April 5, 2022

First intermediate test - Signal processing and information theory

Questions

Question A Given the complex numbers $\underline{x} = 1 + j2$ and $\underline{y} = -(1 + j)$ determine

1. their sum $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$;
2. their expression in exponential notation;
3. their product $\underline{w} = \underline{x} \cdot \underline{y}$;
4. the value $\underline{u} = \underline{x}\, e^{j\frac{\pi}{2}}$;
5. draw $\underline{x}$ and $\underline{u}$ in the complex plane.

Question B Which is the mean value of $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\, rect_{T/4}(t - nT)$?

Question C May a constant signal $x(t) = A$ be though of as a special kind of periodic signal? Why?

Question D Given a signal $x(t) = A \cos\left(2\pi 100\, t + \frac{\pi}{3}\right)$

1. which is its power? Which is its period?
2. How can it be expressed in terms of complex exponentials?
3. How can it be expressed in terms of a sine?
4. How can it be expressed in terms of a time delay?

Question E Express *the output* of a linear system defined as $y(t) = T[x(t)]$ when $x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n(t)$. How can we express the time invariance property?

Question F If the frequency response $H(f)$ of an ideally feasible filter evaluates as $5 + j3$ at $f = 10$ Hz, which is the value of $H(f)$ when $f = -10$ Hz ?

Question G Write down the result of the Parseval's theorem for periodic signals. Why does it holds true?

Question H What is the definition of norm of a vector in 4-dimensional Euclidean space?

Question I Write down the expression of the inner product between two periodic signals $x(t)$ and $y(t)$ with the same period T. Can you also write the inner product calculation formula, once their Fourier coefficients $\{X_n\}$ and $\{Y_n\}$ are known? And can you explain why such calculation is possible?

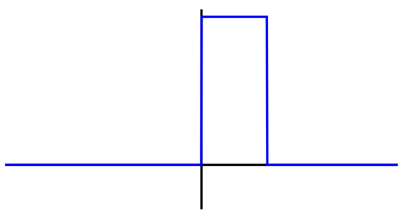
April 5, 2022

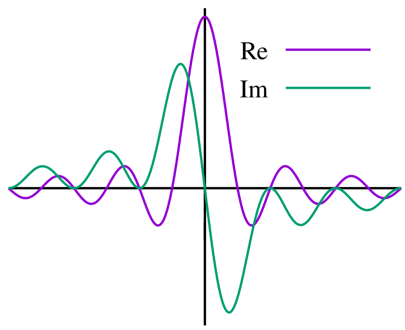
First intermediate test - Signal processing and information theory

This part is meant as an homework to be completed later. But if you have already finished answering the previous questions, nothing prevents you from working on these too

Exercises

Exercise A Knowing that the Fourier transform of $x\left(t\right) = rect_T\left(t\right)$ equals $X\left(f\right) = Tsinc\left(fT\right)$, show why the real and imaginary parts of the transform of $y\left(t\right) = x\left(t - \frac{T}{2}\right)$ appear as given in Wikipedia





Exercise B Given the time-limited signal $g\left(t\right) = tri_\tau\left(t\right)$ and the periodic signal $x\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{-\infty} g\left(t - nT\right)$ with $T = 2\tau$

1. draw $x\left(t\right)$ on paper (try to respect time proportions);
2. write the formula for the calculation of the Fourier series coefficients $\{X_n\}$ by using the known expression of $G\left(f\right)$

Exercise C An $x\left(t\right) = rect_T\left(t\right)$ signal is input to a filter whose frequency response is $H\left(f\right) = \cos\left(2\pi f\tau\right)$.

1. Determine the expression of $h\left(t\right)$;
2. evaluate the output expression $y\left(t\right)$ as the convolution between $x\left(t\right)$ and $h\left(t\right)$ (without the need to explicitly calculate the integral)
3. draw $y\left(t\right)$;
4. find the value of τ for which the output becomes $y\left(t\right) = rect_{2T}\left(t\right)$.

Primo test intermedio di SP&IT - 5 Aprile 2022

Questions

(A) 1) $\underline{z} = \underline{x} + \underline{y} = 1 + j2 - 1 - j = j$

2) $\underline{x} = |\underline{x}| e^{j\varphi_x}$ in cui $|\underline{x}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ e $\varphi_x = \mathrm{arctg}\,\frac{2}{1} = \mathrm{arctg}\,2 = 63{,}43° = 1{,}1$ rad

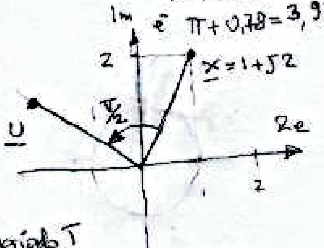
$\underline{y} = |\underline{y}| e^{j\varphi_y}$ in cui $|\underline{y}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\varphi_y = \mathrm{arctg}\,\frac{-1}{-1} = \mathrm{arctg}\,1 = 45° = \frac{\pi}{4}$ rad $= 0{,}78$ rad

in realtà è $\pi + 0{,}78 = 3{,}92$ rad

3) $\underline{w} = \underline{x} \cdot \underline{y} = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| e^{j(\varphi_x + \varphi_y)} = \sqrt{5 \cdot 2}\, e^{j(1{,}1 + 3{,}92)}$

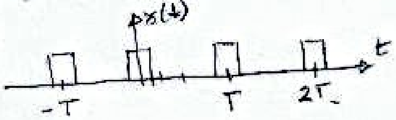
$= \sqrt{10}\, e^{j5{,}02} = \sqrt{10}\, e^{-j1{,}26}$

4) $\underline{u} = \underline{x} e^{j\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5} e^{j1{,}1} e^{j0{,}78} = \sqrt{5} e^{j1{,}88}$



5)

(B)

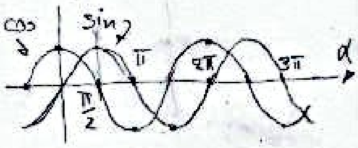


$x(t)$ è pari ad A solamente per $\frac{1}{4}$ del periodo T dunque senza fare conti, il valor medio è $\frac{A}{4}$

(C) Sì. Una costante può essere pensata come un segnale periodico con un periodo qualunque, infatti per qualsiasi T si può scrivere $x(t+T) = x(T)$. Avendo però definito T come il più piccolo valore per cui è valida, viene $T = 0$, dunque una fondamentale $F = \infty$, con tutte le armoniche che vanno anch'esse ad infinito

(D) 1) $P_x = \frac{A^2}{2}$; $T = \frac{1}{100} = 0{,}01$ sec

2) $x(t) = \frac{A}{2}\left[e^{j2\pi 100 t} e^{j\pi/3} + e^{-j2\pi 100 t} e^{-j\pi/3}\right]$



3) Un seno è come un coseno, ma con un ritardo di fase (l'argomento α) di $\frac{\pi}{2}$, ossia $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$ ovvero $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

dunque $x(t) = A \sin(2\pi 100 t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = A \sin(2\pi 100 t + \frac{5}{6}\pi)$

4) $x(t) = A \cos\left[2\pi 100 \left(t + \frac{\pi}{6\pi 100}\right)\right] = A \cos\left[2\pi 100 \left(t + \frac{1}{600}\right)\right]$

dunque non c'è un ritardo, bensì un anticipo di $\frac{1}{600}$ di secondo

(E) $y(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n T[x_n(t)]$. Invarianza temporale (o stazionarietà, o permanenza) significa che la risposta ad un ingresso traslato è la stessa che per un ingresso non traslato, ma traslata della stessa quantità, ovvero $T[x(t)] = y(t) \Rightarrow T[x(t-\tau)] = y(t-\tau)$

(F) La realizzabilità ideale implica che $h(t)$ è reale, dunque $H(f)$ è a simmetria coniugata; dunque se $H(-f) = H^*(f)$ e quindi $H(-10) = 5 - j3$

(G) IL teorema di Parseval per segnali periodi afferma che la potenza può essere ottenuta come somma delle potenze delle armoniche, ovvero

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 .$$

E' valido in virtù della proprietà di ortogonalità delle funzioni $e^{j2\pi nFt}$ che difatti rappresentano i vettori della base di rappresentazione che permette al segnale $x(t)$ di essere rappresentato come serie di Fourier $x(t) = \sum X_n e^{j2\pi nFt}$

(H) Un vettore $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ ha una lunghezza (o norma) pari a

$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ che rappresenta l'estensione del teorema di Pitagora ad uno spazio euclideo a 4 dimensioni

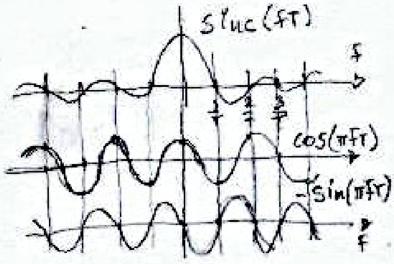
(I) $$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,y^*(t)\,dt .$$ Se sono noti i coefficienti dei rispettivi sviluppi in serie, si ottiene $\langle x(t), y(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n Y_n^*$, di nuovo possibile in virtù dell'ortogonalità degli esponenziali complessi a frequenze armoniche.

Exercises

(A) Come ben noto $\mathfrak{F}\{rect_T(t-T/2)\} = T\,\text{sinc}(fT)\,e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} =$
$= T\,\text{sinc}(fT)\,e^{-j\pi fT}$

ma $e^{-j\pi fT} = \cos(\pi fT) - j\sin(\pi fT)$

dunque $Re\{X(f)\} = T\,\text{sinc}(fT)\cos(\pi fT)$
$Im\{X(f)\} = -T\,\text{sinc}(fT)\sin(\pi fT)$

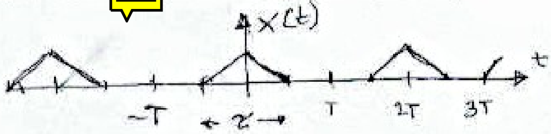


dunque (con l'aiuto del grafico a lato) possiamo dire che (oltre ad essere Re pari ed Im dispari)

- La parte Reale passa da zero per $f = \frac{n}{2T}$ ossia oltre che in corrispondenza degli zeri del sinc, anche dove il cos passa da zero
- La parte immaginaria – per $f>0$ è sempre il prodotto di un fattore negativo per uno positivo, dunque sempre negativa
  – per $f<0$ è sempre il prodotto di fattori con lo stesso segno, dunque è sempre negativa

Per ottenere il risultato di Wikipedia, occorre fare il grafico al computer. Al variare del ritardo del rect, cambia il periodo di sin e cos, ed il risultato è "interessante"

(B) 1)



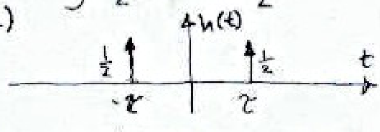
2) $X_n = \frac{1}{T}\,G(f)\big|_{f=\frac{n}{T}}$ in cui $G(f) = \frac{\tau}{2}\,\text{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right) = \frac{T}{4}\,\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{4}\right)$

dunque $X_n = \frac{1}{T}\frac{T}{4}\,\text{sinc}^2\left(\frac{nT}{T\,4}\right) = \frac{1}{4}\,\text{sinc}^2\left(\frac{n}{4}\right)$

con $X_n = 0$ per $n = 4, 8, 12 \ldots$

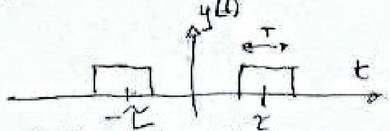
(C) 1) $h(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{H(f)\} = \mathfrak{F}^{-1}\{\cos(2\pi f\tau)\} = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{e^{j2\pi f\tau} + e^{-j2\pi f\tau}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\delta(t+\tau) + \frac{1}{2}\delta(t-\tau)$

2) dato che $h(t)$ (non fisicamente realizzabile) è costituito da due impulsi, per calcolare $y(t) = x(t) * h(t)$ senza svolgere calcoli è sufficiente applicare la proprietà della convoluzione per l'impulso, ottenendo



$y(t) = rect_T(t) * \left[\frac{1}{2}\delta(t+\tau) + \frac{1}{2}\delta(t-\tau)\right] =$
$= \frac{1}{2}rect_T(t+\tau) + \frac{1}{2}rect_T(t-\tau)$

3)



4) Con riferimento al disegno precedente, i due rect "si toccano" fondendosi in uno solo quando $T = 2\tau$ o... viceversa