Mostriamo che per una d.d.p. gaussiana multidimensionale[1]

$$p_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\boldsymbol{\Sigma}_x)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)\,\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-\mathbf{1}}\,(\mathbf{x}-\mathbf{m}_x)^\top\right\} \tag{1}$$

la condizione di incorrelazione tra v.a. marginali comporta l'indipendenza statistica tra le stesse. Svolgiamo l'esempio su due dimensioni, con v.a. marginali x_1 ed x_2 a media nulla e varianza σ_1^2 e σ_2^2 rispettivamente. In tal caso $\sigma_{ij} = E\left\{(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})\right\} = \begin{cases} 0 & \text{con } i \neq j \\ \sigma_i^2 & \text{con } i = j \end{cases}$ e la (1) si scrive

$$\begin{aligned}
p_X(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\boldsymbol{\Sigma}_x)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x})\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}(\mathbf{x})^\top\right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2\end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sigma_1^2} \\ \frac{x_2}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}\right)\right\} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

che è proprio pari al prodotto delle d.d.p. marginali

$$\begin{aligned}
p(x_1)\,p(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_1^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

e ciò significa che per la d.d.p. congiunta $p_X(\mathbf{x}) = p_X(x_1, x_2)$ risulta

$$p_X(\mathbf{x}) = p_X(x_1/x_2)\,p_X(x_2) = p(x_1)\,p(x_2)$$

e cioè pari al prodotto delle d.d.p. marginali: dunque x_1 e x_2 sono statisticamente indipendenti.

[1] In cui $\mathbf{x}$ è il vettore *riga* delle v.a. marginali, $\mathbf{m}_x$ quello delle rispettive medie, e $\boldsymbol{\Sigma}_x$ è la matrice di covarianza con elementi $\sigma_{ij} = E\left\{(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})\right\}$ pari alla covarianza tra singole v.a. marginali. Ricordiamo che $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ è pari alla matrice identità.