

Capitolo 13

Modulazione numerica

13.13.6 Sistemi a spettro espanso

Si basano su di una *manipolazione* del messaggio da trasmettere in modo che questo occupi una banda molto maggiore di quella originaria, e sulla manipolazione inversa in ricezione: tale caratteristica è quindi indicata con il termine di *Spread Spectrum*. Sebbene questa doppia operazione non produca nessun vantaggio effettivo nei riguardi delle prestazioni ottenibili nel caso in cui la ricezione sia disturbata dalla sola presenza di rumore additivo gaussiano, si ottengono invece i seguenti altri benefici

- la presenza di eventuali altre trasmissioni e/o disturbi nella stessa banda del segnale espanso causa una potenza interferente ridotta
- la densità spettrale del segnale trasmesso si confonde con quella del rumore, rendendo la trasmissione stessa difficilmente rilevabile da parte di soggetti ostili
- l'ignoranza della effettiva manipolazione adottata rende la trasmissione indecifrabile da parte di soggetti ostili

Sequenze pseudo-casuali

La manipolazione che produce l'espansione spettrale si basa a sua volta sull'utilizzo di una sequenza cosiddetta *pseudo-noise* (PN), le cui caratteristiche statistiche si avvicinano a quelle di un rumore stazionario bianco (e dunque a valori incorrelati), tranne per il fatto che tali valori non sono casuali ma deterministici, in modo che la loro ripetizione ciclica renda la sequenza PN riproducibile dal lato ricevente. La fig. 9.3-5a mostra un possibile segnale dati bipolare di durata LT_c

$$c(t) = \sum_{k=0}^{L-1} a_k g_c(t - kT_c - \theta) \quad (13.13.1)$$

pseudo-casuale, realizzato mediante impulsi rettangolari $g_c(t) = \text{rect}_{T_c}(t)$ di durata T_c chiamati *chip*, con valori $a_k = \pm 1$ tali da produrre una media nulla e varianza unitaria ($\overline{a_k} = 0$, $\overline{a_k^2} = 1$), mentre la correlazione $\mathcal{R}(n)$ tende a zero con $n \neq 0$ ⁽¹⁾, mimando così la proprietà di

¹Data la sequenza deterministica $a_k = \{a_0, a_1, \dots, a_{L-1}\}$ di lunghezza $L - 1$, la correlazione tra coppie di elementi a distanza n è definita come $\mathcal{R}(n) = \frac{1}{L-n} \sum_{k=0}^{L-n-1} a_k a_{k+n}$; considerando invece la sequenza periodica ottenuta ripetendo gli a_k , possiamo definire la stessa grandezza come $\mathcal{R}(n) = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} a_k a_{(k+n) \bmod L}$



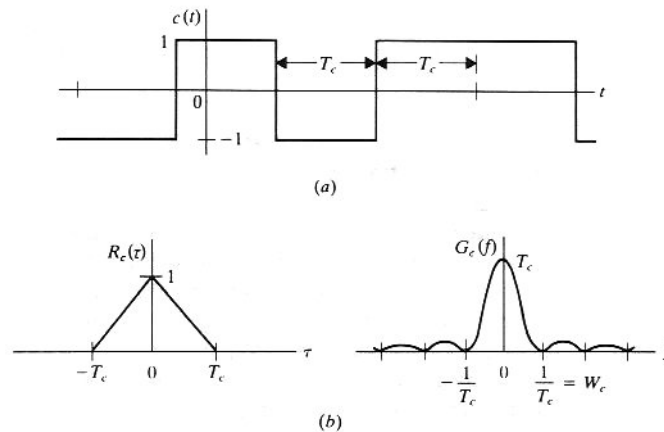


Figure 9.3-5 Pseudo-random binary wave. (a) Waveform; (b) autocorrelation and power spectrum.

indipendenza statistica. Al § 9.9.2 abbiamo mostrato che un segnale del genere presenta densità spettrale $G_c(f) = \sigma \frac{|\mathcal{E}_c(f)|^2}{T_c} = T_c \text{sinc}^2(fT_c)$ e dunque² autocorrelazione $\mathcal{R}_c(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_c(f)\} = \text{tri}_{2T_c}(\tau)$, come mostrato in fig. 9.3-5b, in cui la frequenza $W_c = \frac{1}{T_c}$ è il parametro che indica l'ordine di grandezza della banda occupata dalla sequenza pseudo casuale. Un approfondimento sulle modalità di generazione della sequenza PN può essere iniziato visitando ad es Wikipedia³.

Sequenza diretta

La moltiplicazione del segnale PN (13.13.1) per un segnale di banda base $x(t)$ realizza la tecnica di espansione spettrale nota come *Direct Sequence Spread Spectrum* (o DSSS) il cui effetto, sebbene valido per $x(t)$ qualsiasi, viene ora discusso con riferimento ad un segnale numerico⁴ binario NRZ, la cui frequenza binaria determina una densità di potenza $G(f)$ con banda dell'ordine di $W_x \ll W_c$, seguito da una modulazione AM-BLD-PS. La fig. 13.13.1 indica con $\tilde{x}(t) = x(t)c(t)$ il segnale *allargato*, la cui potenza è la stessa⁵ S_x di $x(t)$, che però risulta ora *spalmata* sulla banda di $c(t)$. Infatti, la densità di potenza $G_{\tilde{x}}(f)$ è il risultato della convoluzione in frequenza⁶

$$G_{\tilde{x}}(f) = G_x(f) \star G_c(f) = \int_{-W_x}^{W_x} G_x(\lambda) G_c(f - \lambda) d\lambda$$

²Si veda l'esempio a pag. 48

³http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_feedback_shift_register

⁴Quando il messaggio $x(t)$ è di natura numerica, esso è rappresentato da un flusso binario a velocità $f_b = 1/T_b$, e l'operazione di *spreading* si ottiene scegliendo $T_c = T_b/L \ll T_b$. Moltiplicando modulo due ogni bit del messaggio, per la sequenza di chip della PN, si ottiene di fatto una *sequenza di sequenze* PN, ognuna con segno invertito o meno a seconda del valore dei singoli bit del messaggio. Il segnale dati viene poi realizzato a partire dalla sequenza risultante a velocità $f_b \cdot W_c$.

⁵considerando $x(t)$ realizzazione di un processo ergodico indipendente da $c(t)$, la potenza di $\tilde{x}(t)$ risulta $\overline{\tilde{x}^2} = E\{x^2(t)c^2(t)\} = \overline{x^2} = S_x$

⁶l'autocorrelazione del prodotto di processi indipendenti è pari al prodotto delle autocorrelazioni, e quindi si applica teorema di Parseval

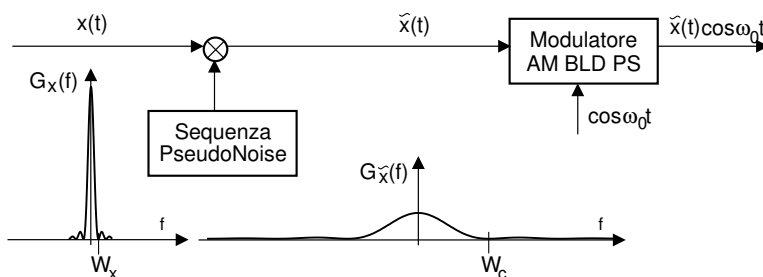


Figura 13.13.1: Generazione di un segnale modulato DSSS

in cui la definizione degli estremi di integrazione tiene conto del fatto che $G_x(f) \approx 0$ per $|f| > W_x$. Considerando ora che $W_c \gg W_x$, notiamo che per $|\lambda| \leq W_x$ si ha $G_c(f - \lambda) \simeq G_c(f)$, e quindi

$$G_{\tilde{x}}(f) \approx \left[\int_{-W_x}^{W_x} G_x(\lambda) d\lambda \right] G_c(f) = S_x G_c(f)$$

Il rapporto di espansione spettrale W_c/W_x tra la banda del segnale allargato e quella del segnale di partenza varia tipicamente tra 10 e 100 volte, ossia tra 10 e 20 dB, e viene indicato anche come *guadagno di processo* (processing gain), in quanto come vedremo rappresenta una misura del miglioramento dell'SNR nel caso di presenza di segnali interferenti.

Despreading Per proseguire nell'analisi, consideriamo lo schema di ricevitore mostrato in fig. 9.3-6, nella cui parte sinistra è mostrato il segnale modulato ricevuto $\tilde{x}(t) \cos \omega_c t$ con potenza⁷ $S_R = \frac{1}{2} S_x$, a cui si sovrappone un disturbo $z(t)$, ed insieme attraversano il filtro passabanda di ricezione caratterizzato da una banda di rumore $B_T \gg W_c \gg W_x$, dato che deve lasciar passare l'intero spettro *allargato*, compresi i suoi lobi laterali. Il fatto che la potenza S_R sia spalmata su tutta la banda B_T rende il segnale utile poco distinguibile dal livello di rumore, e dunque difficilmente intercettabile.

Dopo demodulazione omodina si ottiene il nuovo segnale di banda base $y(t) = \tilde{x}(t) + z_i(t)$ in cui $z_i(t)$ è la componente in fase del rumore. A questo punto avviene l'operazione di *despreading* che si avvale della possibilità per il ricevitore di ricostruire autonomamente la stessa sequenza PN usata in trasmissione, perdipiù in forma sincrona, in modo da poter scrivere

$$\tilde{y}(t) = [\tilde{x}(t) + z_i(t)] c(t) = x(t) c^2(t) + z_i(t) c(t) = x(t) + \tilde{z}_i(t)$$

⁷ $\tilde{x}(t) \cos(\omega_c t + \varphi)$ con φ v.a. a d.d.p. uniforme può essere considerato come il prodotto di due processi statisticamente indipendenti, la cui potenza è il prodotto delle potenze.

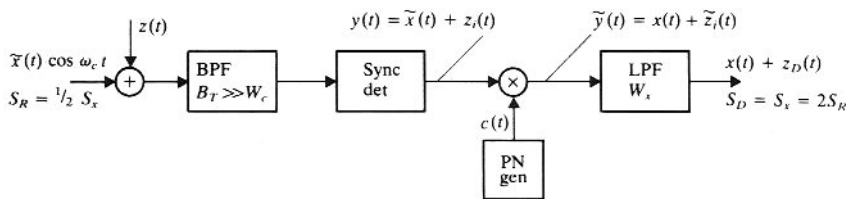


Figure 9.3-6 Receiver for DSB spread spectrum with additive noise or interference $z(t)$.

Pertanto, mentre il messaggio $x(t)$ è di nuovo quello precedente all'allargamento, il rumore ha subito a sua volta un effetto di allargamento. Un successivo filtraggio passa-basso con banda W_x pari a quella di segnale produce infine il risultato $y_D(t) = x(t) + z_D(t)$, in cui il segnale utile ha potenza $S_D = S_x = 2S_R$, mentre al termine di disturbo additivo $z_D(t)$ è stata rimossa la potenza che cade al di fuori della banda di segnale.

Prestazioni in presenza di rumore Nel caso in cui $z(t)$ sia rumore bianco con densità di potenza $\mathcal{P}_n(f) = N_0/2$, la sua componente in fase dopo demodulazione omodina ha densità⁸ $\mathcal{P}_{n_i}(f) = N_0 \text{rect}_{B_T}(f)$ e dunque autocorrelazione

$$\mathcal{R}_{n_i}(\tau) = N_0 B_T \text{sinc}(B_T \tau)$$

Allo scopo di valutare la densità di potenza $G_{\tilde{n}_i}(f)$ del rumore dopo despreading, osserviamo che l'autocorrelazione di $\tilde{n}_i(t)$ è pari a $\mathcal{R}_{\tilde{n}_i}(\tau) = \mathcal{R}_{n_i}(\tau) \mathcal{R}_c(\tau)$, e che $\mathcal{R}_{n_i}(\tau) \simeq 0$ con $|\tau| \geq \frac{1}{B_T} \ll \frac{1}{W_c}$, mentre $\mathcal{R}_c(\tau) \simeq 1$ con $|\tau| \ll T_c = \frac{1}{W_c}$: pertanto possiamo scrivere $\mathcal{R}_{\tilde{n}_i}(\tau) \simeq \mathcal{R}_{n_i}(\tau)$ e quindi

$$G_{\tilde{n}_i}(f) \simeq G_{n_i}(f) = N_0 \text{rect}_{B_T}(f)$$

La componente di rumore $z_D(t)$ in uscita dall'ultimo passa basso ha quindi una potenza $N_D = 2N_0 W_x$, permettendo di valutare il rapporto segnale-rumore dopo demodulazione come

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = \frac{2S_R}{2N_0 W_x} = \frac{S_R}{N_0 W_x}$$

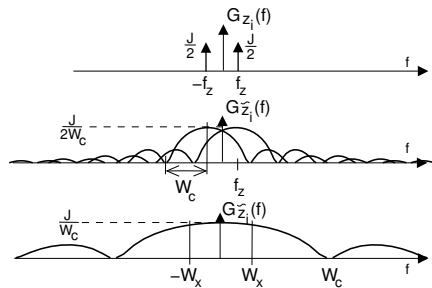
ossia proprio pari all' SNR di riferimento, mostrando come la sequenza di spreading e despreading non alteri le prestazioni del processo di modulazione.

Prestazioni in presenza di un tono interferente Al contrario, se il termine additivo $z(t)$ occupa una banda relativamente stretta in rapporto a B_T , allora la sua potenza risulterà ridotta di un fattore pari al guadagno di processo W_c/W_x . Ad esempio consideriamo il caso di un *tono interferente* (jamming), in cui

$$z(t) = \sqrt{2J} \cos(\omega_c + \omega_z)t$$

con potenza $\bar{z}^2 = J$ alla frequenza $f_c + f_z$. In tal caso $z_i(t) = \sqrt{2J} \cos \omega_z t$ e

$$G_{z_i}(f) = \frac{J}{2} [\delta(f - f_z) + \delta(f + f_z)]$$



che moltiplicato per $c(t)$ produce $G_{z_i}(f) = G_{z_i}(f) \star G_c(f)$, mostrato alla riga centrale della figura a fianco. Notiamo ora che la massima interferenza si ottiene quando $|f_z| \ll W_c$, al limite pari a zero, come mostrato all'ultima riga della figura in scala espansa per il caso limite di $f_z = 0$. Pertanto, il limite superiore della potenza interferente è

$$\bar{z}_D^2 = \int_{-W_x}^{W_x} G_{z_i}(f) df \leq 2W_x \frac{J}{W_c}$$

e dunque il rapporto segnale-interferente diviene

$$\left(\frac{S}{J}\right)_D \geq \frac{W_c S_R}{W_x J}$$

mostrando quindi un miglioramento pari proprio al guadagno di processo.

⁸vedi § 12.1.2