per $\alpha < 1$. Infatti se ad es. $\alpha > 1$, una piccola variazione per l'argomento t corrisponde ad una variazione *più grande* per αt.

Cambio di variabile Indichiamo con questo termine la *combinazione* delle singole operazioni fin qui illustrate: in tal caso il risultato complessivo si ottiene applicandole una alla volta, eventualmente modificando l'espressione dell'argomento. Come esempio prendiamo il segnale $s(\alpha t + \beta)$: in questo caso conviene riscrivere l'argomento come $\alpha(t + \beta/\alpha)$ ottenendo così $s(\alpha(t + \beta/\alpha))$, in modo da poter prima anticipare $s(t)$ della quantità β/α, e quindi alterare la scala dell'asse dei tempi del fattore α, come mostrato

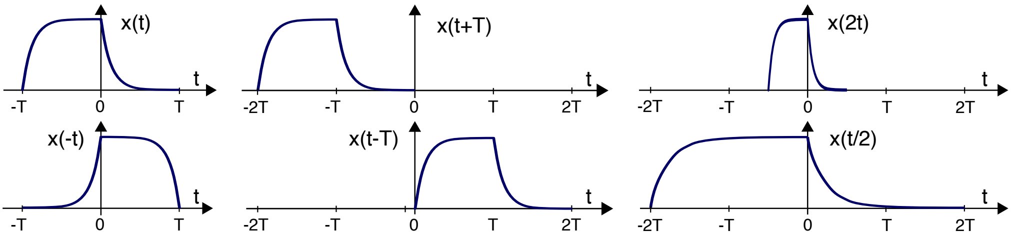


Figura 1.7: Operazioni di ribaltamento, traslazione e scalatura

in fig. 1.8-a). Una variante si verifica ponendo $\alpha = -1$ ottenendo così $s(-t+\beta)$ ovvero $s(\beta - t)$. In questo caso l'anticipo $\beta/\alpha = -\beta$ risulta essere in realtà *un ritardo* paria a β, mentre l'alterazione di scala $\alpha = -1$ corrisponde in realtà ad un *ribaltamento*, ottenendo in definitiva la situazione rappresentata in fig. 1.8-b), che ritroveremo in occasione dello studio della convoluzione (§ 3.4.3) e del filtro adattato (§ 7.6).

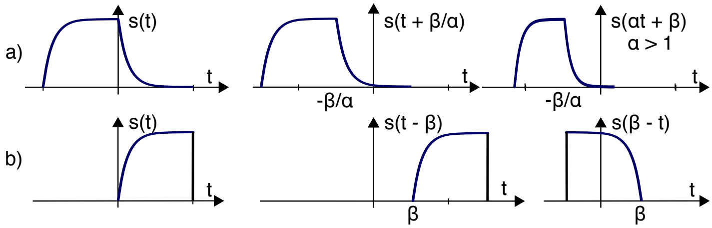


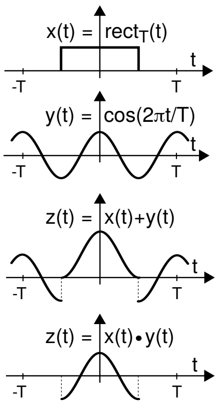
Figura 1.8: Casi particolari di cambio di variabile

1.5.2.1 Combinazione di segnali

Due segnali $x(t)$ ed $y(t)$ possono essere *sommati* tra loro, dopo un'eventuale alterazione di ampiezza, dando luogo ad un nuovo segnale $z(t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$ *combinazione lineare* dei segnali di partenza. Potrebbe essere ovvio, ma è meglio dirlo: se la coppia di segnali appartiene ad una medesima classe (di energia, di potenza, di periodo T) anche il risultato vi appartiene, e ciò comporta che la classe è dotata della struttura algebrica di spazio vettoriale (§ 2.4).

E' altresì definito anche il *prodotto* $x(t) \cdot y(t)$ tra segnali, ma in generale il risultato non appartiene più alla classe di partenza: ad esempio il prodotto tra segnali di uguale periodo genera anche frequenze pari alla somma ed alla differenza delle *armoniche* presenti.

Grafico dei segnali Spesso ci si imbatte in espressioni analitiche il cui senso può essere meglio apprezzato passando dalla forma scritta a quella visiva, ovvero disegnando il grafico di come la variabile *dipendente* varia in funzione dei valori assunti da quella *indipendente* (tempo t o frequenza f) nell'intervallo di interesse. A questo fine il testo è corredato da innumerevoli grafici, ma lo studente dovrebbe essere in grado di visualizzare in modo autonomo l'andamento delle espressioni che incontra. Un metodo generale per ottenere i grafici di somma e prodotto tra segnali è



- disegnare gli assi cartesiani su di una scala graduata compatibile con i valori da graficare, indicando l'identità della variabile indipendente, e quella della grandezza che si intende graficare;
- disegnare un secondo sistema di assi sotto al primo, allineato e nella stessa scala, su cui disegnare il secondo termine della somma o prodotto;
- eseguire la somma (o prodotto) tra i valori dei due segnali per tutti i valori della variabile indipendente, e riportare il risultato su un terzo grafico, allineato ai primi due.

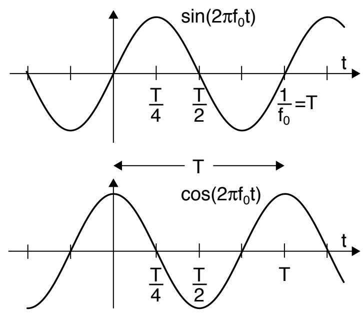
Per casi più complessi è senz'altro di grande aiuto l'uso di applicazioni software che generano grafici *esatti.* Tra queste citiamo

- **Gnuplot** `http://www.gnuplot.info/` Orientato a produrre grafici bi- e tridimensionali mediante una sintassi molto compatta, è in grado di generare uscite per un numero veramente notevole di dispositivi;
- **Octave** `https://www.gnu.org/software/octave/` Un linguaggio di programmazione completo e ad alto livello, con tipi di dato vettoriale e matriciale, equivalente OpenSource di *Matlab* e le cui funzionalità vengono estese da una vasta libreria di *package*. I grafici prodotti con Octave possono essere manipolati e ruotati in modo interattivo;
- **Geogebra** `https://www.geogebra.org/` Un insieme di applicazioni gratuite che girano oltre che su computer, anche via *javascript* nel browser e su smartphone, ognuna orientata ad uno specifico campo applicativo, compresa la grafica (interattiva) di funzioni tridimensionali, ottenibile senza programmare ma semplicemente scrivendo l'espressione analitica di ciò che si vuol graficare. E' molto attiva anche una community che condivide on-line codice di simulazioni animate;
- **Genius** `https://www.jirka.org/genius.html` Anch'esso pur disponendo di un linguaggio di programmazione, permette di generare grafici direttamente a partire dall'espressione analitica, ma in più rispetto ai precedenti, realizza anche grafici di funzioni complesse di variabile complessa! Sviluppato solamente per sistemi *Gnu/Linux*, è presente nelle *repository* di Debian e derivate.

1.5.3 Segnali di uso frequente

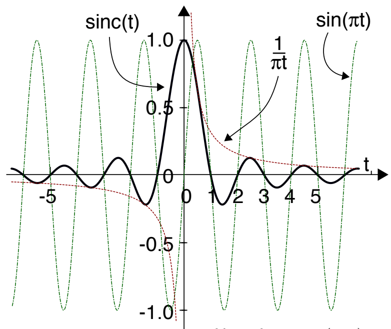
Sinusoide E' un segnale periodico *dispari* con periodo $T = {}^1\!/_{f_0}$ espresso come $s(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, ed in cui è presente l'unica frequenza f_0. La medesima forma d'onda si ottiene anche ritardando una cosinusoide di un quarto di periodo, dato che

$$\sin(2\pi f_0 t) = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\bigl(2\pi f_0\bigl(t - \frac{\pi}{2}\frac{1}{2\pi f_0}\bigr)\bigr) = \cos\bigl(2\pi f_0\bigl(t - \frac{T}{4}\bigr)\bigr)$$



In definitiva, un segnale *di forma* sinusoidale può essere descritto indifferentemente da un seno o da un coseno, con un termine di fase appropriato, legato alla traslazione temporale $\varphi/2\pi f_0$ necessaria ad ottenere la forma d'onda nella posizione richiesta.

Le funzioni matematiche di seno e coseno derivano dalla espressione in coordinate cartesiane della posizione di un punto materiale animato da moto circolare uniforme, ossia che ruota su di un cerchio unitario[24] con velocità angolare $\omega_0 = 2\pi f_0$ $^{radianti}/_{secondo}$.

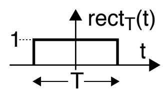


Seno cardinale Il nome deriva dall'uso che ne viene fatto nell'ambito del teorema del campionamento (§ 4.1), ed è definito come

$$\operatorname{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

Si tratta dunque di un modo particolare di scrivere il rapporto $\sin(x)/x$ ben noto nei corsi di analisi per essere utilizzato come esempio di applicazione del *teorema de l'Hôpital*, che ne determina il valore pari ad 1 per $t \to 0$. La figura a lato ne mostra l'andamento, assieme a quello di $\sin(\pi t)$ e di $\frac{1}{\pi t}$: notiamo che avere espresso l'argomento del segnale come πt determina che esso *passa per zero* in corrispondenza dei valori *interi* dell'argomento, cioè per $t = 1, 2, \cdots, n$ con n intero. La sua importanza in teoria dei segnali discende dal fatto che come vedremo, la sua trasformata di Fourier è un rettangolo (e viceversa).

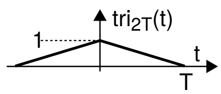
Rettangolo E' un segnale di durata finita che vale *uno* nel suo intervallo di definizione e *zero* al di fuori, e viene espresso nella forma



$$\mathrm{rect}_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } |t| < T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

in cui il pedice $_T$ indica l'ampiezza dell'intervallo per la variabile indipendente, notazione adottata nel testo per segnali a durata limitata. Il rettangolo viene molto spesso utilizzato per idealizzare delle discontinuità di prima specie, ed in tal senso è il risultato di due *gradini contrapposti* $\mathrm{rect}_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$; è spesso anche utilizzato moltiplicato con di altri segnali, in modo da renderli a durata limitata.

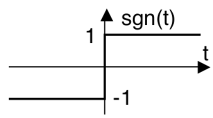
Triangolo Ha funzioni simili al precedente, ma la sua ampiezza varia linearmente da zero ad un massimo (in zero), per poi diminuire di nuovo linearmente. E' definito come



$$\mathrm{tri}_{2T}(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{con } |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

[24] Per una simulazione animata, visita `https://www.geogebra.org/m/Enf5AEbT`

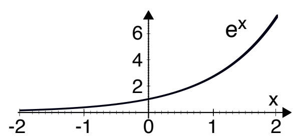
Segno E' definito come



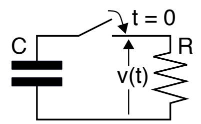
$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{t}{|t|}$$

ovvero in modo equivalente $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{con } t > 0 \\ -1 & \text{con } t < 0 \end{cases}$, e spesso non viene usato come segnale a se stante, ma applicato al valore di un secondo segnale: ad esempio $\operatorname{sgn}(\cos(t))$ produce come risultato un'onda quadra, ed in tal caso viene detto *squadratore* e rappresenta un amplificatore che lavora in regime di saturazione.

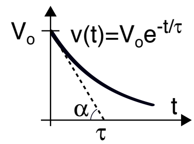
Esponenziale La funzione reale di variabile *reale* e^x ha un ruolo del tutto particolare nell'analisi per il fatto di essere la derivata di stessa, e dunque soluzione di equazioni differenziali del tipo $\frac{df(x)}{dx} = kf(x)$.



Ad esempio, la teoria dei circuiti ci insegna[25] che l'andamento della tensione $v(t)$ ai capi di un condensatore di capacità C che si scarica attraverso una resistenza R ha espressione $\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{RC}$; se aggiungiamo le condizioni al contorno che la scarica inizi all'istante $t = 0$ e che a tale istante il condensatore sia carico ad una tensione $v(t = 0) = V_0$, la soluzione dell'equazione differenziale fornisce $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ in cui il segno meno ribalta l'asse dei tempi, e $\tau = RC$ è detta *costante di tempo* del circuito.



Tale denominazione è legata all'osservazione che nel disegno la *retta tangente* a $v(t)$ in $t = 0$, di espressione $y(t) = mt + V_0$, ha un *coefficiente angolare* m di valore $-\frac{V_0}{\tau}$, e collega il punto $v(0) = V_0$ con l'ascissa $t = \tau$([26]); pertanto per realizzare un disegno approssimato conviene prima tracciare la retta, e quindi l'esponenziale tangente ad essa, come mostrato in figura.



1.5.3.1 Esponenziale complesso

Data la frequenza con cui nel testo viene fatto uso di questa particolare funzione, si è scelto di approfondirne debitamente lo studio. Il *numero di Nepero e* è di tipo irrazionale trascendente[27], ed il valore delle sue potenze e^x corriponde a quello a cui converge sia il limite $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ che la serie di Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; il bello è che tali formule mantengono validità anche per *argomento complesso* $\underline{z}$, rendendo la funzione

$$\underline{w} = e^{\underline{z}}$$

[25] Vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/Scarica_di_un_condensatore`

[26] Il coefficiente angolare m è pari alla derivata di $v(t)$ calcolata per $t = 0$, dunque $v'(t) = \frac{d}{dt} V_0 e^{-t/\tau} = -\frac{V_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ che fornisce appunto $v'(t)\big|_{t=0} = -\frac{V_0}{\tau}$. Inoltre come noto $m = \tan\alpha$ dove α è l'angolo tra la retta tangente e l'asse delle ascisse come mostrato in figura, ma a sua volta $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{V_0}{\tau}$.

[27] Vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/E_(costante_matematica)`

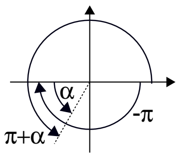
una *mappa conforme*[28] che fa corrispondere ad ogni numero complesso (§ 2.1.1) $\underline{z} = x + jy$ un diverso numero $\underline{w} = u + jv$. Anche l'uguaglianza $e^{\underline{z}+\underline{s}} = e^{\underline{z}} \cdot e^{\underline{s}}$ si mantiene valida per $\underline{z}$ ed $\underline{s}$ numeri complessi, permettendo di scrivere $\underline{w} = e^{\underline{z}} = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}$. Dato che x è la parte reale di $\underline{z}$, osserviamo dunque che quando la parte immaginaria y dell'argomento è nulla si ritrova la definizione di esponenziale di variabile *reale*, di cui l'esponenziale complesso costituisce il *prolungamento analitico*[29].

Ma che andamento ha $\underline{w} = e^{\underline{z}}$ al variare di $\underline{z}$ nel piano complesso? Per farsene una idea, l'unica possibilità che abbiamo è quella di rappresentare separatamente le superfici descritte dalla parte reale $u(x, y)$ ed immaginaria $v(x, y)$ di $\underline{w} = u+jv = e^x \cdot e^{jy}$, oppure le superfici descritte da modulo $|\underline{w}|$ e fase $\arg\{\underline{w}\}$, come mostrato in fig. 1.9.

Osserviamo innanzitutto che il modulo $|e^{\underline{z}}|$ (in alto a destra) dipende solamente da $x = \Re(\underline{z})$, risultando[30] $|e^{\underline{z}}| = e^x$ ossia segue esattamente l'andamento dell'esponenziale reale, per qualunque y. D'altra parte, le parti reale $u = \Re(\underline{w})$ ed immaginaria $v = \Im(\underline{w})$ (a sinistra in figura) hanno un andamento del tutto simile tra loro, in quanto entrambe *oscillano* sinusoidalmente al variare di y con x costante, con la differenza che u oscilla come un coseno (è pari rispetto ad x) mentre v segue un seno (dispari), e dunque si annulla per $y = 0$[31]. Infine osserviamo che la fase (in basso a destra), sempre in virtù della formula di Eulero, si sviluppa come

$$\arctan 2\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan 2\left(\frac{e^x \sin y}{e^x \cos y}\right) = \arctan(\tan(y)) = y$$

e quindi non dipende da x, replicando il valore della parte immaginaria y dell'argomento complesso $\underline{z}$. Pertanto la superficie che descrive la fase di $\underline{w}$ è *un piano*, ma *rientra* dal valore $-\pi$=3.14... ogni volta che supera π, essendo un angolo pari a $\pi + \alpha$ indistinguibile da quello $-\pi + \alpha$. In definitiva, l'esponenziale complesso $\underline{w} = e^{\underline{z}}$ risulta periodico con periodo 2π nella componente immaginaria y dell'argomento $\underline{z}$.



Siamo ora in grado di comprendere *la magia* della costante $e = 2.71828....$ Se valutiamo infatti un esponenziale complesso $a^{\underline{z}}$ per una qualunque altra base $a \neq e$, il grafico che ne risulta è del tutto analogo a quello di fig. 1.9, a parte *per un fattore di scala*[32], come illustrato nel grafico di $\Re(2^{\underline{z}})$ riportato alla figura seguente. Notiamo

[28] Una mappa conforme è una trasformazione che preserva gli angoli ma non la forma degli oggetti (in questo caso delle curve nel piano complesso); tale proprietà deriva dall'essere la serie di potenze di e^z uniformemente convergente su ogni sottoinsieme limitato del campo complesso, e pertanto differenziabile ovunque con derivata non nulla, rendendo l'esponenziale complesso una *funzione analitica*, od *olomorfa*. Per approfondimenti: `https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_esponenziale`, `https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_olomorfa`, `https://it.wikipedia.org/wiki/Mappa_conforme`, `http://people.unipmn.it/catenacc/mec/compl_geometr_complessa.pdf`

[29] Vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/Continuazione_analitica`

[30] Ciò si può dimostrare tenendo conto della *formula di Eulero* (§ 2.1.2) $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, che permette di scrivere $|\underline{w}| = |e^x \cdot e^{jy}| = e^x \cdot \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x$.

[31] Anche questo è un comportamento atteso, sempre alla luce della *formula di Eulero* in base alla quale se $\underline{z}$ è solamente immaginario $e^{jy} = \cos y + j \sin y$.

[32] Tale fattore è pari al logaritmo naturale di a, in accordo alla serie di potenze che recita $a^{\underline{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{z} \ln a)^n}{n!}$

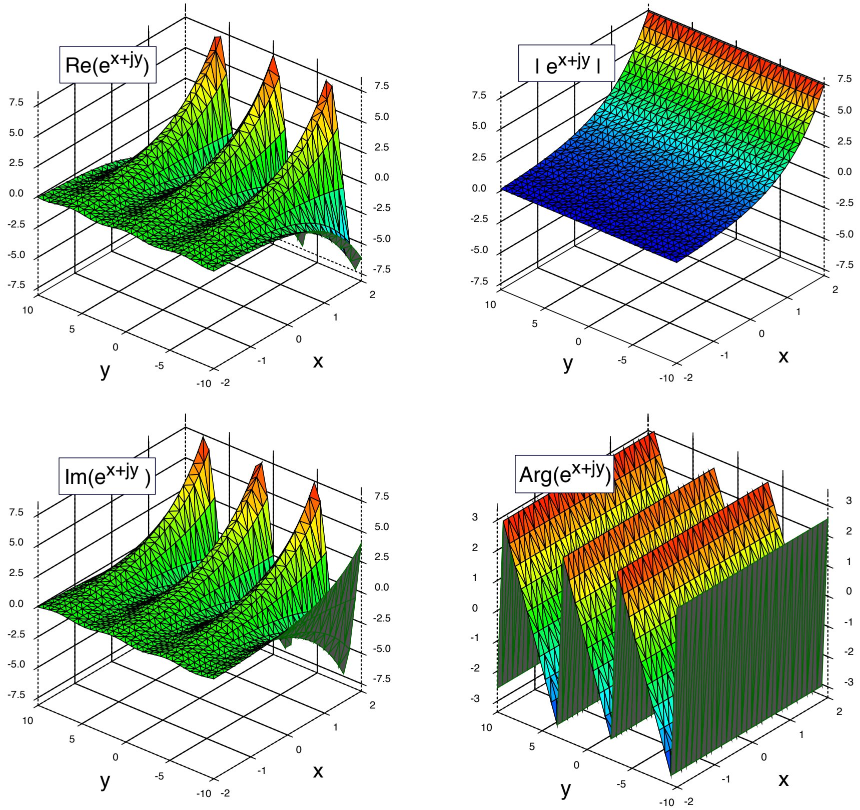
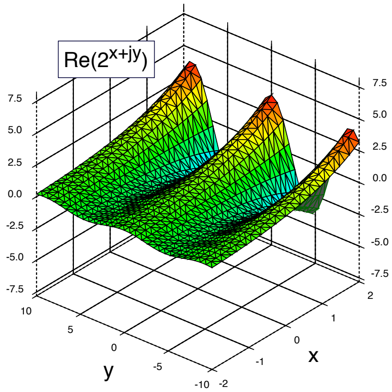


Figura 1.9: Superfici corrispondenti alle componenti dell'esponenziale complesso $u + jv = e^{x+jy}$. A sinistra le parti reale u ed immaginaria v, a destra il corrispondente modulo $\sqrt{u^2 + v^2}$ e fase arctan $({}^{v}/_{u})$

infatti che in questo caso ($a = 2 < e$) l'ampiezza delle oscillazioni si è ridotta, ed il periodo è aumentato: ciò significa che la curva ottenua al variare di y per $x = 0$ *non è più* un coseno, in quanto anche se l'ampiezza è ancora 1 ($2^0 = 1$), il periodo è *maggiore* di 2π. Dunque il numero e è l'unico[33] a soddisfare l'uguaglianza (2.3) $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, che valutata per $y = \pi$ da luogo all'*identità di Eulero*



$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

giudicata una delle migliori espressioni di *bellezza matematica*[34].

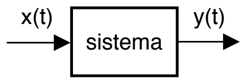
Affrontiamo ora la caratterizzazione degli oggetti che sono *attraversati* dai segnali.

[33] In base all'osservazione di cui alla nota precedente, si ha $a^{jy} = \cos(y \ln a) + j \sin(y \ln a)$

[34] Vedi `https://it.wikipedia.org/wiki/Identità_di_Eulero`, `https://it.wikipedia.org/wiki/Bellezza_matematica`

1.6 Caratteristiche dei sistemi

In termini generali, un *sistema* è un dispositivo che opera su uno o più segnali di ingresso, od *eccitazione*, e produce uno o più segnali di uscita, o *risposta*. Il sistema può essere di natura elettrica, circuitale od elettronica, ma nulla impedisce che sia costituito da componenti meccaniche, pneumatiche, termiche, o di altra natura fisica, ed in generale i segnali di ingresso ed uscita saranno della stessa natura, anche se più spesso sono convertiti in segnali elettrici mediante appositi trasduttori e/o sensori. La relazione tra le grandezze di ingresso e quelle di uscita possono essere di tipo algebrico, o descritte da equazioni differenziali, ed è spesso rappresentata mediante un dominio trasformato (approfondiremo nel testo cosa ciò significa). I sistemi per telecomunicazioni rientrano in generale nella categoria dei *filtri*, ovvero sono lineari, permanenti, causali e stabili, terminologia che ora approfondiamo. La figura a lato mostra la rappresentazione di un sistema mediante uno *schema simbolico* che semplicemente individua i segnali di ingresso e di uscita, senza porre attenzione alla reale natura del sistema stesso.



Nel seguito descriviamo un sistema come una generica *trasformazione* $\mathcal{T}[.]$, tale che ad ogni segnale di ingresso $x(t)$ corrisponde una uscita $y(t)$, ovvero $\mathcal{T}[x(t)] = y(t)$. Procediamo quindi a porre dei *paletti* concettuali entro cui classificare il tipo di sistema.

1.6.1 Sistema lineare e permanente

Un sistema è detto *lineare* se, in presenza di una combinazione lineare di ingressi, l'uscita è la combinazione lineare delle uscite, detta anche *legge di sovrapposizione degli effetti*, ovvero:

$$\mathcal{T}\left[\sum_i a_i x_i(t)\right] = \sum_i a_i \mathcal{T}[x_i(t)] \tag{1.3}$$

ed al § 2.4.4.3 vedremo come in questo caso l'insiemte $\{\mathcal{T}[.]\}$ di tutte le possibili trasformazioni possa essere descritto come uno spazio vettoriale, ed il suo funzionamento equiparato a quello del calcolo di un prodotto scalare.

La condizione (1.3) implica che il sistema *sia a riposo* prima dell'applicazione dell'ingresso, perché altrimenti la presenza di uno *stato interno* diverso da zero ne impedirebbe la linearità. Un sistema è *permanente* (o *stazionario*) se la risposta ad un ingresso traslato nel tempo è la traslazione temporale dell'uscita che si avrebbe per lo stesso ingresso non traslato, ovvero

$$\text{se} \quad \mathcal{T}[x(t)] = y(t) \quad \text{allora} \quad \mathcal{T}[x(t \pm \tau)] = y(t \pm \tau)$$

Nella letteratura anglosassone un tale sistema è indicato come LTI, acronimo di *Linear Time Invariant*. Nel caso contrario, il sistema è detto tempo-variante, non stazionario, o non permanente.

Filtro Al § 3.4.2 scopriremo che per un sistema lineare e permanente il legame $\mathcal{T}[x(t)] = y(t)$ tra le coppie di segnali di ingresso e di uscita è espresso dall'integrale *di convoluzione*

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

in cui la *risposta impulsiva* $h(t)$ caratterizza completamente il sistema nei termini dell'uscita che corrisponde ad un ingresso impulsivo $x(t) = \delta(t)$. Alla convoluzione si associa il concetto di *filtraggio* del segnale, che verifichiamo essere un operatore *lineare* in virtù della distributività dell'integrale, e *permanente* in quanto $h(t)$ dipende solo dal tempo trascorso dalla applicazione del segnale[35].

Memoria Notiamo che un sistema descritto da una risposta impulsiva $h(t)$ con estensione temporale non nulla è detto *con memoria,* in quanto i singoli valori di uscita dipendono da tutti i valori di ingresso *pescati*[36] dalla risposta impulsiva, vedi § 3.4.3.

Realizzabilità ideale Un sistema è detto *idealmente realizzabile* se $h(t)$ *è reale*, nel senso che può essere realizzato un *vero* dispositivo con quella $h(t)$.

Realizzabilità fisica Questa proprietà viene anche indicata come *causalità,* poiché descrive l'impossibilità di osservare una uscita prima di aver applicato un qualunque ingresso. Una definizione alternativa asserisce che i valori di uscita $y(t)$ ad un istante $t = t_0$ non possono dipendere da valori di ingresso $x(t)$ per istanti futuri $t > t_0$. Ciò è automaticamente verificato se $h(t) = 0$ con $t < 0$, ovvero se la risposta impulsiva è causale. Osserveremo (nota 28 a pag. 445) come sistemi realizzabili idealmente *ma non* fisicamente possano essere approssimati da sistemi realizzabili, accettando *un ritardo* dell'uscita.

Stabilità E' definita come la proprietà di fornire uscite di ampiezza limitata per segnali di ingresso limitati, ed equivale alla condizione $\int |h(t)|\, dt < \infty$, ovvero che $h(t)$ sia un segnale *impulsivo.* Una tale circostanza garantisce l'esistenza della trasformata di Fourier di $h(t)$, detta *risposta in frequenza* $H(f)$, e definita per $-\infty < f < \infty$.

Risposta in frequenza Se un sistema, oltre che stabile, è anche idealmente realizzabile (cioè $h(t)$ è reale), allora per la risposta in frequenza sussiste la condizione di simmetria coniugata $H(f) = H^*(-f)$, e dunque è sufficiente conoscere la parte a frequenze positive indicata con $H^+(f)$, dato che quella a frequenze negative è ottenibile mediante una operazione di coniugazione. Questo fatto permette di misurare modulo e fase di $H(f) = M(f)\, e^{j\varphi(f)}$, che prende il nome di *risposta in frequenza,* utilizzando come ingresso una funzione sinusoidale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$ con ampiezza A e fase θ note, come illustrato a pag. 74.

[35] In realtà nulla vieta ad un filtro di modificare la propria risposta impulsiva nel tempo, ma in tal caso in uscita compaiono componenti frequenziali non presenti in ingresso, e viene dunque persa la linearità.

[36] Qualcuno, non a torto, mi ha scritto chiendomi se non intendessi dire *pesati.* No, ho scritto così immaginando come se la risposta impulsiva fosse una sorta di *rete a strascico* che pesca i valori di ingresso passati. Effettivamente questo concetto diviene chiaro solo a seguito della costruzione grafica riportata alla sezione citata e che illustra l'operazione di convoluzione, di cui si raccomanda la comprensione.

Spazio di stato Alcune discipline come ad es. i controlli automatici devono tener conto di fenomeni di instabilità, e del fatto che i sistemi su cui operano possono trovarsi in particolari condizioni iniziali; a tal fine ricorrono ad una rappresentazione nota come *spazio di stato* in cui si tiene esplicitamente conto della evoluzione dello stato interno del sistema. Dato che i sistemi di interesse per le telecomunicazioni si assumono privi di un particolare stato interno precedente l'applicazione di un segnale al loro ingresso, non approfondiremo un tale approccio.

1.6.2 Non linearità

Corrisponde ad un legame ingresso-uscita *senza memoria*[37] del tipo $y(t) = g(x(t))$, in cui $g(.)$ è una generica funzione *non* lineare[38]. Ad esempio, un operatore basato sulla elevazione a potenza del segnale di ingresso è *non lineare*. Come approfondiremo al § 8.3, una delle più evidenti conseguenze della non linearità è l'insorgenza in uscita di contenuti frequenziali assenti in ingresso.

[37] Un operatore si dice *senza memoria* quando ogni valore dell'uscita dipende da un unico valore di ingresso.

[38] Una funzione $y(x)$ è lineare quando il suo sviluppo in serie di potenze si arresta al primo ordine, ed è quindi esprimibile in forma $y = ax + b$, che è l'equazione di una retta.

L'opera

Trasmissione dei Segnali e Sistemi di Telecomunicazione

e tutte le risorse relative al testo sono accessibili presso

https://teoriadeisegnali.it/libro/

Puoi contribuire al suo successo promuovendone la diffusione e supportarne lo sviluppo attraverso una donazione, in buona parte devoluta ai progetti *open source*[1] che ne hanno resa possibile realizzazione e divulgazione. Ai donatori viene accordato un accesso *vitalizio* al formato PDF *navigabile* di tutte le edizioni presenti *e future*.

[1]

- Lyx - http://www.lyx.org/
- LaTeX - https://www.latex-project.org/
- TeX Users Group - https://tug.org/
- Inkscape - http://www.inkscape.org/
- Gnuplot - http://www.gnuplot.info/
- Octave - http://www.gnu.org/software/octave/
- Geany - https://www.geany.org/
- Linux - https://www.linux.it/
- Free Software Foundation - https://shop.fsf.org/
- GNOME Foundation - https://www.gnome.org/
- Mozilla Foundation - https://www.mozilla.org/it/
- Wikipedia - https://it.wikipedia.org
- Internet Archive - https://archive.org/about/
- Creative Commons - https://creativecommons.it/chapterIT/
- WordPress - https://it.wordpress.org/
- Phplist - https://www.phplist.org/